

## Génesis Instrumental: el caso de la función cuadrática

### Jesús Victoria Flores Salazar<sup>1</sup>

Fecha de recepción: 30/12/2013  
 Fecha de aceptación: 17/10/2014

<b>Resumen</b>	<p>El presente artículo analiza como sucede la génesis instrumental, de estudiantes de primer ciclo en el curso de matemáticas, respecto a la función cuadrática cuando utilizan el GeoGebra. Para el análisis se consideraron algunos elementos teóricos del Enfoque Instrumental de Rabardel. El poder identificar tanto la traslación horizontal como la vertical de la función cuadrática, usando este ambiente de geometría dinámica, favoreció los procesos de génesis instrumental de los estudiantes respecto al objeto matemático abordado. Además, este software permitió que los estudiantes verifiquen y/o validen sus conjeturas.</p> <p><b>Palabras-clave:</b> Función cuadrática; Génesis instrumental; GeoGebra.</p>
<b>Abstract</b>	<p>This article analyzes the instrumental genesis in university-level students, about the quadratic function using the GeoGebra software. Some theoretical elements of Rabardel Instrumental Approach were considered for the analysis. Being able to identify both the horizontal and vertical translation of the quadratic function, using the dynamic geometry environment favored the process of instrumental genesis of the students regarding mathematical object dealt. In addition, this software allowed students verify and/or validate their conjectures.</p> <p><b>Key words:</b> quadratic function; instrumental genesis; GeoGebra.</p>
<b>Resumo</b>	<p>O presente artigo analisa como acontece a gênese instrumental de estudantes iniciantes de licenciatura em Matemática, com respeito à função quadrática quando utilizam o GeoGebra. Para a análise foram considerados alguns elementos teóricos da Abordagem Instrumental de Rabardel. A possibilidade de identificar tanto a translação horizontal e a vertical de uma função quadrática usando este ambiente de geometria dinâmica favoreceu os processos de gênese instrumental dos estudantes com respeito ao objeto matemático abordado. Além disso, este software permitiu que os estudantes validassem suas conjeturas.</p> <p><b>Palavras-chave:</b> função quadrática; gênese instrumental; GeoGebra.</p>

<sup>1</sup> Estudios de Pos-doctorado en el Programa de Estudios Pos-graduados en Educación Matemática de la Pontificia Universidad Católica de Sao Paulo. PDJ-CNPq/Brasil.

## 1. Introducción

Señalamos que investigaciones en el área de Educación Matemática como las de Salazar et al. (2013), Salazar et al. (2012a; 2012b) y Silva et al. (2012) muestran los procesos de enseñanza y aprendizaje de contenidos matemáticos cambia se trabajan en ambientes tecnológicos, especialmente en ambientes de geometría dinámica.

Los investigadores afirman que al analizar las potencialidades del uso de los ambientes de geometría dinámica, se debe tomar en cuenta su impacto en la enseñanza y se deben establecer relaciones recíprocas entre el uso de estos ambientes y el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes.

En ese mismo sentido, Artigue (2002) señala que los ambientes tecnológicos utilizados estratégicamente pueden ser de gran utilidad para que los estudiantes comprueben resultados, refuercen conceptos; o puedan usarlos como herramientas para elaborar conjeturas e inferencias sobre las propiedades de objetos matemáticos y; en el caso de los profesores los puedan manejar como recursos para el desarrollo de su clase.

En el presente artículo investigamos específicamente como sucede el proceso de génesis instrumental en estudiantes de un primer curso de matemáticas de nivel universitario cuando consideran la traslación horizontal y vertical de la función cuadrática al utilizar el GeoGebra.

## 2. Enfoque instrumental

Para analizar el proceso de génesis instrumental de los estudiantes, utilizamos como base teórica el Enfoque Instrumental de Rabardel (1995).

De acuerdo con Artigue (2007), el surgimiento del enfoque instrumental se basa en la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), como marco macro-teórico y, en la ergonomía cognitiva que se refiere a los procesos mentales tales como percepción, memoria, raciocinio y respuesta motora y como estas afectan las interacciones entre seres humanos y otros elementos de un sistema. Por ejemplo, interacción hombre-computadora.

