

SIMCALC MATHWORLDS®: PROMOTOR DE UN APRENDIZAJE VISUAL DEL CÁLCULO



Patricia Salinas Martínez, Eliud Quintero Rodríguez
 npsalinas@itesm.mx, eliud.quintero@gmail.com
 ITESM Campus Monterrey
 Experiencia Didáctica
 Superior

Resumen

En este trabajo se presenta una experiencia didáctica, realizada en un primer curso del nivel superior de educación, donde el software SimCalc MathWorlds® fue utilizado para introducir el contexto del movimiento en línea recta de modo que con este significado real se propiciara la identificación visual de relaciones entre las gráficas de velocidad y posición. Las características de este software dinámico permiten compartir las acciones realizadas por los estudiantes y promover el establecimiento de generalizaciones para establecer dicha identificación. Como resultado de la secuencia que se apoya en el software, se llega a la caracterización visual de los puntos máximo, mínimo y de inflexión de una función en relación con el comportamiento de su derivada. Este resultado sugiere una reorganización posible del contenido del Cálculo donde la representación gráfica de funciones adquiere relevancia desde el inicio del curso.

Palabras clave: *Cálculo, tecnología, aprendizaje, enseñanza, visual.*

1. INTRODUCCIÓN

El desarrollo de nuevas tecnologías digitales debe impactar de manera benéfica en el proceso de enseñanza aprendizaje de las Matemáticas. Sin embargo, la rapidez que caracteriza dicho desarrollo, limita el tiempo de reflexión sobre el uso de estos recursos que permita la toma de decisiones sobre su integración en el proceso educativo. Por otra parte, un currículum tradicional que se ha normalizado en las aulas, se resiste a ser cuestionado y complica la búsqueda y establecimiento de criterios que nos guíen para hacer de la tecnología un aliado en el proceso.

Hablar de tecnología en el aprendizaje del Cálculo lleva sin duda a pensar en el uso de software de graficación, sea en calculadora o en computadora. La intención de este trabajo es insistir en que no es solamente la incorporación de tecnología para graficación lo que hace la diferencia en el aprendizaje. Con la intención de impactar con un aprendizaje visual, son factores determinantes por considerar, tanto las características intrínsecas del ambiente tecnológico, como el diseño de actividades didácticas que tomen en cuenta dichas características. En este escrito se describe una experiencia didáctica en la que se trabaja con un software en especial, cuyo origen se ubica en la mejora del aprendizaje del Cálculo, y una secuencia de actividades llevadas a cabo con él y cuya práctica en un curso regular nos ha llevado a dimensionar cambios posibles en el currículum cuando la tecnología está integrada en el discurso escolar.

2. MARCO TEÓRICO

El software SimCalc MathWorlds® (<http://www.kaputcenter.umassd.edu/products/software/>), de ahora en adelante SimCalc, ofrece la ventaja de manipular en forma directa y dinámica gráficas cartesianas que están ligadas con la simulación del movimiento en línea recta. Desde su concepción, James Kaput (1942-2005) estaba interesado en tratar con una perspectiva semiótica para la simbología matemática en la educación. Él nos proveyó de un marco para entender las

cuestiones que surgen cuando tratamos con la forma en que las Matemáticas son conocidas a través del acto de enseñar y aprender en el aula. Los proyectos con SimCalc (<http://www.kaputcenter.umassd.edu/projects/simcalc/>) comparten la meta común de brindar a los estudiantes la oportunidad de acceder a las ideas importantes del cambio y la variación. SimCalc permite el diseño de actividades donde el propósito puede variar según la intención del investigador. En el presente trabajo estamos interesados en compartir una secuencia de actividades diseñadas para crear un ambiente de aprendizaje en el aula que apoye la habilidad visual de graficar una función a través del comportamiento de su derivada.