Este enfoque, de acuerdo con Rabardel (1995), estudia la transformación de artefacto a instrumento y los procesos que envuelven esa transformación progresiva. Además, el autor muestra que en toda situación de actividad o de utilización de artefactos, instrumentos, existe siempre una tríada de elementos relacionados de manera explícita o implícita, formada por el sujeto, el instrumento y el objeto, siendo el instrumento un intermediario entre el sujeto y el objeto. Así el autor señala que:

- Sujeto: se refiere a un individuo o grupo de individuos que desarrollan una acción y/o son elegidos para el estudio y el desarrollo de sus posibles esquemas de utilización. Utiliza este término adoptando la posición de Vergnaud (1996, p.23), “un esquema es una organización invariante de comportamientos para clases de situaciones”.
- Artefacto: puede entenderse como una cosa susceptible de su uso, elaborada para inscribirse en actividades intencionales. Puede ser, por ejemplo: un medio material como un computador. También puede ser un medio simbólico como

el código Morse, la iconografía inca, el lenguaje algebraico, un gráfico en un sistema de coordenadas.

- Instrumento: se entiende como un artefacto en situación de uso. La noción de instrumento involucra tanto al artefacto como a los esquemas mentales (esquemas de utilización) desarrollados por el sujeto cuando realiza una clase de tareas.

En cuanto a los esquemas de utilización que el sujeto moviliza o desarrolla, el autor los categoriza de la siguiente manera:

- Esquemas de uso: relativos a unas operaciones, es decir a la manipulación técnica del artefacto.
- Esquemas de acción instrumental: relativos a la utilización de un artefacto en vista de realizar una acción.

También, de acuerdo con Rabardel (1995) la utilización de un artefacto no es neutral para el sujeto. Introduce en este una actividad cognitiva de construcción o de evolución de esquemas de utilización y llama instrumento al conjunto artefacto y esquemas de utilización relacionados con el artefacto (ver figura 1).



Figura 1. Instrumento  
Fuente: elaborado por el autor

El instrumento es específico a un sujeto por que los esquemas correspondientes dependen de sus conocimientos. Evoluciona por consiguiente con el sujeto, durante el curso de una acción de dos maneras: o sea volviendo a invertir esquemas de utilización familiares ya constituidos o sea produciendo nuevos esquemas de uso que le permiten alcanzar los objetivos contemplados. Se trata del proceso de **Génesis Instrumental**.

Durante este proceso, de acuerdo con el autor, el sujeto se apropia los instrumentos, confiriéndoles funciones que van más allá de sus funciones constitutivas. El sujeto

puede elaborar sus instrumentos utilizando las potencialidades del artefacto. Así pues, la génesis instrumental es consustancial al tema ya que depende del artefacto, y también de la utilización que hace el sujeto. Este proceso tiene dos dimensiones:

- Instrumentalización: se refiere a la aparición y a la evolución de los componentes artefacto del instrumento. El usuario, por su actividad, asigna funciones al artefacto, estas funciones pueden por consiguiente ser integradas al artefacto a continuación integrarse al artefacto.
- Instrumentación: se refiere a la adaptación del sujeto a las dificultades que constituyen el artefacto y sus funciones constitutivas. Es relativa a la aparición y a la evolución de los esquemas de utilización.

Asimismo, Rabardel (1995) explica que la combinación de estos dos procesos conduce a la reorganización de los esquemas de utilización y en consecuencia a la modificación del instrumento. En base a este enfoque, analizaremos la génesis instrumental de un estudiante del primer curso de matemáticas a nivel universitario cuando estudia la traslación horizontal y vertical de la función cuadrática.

### 3. La actividad

En esta investigación participaron quince estudiantes de primer ciclo del curso de matemáticas de la Facultad de Artes Escénicas de la Pontificia Universidad Católica del Perú (18 - 20 años de edad). Para el presente artículo analizaremos las acciones de un estudiante al que la llamaremos Luis.

El trabajo se desarrolló en el laboratorio de cómputo dentro del desarrollo habitual de clases y consistió en una secuencia de actividades en las que se movilizaron las nociones de traslación horizontal y vertical de la función cuadrática. La secuencia diseñada estuvo estructurada de la siguiente manera: seis actividades organizadas fueron entregadas en una ficha de trabajo.

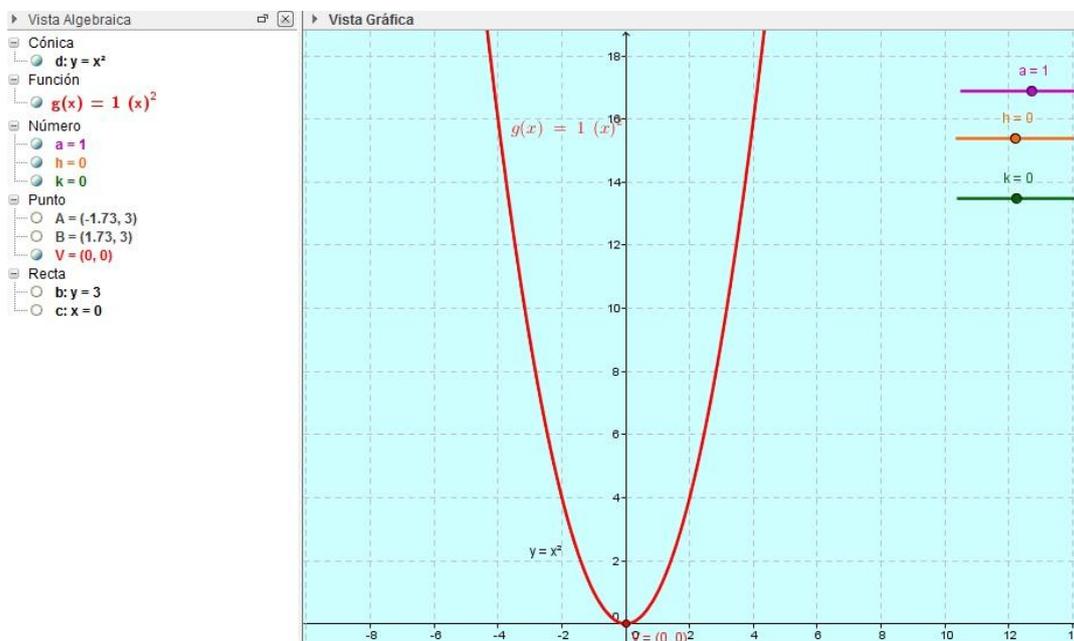
Las tres primeras actividades fueron preparadas para movilizar en los estudiantes algunas características intrínsecas de la función cuadrática. En relación a la actividad 4, motivo del presente artículo, contiene cuatro ítems y su desarrollo se realizó utilizando un archivo previamente creado en el ambiente de geometría dinámica GeoGebra.

En esta actividad los estudiantes deben representar gráficamente funciones cuadráticas dadas en su forma canónica  $f(x) = a(x-h)^2 + k$  a partir de la función cuadrática “base”  $f(x) = x^2$ . Es decir, nos interesa observar en esta actividad el proceso de génesis instrumental cuando se estudia la traslación horizontal y vertical de la función cuadrática.

#### 3.1. Aplicación de la actividad

En seguida presentamos la actividad que es objeto de análisis en el presente artículo. En cuanto al análisis presentaremos una visión global de lo realizado por los estudiantes y en especial analizaremos las acciones del estudiante Luis.

Abra el archivo **Técnicas.ggb** y en la vista gráfica observará la representación de las funciones  $f(x) = x^2$  y  $g(x) = a(x-h)^2 + k$  en negro y rojo respectivamente. Como muestra la figura 2.



**Figura 2. Archivo Técnicas**  
 Fuente: elaborado por el autor

Complete y justifique cada uno de los siguientes ítems.

- i. Arrastre el punto  $h$  del deslizador y colóquelo en  $h = -1$ , entonces ¿qué sucede con la función  $g(x)$ ? Explique.
- ii. A continuación, arrastre el punto  $a$  del deslizador y colóquelo en  $a = 2$ , ¿qué relación hay entre la nueva representación gráfica de  $g(x)$  con respecto a la del ítem anterior? Explique.
- iii. Por último, arrastre el punto  $k$  del deslizador y colóquelo en  $k = -3$ , entonces ¿qué relación hay entre la nueva representación gráfica de  $g(x)$  con respecto a la del ítem i)?
- iv. ¿Qué relación hay entre la gráfica de  $g(x) = 2(x+1)^2 - 3$  con respecto a la gráfica de  $g(x)$ ?