Es fácil reconocer en los estudiantes dificultades cognitivas relacionadas con el transitar entre una representación gráfica y una algebraica; habilidad ampliamente reconocida como central en la comprensión de las Matemáticas. Duval (2006a) clarifica la noción de representación contemplando aspectos cognitivos que subyacen y que pueden ser fuente de dificultad en el aprendizaje de las Matemáticas. Las representaciones son también signos que se asocian de manera compleja y que se producen cumpliendo con reglas como parte de un sistema. Como el lenguaje, son herramientas para producir conocimiento como resultado de operaciones y organización de estructuras cognitivas en nuestra mente.

Duval (2006b) provee de una idea clave para analizar los procesos cognitivos que se involucran en el pensamiento matemático: tenemos varios sistemas de representación que deben ser coordinados durante la actividad matemática. Identifica dos tipos de transformación posibles, que llama *tratamiento* y *conversión*. La primera se refiere a cambios dentro del mismo tipo de representación, y la segunda a la habilidad de cambiar de tipo de representación, incluyendo el transformar enunciados del lenguaje natural a representación numérica, algebraica o gráfica.

Es incuestionable la importancia que adquiere para los estudiantes de Cálculo el tener una coordinación fluida y simultánea del uso de símbolos y gráficas, y de patrones de comportamiento gráfico y numérico; es también deseable tener la habilidad de identificar un mismo patrón de representación en diferentes contextos. Sin embargo, ahora sabemos que esta meta no se alcanza de un modo inmediato. La cuestión es preguntarse por el tipo de actividades que puedan ser puestas a este servicio de un modo efectivo. “La acción más obvia es mostrar varios registros de representación posibles al mismo tiempo” (Duval, 2008, p. 11). Actualmente el software es una herramienta poderosa en ese sentido, al permitir mostrar “instantáneamente” las representaciones solicitadas, y pareciera que con esto tendremos el problema del aprendizaje resuelto; sin embargo, este es el lugar y el momento en que la investigación debería enseñarnos el ser cautelosos. Resulta sumamente importante el discernir en las diferentes representaciones utilizadas, lo que es matemáticamente diferente y lo que es matemáticamente relevante. “Esta condición es particularmente fuerte cuando las representaciones cognitivas son lingüísticas o visuales, y no solamente simbólicas” (Duval, 2008, p.11).

Moreno-Armella, Hegedus y Kaput (2008) establecen que la generalización y la simbolización son partes centrales del razonamiento matemático que se encuentran asociadas de manera muy cercana. Para realizar una generalización, esto es, para conformar un enunciado que se aplica a múltiples situaciones, podemos tratar de encontrar un tipo de expresión que unifica, como si todas las situaciones fuesen una sola cosa. Pero esta expresión unificadora requiere cierto tipo de estructura simbólica, una forma de unificar la multiplicidad; en este sentido, la simbolización sirve a la generalización.

Usar la tecnología para provocar el surgimiento de generalizaciones lleva a considerar la posibilidad de transformar el conocimiento matemático. Noss y Hoyles (2004) han estado trabajando con esta cuestión buscando nuevas herramientas teóricas y metodológicas para dar luz sobre los procesos de aprendizaje relacionados con la integración de tecnología. Ellos establecen la *abstracción situada* como la forma de referir el acto por el cual una comunidad de estudiantes puede desarrollar un discurso común y coincidir con su profesor en que están hablando de las mismas abstracciones matemáticas. Este acto da cierta legitimidad matemática a las expresiones de los estudiantes, "incluso si difieren sustancialmente del discurso matemático tradicional" (Noss y Hoyles, 2004, p. 2).