Esperamos en el ítem i) los estudiantes observen que al arrastrar el deslizador  $h$  hasta -1, la nueva función generada es  $g(x) = (x+1)^2$  y que la representación gráfica de esta función, se ha trasladado horizontalmente 1 unidad hacia la izquierda, como muestra la figura 3.

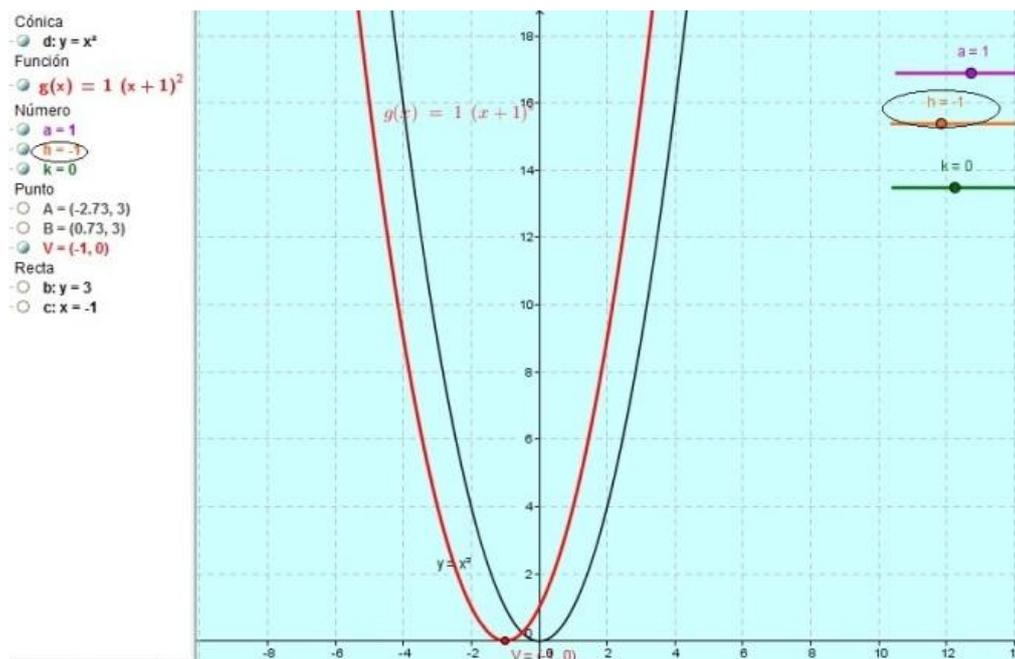


Figura 3. Ítem (i)  
 Fuente: elaborado por el autor

Observamos que doce de los quince estudiantes señalaron que la nueva función  $g(x) = (x+1)^2$  con respecto a la función  $f(x) = x^2$  se había trasladado 1 unidad hacia la izquierda.

El estudiante Luis después de arrastrar el selector de  $h$  a  $-1$ , escribe lo siguiente:

Arrastre el punto  $h$  del deslizador y colóquelo en  $h = -1$ , entonces ¿qué sucede con la función  $g(x)$ ? Explique

Que la gráfica de  $g(x)$ , se desplaza en horizontal en el eje  $x$ , para la izquierda cuando  $h = -1$ .

En este ítem el estudiante, al igual que sus compañeros, explica lo que habíamos supuesto inicialmente, esto nos hace pensar que Luis podría estar instrumentalizado localmente, en lo referente a la herramienta de “arrastre” del GeoGebra ya que la manipula sin dificultad, además podemos percibir que al observar cambio de la representación gráfica ha movilizad sus conocimientos previos sobre función y translación.

En cuanto al ítem ii) de la actividad, esperamos que los estudiantes observen que al arrastrar el deslizador  $a$  hasta 2, la nueva función es  $g(x) = 2(x+1)^2$  y que la curva que representa a esta función es “más cerrada” en relación a la curva de la función  $g(x) = (x+1)^2$ .

Además, esperamos que los estudiantes perciban que el vértice y el sentido de apertura de la parábola se mantienen como muestra la figura 4.