Moreno-Armella y Sriraman (2005) discuten la necesidad de concebir nuevas formas de pensar en los significados de los estudiantes. Los estudiantes están tan familiarizados con las herramientas computacionales que eventualmente la exploración, utilizando el recurso, les permite reorganizar estrategias para resolver problemas. Primero pueden hacer algunas observaciones situadas dentro del ambiente computacional al realizar cierta exploración, y aquí la palabra "situado" señala el rol del ambiente que incluye la herramienta computacional y la actividad realizada. Las observaciones pueden referirse a cierta propiedad o resultado que está siendo expresado a través de la herramienta tecnológica, donde el ambiente facilitó su identificación. Esto es lo que conforma una *prueba situada*, el resultado de una exploración sistemática que se realiza con propósito dentro de un ambiente computacional con el fin de "probar" relaciones matemáticas.

3. MÉTODO

La experiencia didáctica que aquí se describe, tuvo lugar en un curso de introducción al Cálculo en el Tecnológico de Monterrey, Campus Monterrey. La población participante constó de 32 estudiantes de diferentes carreras. El aula en la que se desarrolló esta experiencia, cuenta con infraestructura tecnológica entre la que destacamos una computadora, pantalla de proyección, software con capacidades de conectividad y una hoja de trabajo para cada estudiante que sirvió como apoyo para la realización de la actividad y el establecimiento de generalizaciones. Cada estudiante trabaja en su propia laptop y la conectividad se realiza a través de la red inalámbrica.

Tomamos la decisión de priorizar la representación gráfica como una guía didáctica hacia el desarrollo de los procesos de conversión, dedicados a interpretar información en diferentes contextos. A través de esta actividad, los estudiantes establecieron la relación entre gráficas de posición y velocidad siendo esta última quien dictó el comportamiento de la primera. A su vez, la interpretación de cada una de estas gráficas fue útil para describir la simulación del movimiento del personaje animado que éstas representaron. A continuación, se describe de manera sucinta, una trayectoria de cinco eventos didácticos desarrollados en el aula, que permitieron el establecimiento de generalizaciones sobre las relaciones cualitativas de las gráficas de posición y velocidad; pero a través de un medio que proporcionó una forma cualitativamente diferente de acceder a estas nociones. Cabe aclarar que en el aula buscamos agotar los casos posibles que describen la situación de movimiento en cuestión, pero en este escrito sólo mencionamos alguno que nos ayude a exponer la forma en la que arribamos a las diferentes generalizaciones.

Primera escena: Movimiento con velocidad constante. Haciendo uso de una primera actividad diseñada en el ambiente de SimCalc, los estudiantes identificaron una gráfica de velocidad constante con una línea horizontal; la funcionalidad de arrastre (*dragging*) dentro de este ambiente sobre la gráfica de velocidad, reaccionó con una correspondiente gráfica de posición

(una línea recta) cuya pendiente se redibujaba a consecuencia de la acción del *dragging* por parte de los estudiantes. La relevancia del personaje animado fue el proporcionar un significado a los ejes involucrados, especialmente al eje horizontal que resulta simulado por el movimiento continuo de una línea vertical en ambas gráficas, evocando así la variación del tiempo. La Figura 1 muestra dos pantallas de SimCalc que representan movimientos con velocidad constante, positiva y negativa respectivamente.

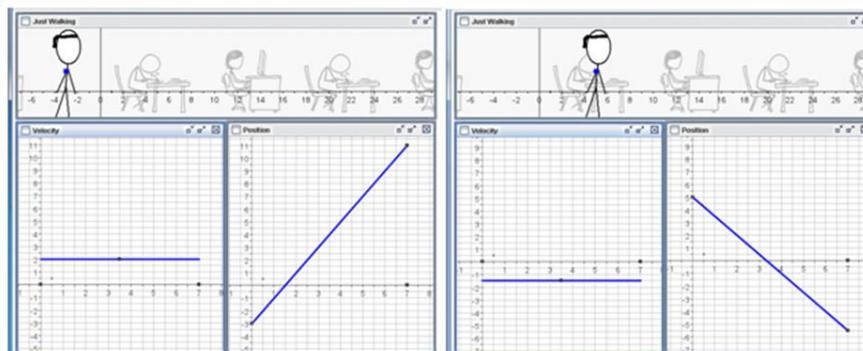


Figura 1. Ambiente de SimCalc con gráficas de velocidad constante.

El arrastrar el segmento horizontal, que representa la gráfica de velocidad, hacia arriba o hacia abajo permite asignar diferentes valores de velocidad constante. De manera que, mediante la exploración guiada dentro del ambiente del software, se promovió una abstracción situada que establece que el movimiento del personaje hacia la derecha corresponde con velocidad positiva y por ende con una gráfica de posición creciente. Análogamente, el movimiento hacia la izquierda corresponde con velocidad negativa y una gráfica de posición decreciente. Este tipo de exploración guiada con el software, posibilitó e invitó a los estudiantes a mover el personaje a diferentes posiciones y observar qué cambios se produjeron en las gráficas. Así, la infraestructura y ejecutabilidad del software permitió “demostrar” la asociación de diferentes gráficas de posición para la misma gráfica de velocidad constante, sólo cambiando la posición inicial del movimiento. También es significativo señalar que los estudiantes reconocieron que al hacer que la gráfica de velocidad tomara diferentes valores positivos cada vez mayores, observaron los cambios correspondientes en la pendiente de las gráficas de posición e interpretaron que el movimiento sucesivo del personaje se realizaba cada vez más rápido.

Segunda escena: Movimiento con velocidad constante por intervalos. Una vez que el movimiento con velocidad constante fue familiar a los estudiantes así como su correspondiente gráfica de posición y la interpretación del movimiento asociado, SimCalc permitió introducir un movimiento que mantiene velocidad constante (en un inicio positiva) para diferentes intervalos, como una función escalonada. Para ello se construyeron diferentes segmentos horizontales para la función velocidad en intervalos contiguos.

Cuando analizamos la gráfica de posición, pudimos observar que el crecimiento de dicha gráfica está en correspondencia con la velocidad positiva así como el crecimiento de la velocidad está ligado a la concavidad hacia arriba para la gráfica de posición. La interpretación del movimiento ha sido explorada en conjunto, reconociendo que se trata de un movimiento hacia la derecha cada vez más rápido. Buscamos así que los estudiantes pudieran interpretar el movimiento ya sea observando la gráfica de la velocidad o bien la de la posición. La actividad continuó cuestionando a los estudiantes sobre la producción de diferentes situaciones, movimiento aún hacia la derecha

pero cada vez más lento o bien hacia la izquierda cada vez más rápido o cada vez más lento. Una vez que los estudiantes finalizaron esta actividad, enviaron sus imágenes a la pantalla de proyección compartida a través de la conectividad del software para hacer un análisis colectivo. Aún cuando estos hechos fueron motivados con funciones escalonadas con velocidad constante, la intervención del profesor ofreció la oportunidad de lidiar con el cálculo de procesos infinitos. Como paso final de esta escena, el profesor invitó a los estudiantes a pensar en una gráfica lineal de velocidad como el límite de las funciones escalón donde los intervalos de tiempo considerados fueran cada vez más y más pequeños. De esta manera se propuso pensar en la gráfica escalonada de velocidad como prácticamente una línea recta, al hacer cada vez más pequeños los escalones, y de este modo, la gráfica de posición se percibió como una curva en lugar de una poligonal conectada por segmentos lineales con distantes pendientes. La Figura 2, mostrada en seguida, ayuda a explicar mejor esta situación.