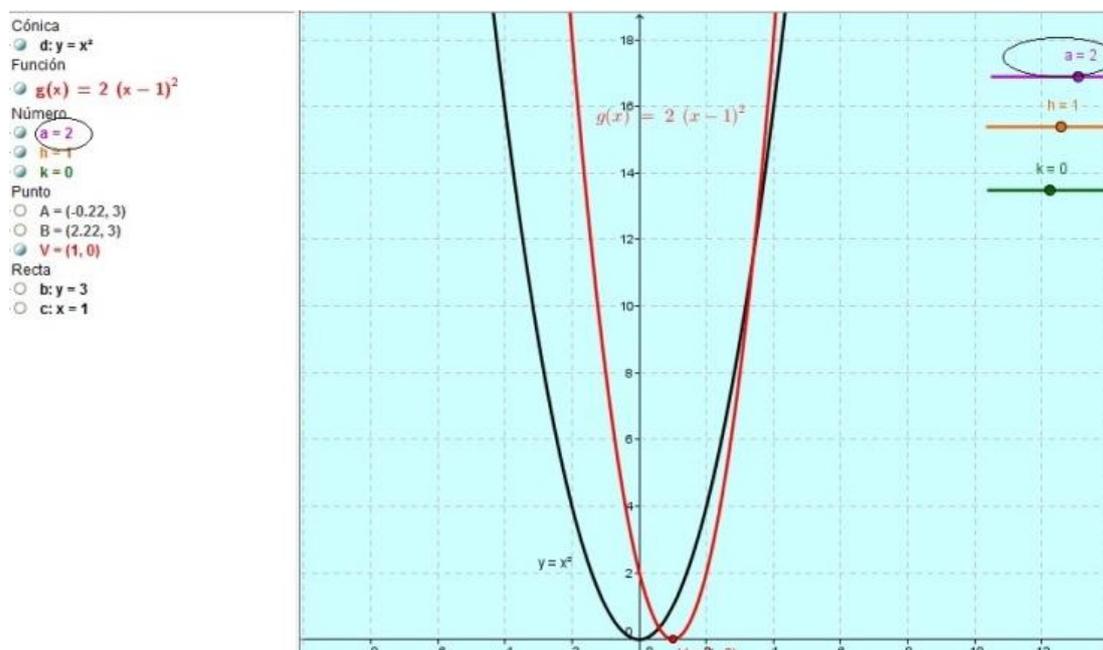


Figura 4. Ítem (ii)  
 Fuente: elaborado por el autor

Al igual que en el caso anterior, los estudiantes se señalaron que la nueva función  $g(x) = 2(x+1)^2$  con respecto a la  $g(x) = (x+1)^2$  es más “cerrada” pero tienen el mismo vértice. Es decir, que sus observaciones coinciden con lo que habíamos previsto para este ítem.

En cuanto a las acciones del estudiante Luis, respondió esta parte como muestra a continuación:

ii. A continuación, arrastre el punto del deslizador y colóquelo en, ¿qué relación hay entre la nueva representación gráfica de con respecto a la del ítem anterior? Explique.

*La parábola se acerca al eje y, manteniendo el vértice (-1, 0) por encima de 0, es decir, sobre el tramo positivo del*

Lo explicado por el estudiante Luis es una muestra de que, al igual que sus compañeros, observó lo que advertimos anteriormente.

Asimismo, es importante notar que el estudiante, mediante sus acciones, muestra indicios de instrumentación de las características, es decir del coeficiente “a” ya que la estudiante señala que la abertura de la gráfica de la función cuadrática ha variado con respecto de la anterior.

Esto nos hace ver que percibe que cuando el coeficiente es mayor, la abertura de parábola es menor.

En relación al ítem iii) esperamos que los estudiantes luego de arrastrar el deslizador  $k$  al valor  $-3$ , perciban que la nueva función  $g(x) = 2(x+1)^2 - 3$  y que la curva que la representa se ha trasladado verticalmente 3 unidades hacia abajo en relación a la curva  $g(x) = 2(x+1)^2$  y que el sentido de abertura de la parábola es el mismo, pero la posición de su vértice ha cambiado (ver figura 5).

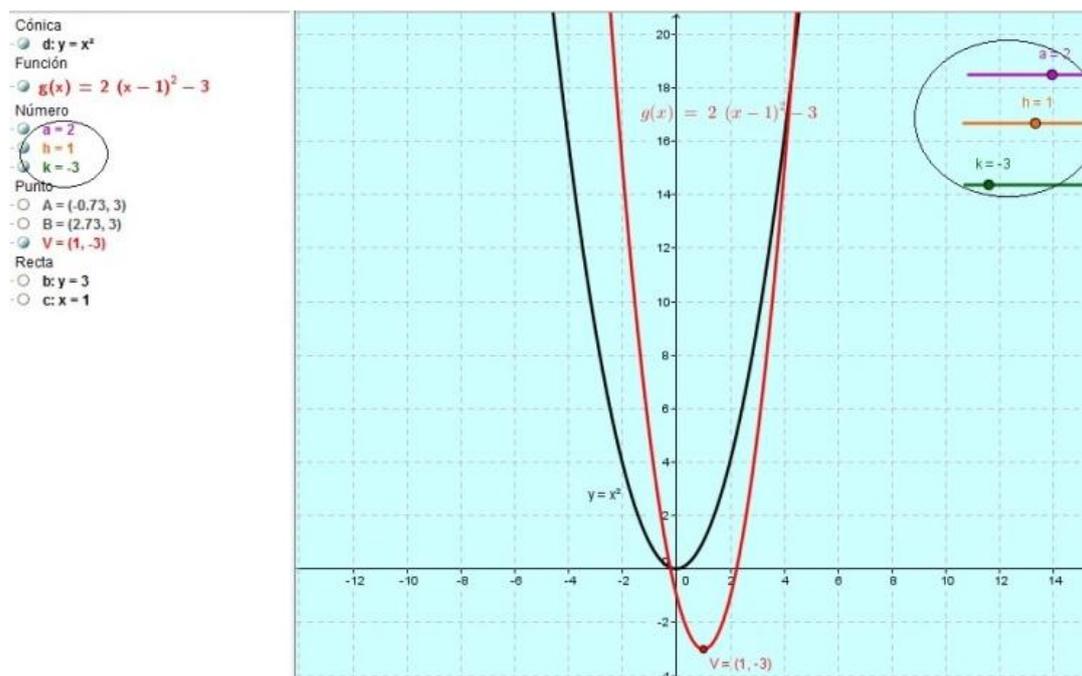


Figura 5. Ítem (iii)  
 Fuente: elaborado por el autor

En cuanto al grupo de estudiantes, cinco de ellos percibieron que la nueva función  $g(x) = 2(x+1)^2 - 3$  con respecto a la  $g(x) = 2(x+1)^2$  se ha trasladado verticalmente 3 unidades hacia abajo, como lo habíamos señalado.

Por su parte Luis respondió de la siguiente manera:

- iii. Por último, arrastre el punto  $k$  del deslizador y colóquelo en  $k = -3$ , entonces ¿qué relación hay entre la nueva representación gráfica de  $g(x)$  con respecto a la del ítem i)?

*la parábola mantiene su forma, pero cambia su vértice  $(-1, -3)$ , movilizándose hacia abajo sobre el eje  $y$ , hacia el ramo negativo*

iv.

Observamos que al igual que el ítem anterior, Las acciones de Luis muestran que está instrumentado con las nociones movilizadas e instrumentalizada, quizás localmente, con el arrastre del software GeoGebra. Es decir, que en él el proceso de génesis instrumental está aconteciendo.

En el último ítem de esta actividad, al preguntarse qué relación hay entre las funciones  $g(x) = 2(x+1)^2 - 3$  y  $f(x) = x^2$  esperamos que los estudiantes digan las dos funciones son diferentes, es decir que no tienen la misma forma ya que la nueva función es más “cerrada” y que se ha trasladado horizontalmente 1 unidad hacia la izquierda y tres unidades hacia abajo.

Al analizar el trabajo de los estudiantes notamos que solo tres de ellos observaron los que señalamos anteriormente y que no explicitan que la nueva función  $g(x) = 2(x+1)^2 - 3$  con respecto a la función  $f(x) = x^2$  no tiene la misma forma, que la curva de la nueva función es más “cerrada” y se ha trasladado horizontalmente 1 unidad hacia la izquierda y tres unidades hacia abajo. En cuanto a lo respondido por Luis:

iv. ¿Qué relación hay entre la gráfica de  $g(x) = 2(x+1)^2 - 3$  con respecto a la gráfica de  $g(x)$ ?

Las dos gráficas tienen un punto mínimo positivo, por lo tanto son hacia arriba, están en distintos vértices;  $(0, -3)$  y  $g$  es más alargada por esta última razón.