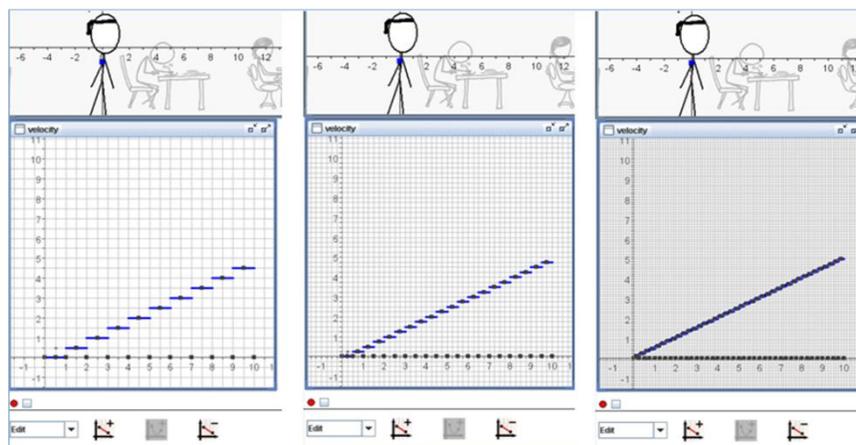


Figura 2. Secuencia de ambientes de SimCalc que invitan a considerar la gráfica de velocidad como una línea recta, al hacer los intervalos de velocidad constante cada vez más pequeños.

Tercera escena: Generando cuatro casos con velocidad lineal. Una vez que fue discutida la percepción visual de “suavidad” de la gráfica de posición, la nueva actividad consistió en ofrecer a los estudiantes un nuevo documento de SimCalc donde el personaje se mueve con una velocidad que varía de acuerdo con un modelo lineal. Se les entregó a los estudiantes una hoja de trabajo donde debían dibujar los escenarios que se producían en el ambiente de SimCalc, mediante una exploración que atendía a ciertas características expresadas en lenguaje natural. Ahora fue posible cambiar la pendiente de la gráfica de velocidad de nuevo mediante la función *dragging* y observar el proceso de coacción que se gesta entre los usuarios y el ambiente del software. De nuevo se empleó el software de conectividad para recuperar las diferentes imágenes que los estudiantes produjeron y que cumplían con el mismo objetivo. Los estudiantes se convencieron de las diferentes soluciones válidas para la descripción de un movimiento, en particular al observar las simulaciones de movimiento del personaje que cumplían con las características solicitadas.

El nuevo resultado fue el establecimiento de las relaciones de valores positivos (negativos) en el gráfico de velocidad en correspondencia con un comportamiento creciente (decreciente) para la posición. También se establecieron las condiciones vinculadas con el comportamiento creciente o decreciente del gráfico de velocidad en correspondencia con la concavidad hacia arriba o hacia abajo para la gráfica de posición. Con apoyo del ambiente de SimCalc, los estudiantes interpretaron el movimiento realizado hacia la derecha o bien hacia la izquierda, cada vez más

rápido o cada vez más lento. Después de analizar los cuatro tipos de movimiento, pudimos finalmente establecer las dos condiciones de la velocidad que permiten reconocer el tipo de movimiento según los casos: derecha cada vez más rápido, derecha cada vez más lento, izquierda cada vez más rápido, e izquierda cada vez más lento.

Cuarta escena: Combinando las generalizaciones para lograr el retorno. Esta escena, fue el momento de hacer que el personaje animado se regresara al sentido inicial del movimiento, por lo que los estudiantes debieron combinar dos de los cuatro casos presentados en la escena anterior. Para ello se les solicitó producir un movimiento del personaje, que inicie a la derecha pero cada vez más lento hasta detenerse y posteriormente continuar a la izquierda cada vez más rápido. También realizaron el otro caso posible. Fue así que a través de la interacción con SimCalc, observaron la simulación del movimiento del personaje y notaron que cuando la gráfica de la velocidad cruza el eje horizontal se ubica el instante en el que la velocidad es cero, correspondiente con el momento en el que el personaje cambia el sentido del movimiento, de derecha a izquierda o viceversa. De esta manera establecimos el reconocimiento de valores máximos y mínimos.