Percibimos que el estudiante señala una semejanza entre ambas funciones cuando afirma que las dos tienen un punto mínimo común. Sin embargo, notamos que cuando escribe los vértices se equivoca al escribir el vértice  $(0,0)$ .

Además, Luis señala una diferencia entre ambas. Lo descrito por el estudiante es semejante a lo que pensamos que podían responder los estudiantes. Además, observamos que al igual que el ítem anterior, las acciones de Luis muestran que está instrumentado con las nociones movilizadas en la actividad.

### 3. Reflexiones finales

Observamos que, en general, el software GeoGebra posee ventajas debido a su dinamismo (arrastre) para explorar propiedades de objetos matemáticos.

Podemos concluir que el uso del aspecto dinámico del GeoGebra, en la secuencia de actividades que trabajamos con los estudiantes en particular cuando diseñamos actividades, auxilió a los estudiantes a movilizar las nociones de traslación horizontal y vertical de la función cuadrática.

Sin embargo, con la variedad de posibilidades del aspecto gráfico de esta función dejamos abierta la posibilidad de diseñar una secuencia de actividades con un determinado conjunto de restricciones que hagan menos complicado su aprendizaje en los cursos de matemáticas básicas a nivel superior.

En general, las actividades trabajadas y en particular la actividad analizada en el presente artículo, en la que se hizo uso del GeoGebra favorecieron la transformación de artefacto a instrumento. Es decir, que la posibilidad de observar la representación gráfica de función cuadrática en este ambiente de geometría dinámica permitió, de cierta forma, validar los conocimientos previos de los estudiantes que con el ambiente de lápiz y papel hubiese sido más costoso.

En cuanto al proceso de génesis instrumental podemos afirmar que en la actividad analizada se desarrolló este proceso en Luis, porque observamos en varios momentos la instrumentación e instrumentalización de las nociones de traslación horizontal y vertical de la función cuadrática en las acciones del estudiante.

Mencionamos además que el GeoGebra fue un software integrador en la movilización de las nociones de traslación horizontal y vertical de la función cuadrática. El conocimiento progresivo de las herramientas y comandos, en cuanto a sus potencialidades, permitieron que los estudiantes conjeturen las características de estas traslaciones.

## Referencias

- Artigue, M. (2002). *Learning Mathematics in a CAS environment: the genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work*. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 7, 245-274.
- Artigue, M. (2007). Tecnología y enseñanza de las matemáticas: desarrollo y aportaciones de la aproximación instrumental. Investigación. En: *XII Conferencia Interamericana de Educación Matemática México: XII CIAEM*, pp. 25-37.
- Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies: approche cognitive des instruments contemporains*. Paris: Armand Colin.
- Salazar, J. V. F.; Chumpitaz, L. D. (2013). Génesis instrumental: un estudio del proceso de instrumentalización de la función definida por tramos. *VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática. Montevideo: VII CIBEM*, 1, pp. 7165-7162.
- Salazar, J. V. F.; Malaspina, U. J.; Gaita, C.; Ugarte, F. (2012a). Three-Dimensional Geometric Transformations Using Dynamic Geometry: A View from the Instrumental Genesis. *12th International Congress on Mathematical Education. Korea: ICME 12*, 1, pp. 2435-2443.
- Salazar, J. V. F.; Gaita, C.; Malaspina, U. J.; Ugarte, F. (2012b). The Use of Technology and Teacher Training: An Alternative for the Teaching of Spatial Geometry. *12th International Congress on Mathematical Education. Korea: ICME 12*, 1, pp. 3774-3781.
- Silva, M. J. F.; Salazar, J. V. F. (2012). Cabri 3D na sala de aula. *VI Congresso Iberoamericano de Cabri, 2012*. Lima: Editorial Hozlo S.R.L. 101-107.

Vergnaud, G. (1996). *A teoria dos campos conceptuais*. Jean Brun (Ed.). Didáctica das Matemáticas. Lisboa: Instituto Piaget.

**Jesús Victoria Flores Salazar.** Pontificia Universidad Católica del Perú. Directora de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica del Perú. Miembro de los grupos de Investigación Didáctica de las Matemáticas DIMAT/PUCP y *Processo de Ensino e Aprendizagem em Matemática* PEAMAT/PUC-SP. [jvflores@pucp.pe](mailto:jvflores@pucp.pe)