Realizar esta conexión con apoyo de la simulación, nos permitió establecer como resultado que el punto máximo en la gráfica de posición, que ocurre cuando ésta deja de crecer y comienza a decrecer, se relaciona con la gráfica de velocidad la cual muestra un cruce con el eje horizontal de valores positivos a negativos. Interactuando con SimCalc, la acción de trasladar el personaje horizontalmente en el escenario de movimiento, generó una traslación vertical sólo en la gráfica de posición, para satisfacer la condición de una posición inicial diferente del personaje; pero la gráfica de velocidad no fue modificada por el software ante esta acción. La coacción dentro del ambiente validó las condiciones del cambio de signo en la velocidad para obtener diferentes gráficas de posición con un valor máximo, pero siempre coincidiendo en el valor del tiempo en el que el personaje de la simulación cambió el sentido del movimiento. Hasta este momento identificamos las condiciones que deben cumplirse en la gráfica de la velocidad para garantizar la existencia de máximos y mínimos en la función posición. La Figura 3 nos ayuda a ejemplificar esta descripción.



Figura 3. Situaciones que presentan el regreso del personaje cuando su velocidad es cero.

Quinta escena: Vamos más allá. Esta última escena, fue en parte una evidencia de la manera en la que SimCalc impacta el aspecto motivacional del aprendizaje, pues atestiguamos momentos en los que los estudiantes se cuestionaban sobre nuevas posibles situaciones. “¿Qué pasaría si el personaje avanza cada más lento pero no regresa y decide continuar su movimiento cada vez más rápido? Para responder a esta pregunta fue necesario abrir nuevamente un documento previo y agregar un nuevo segmento de velocidad lineal para unirlo al que ya teníamos. Aunque estuvimos

conscientes de que realmente unimos movimientos con velocidad lineal, lo cual no es un caso general, este escenario nos presentó la oportunidad de arribar a resultados que permanecen válidos cuando la velocidad es representada por una gráfica continua y suave. De esta manera llegamos a la conclusión de que para tener un punto de inflexión en la gráfica de posición, su velocidad asociada debe cambiar su comportamiento, de crecimiento a decrecimiento o viceversa, lo que implica la existencia de un máximo o mínimo en la gráfica de la velocidad. Fue así como llegamos a la generalización de que los máximos y mínimos en la gráfica de velocidad nos informan los puntos de inflexión en la gráfica de posición y que los cruces con el eje horizontal en la velocidad se convierten en máximos y mínimos para la gráfica de posición.

Para concluir la actividad, entregamos a los estudiantes una hoja de trabajo en la que aparecía impresa una gráfica de posición representando el movimiento de una partícula que se mueve sobre una línea recta horizontal. Pedimos a los estudiantes reproducir el comportamiento de la velocidad de la partícula a través de su gráfica. Con esta actividad buscamos ofrecer un reto intelectual, puesto que en esta ocasión solicitamos realizar el razonamiento a partir del gráfico de posición, recordemos que anteriormente había sido la velocidad el punto de partida para construir la gráfica de posición. Así, los estudiantes tuvieron que interpretar el comportamiento del movimiento y relacionarlo con el comportamiento de la gráfica de velocidad. Una vez más recolectamos el trabajo de los estudiantes en la pantalla pública y discutimos sobre los diferentes acercamientos y posibilidades en la solución y de los elementos comunes.

Así, la imagen global de la última figura estuvo asociada al movimiento del personaje, y accionando la simulación una y otra vez, pudimos reafirmar generalizaciones, permitiendo reflexionar sobre el contenido matemático y el fenómeno en cuestión. De esta manera permitimos el surgimiento de respuestas a preguntas planteadas y a su vez, la generación de nuevas preguntas.

4. RESULTADOS

Esta experiencia didáctica fue muy provechosa en varios sentidos. Entre los principales logros podemos destacar, el proporcionar una vía accesible para presentar, probar y establecer la asociación de relaciones entre la gráfica de una magnitud y de su razón de cambio; hechos que se identifican como pruebas situadas en el sentido referido por Moreno-Armella y Sriraman (2005).

Pudimos trabajar con la representación gráfica de funciones a un nivel introductorio en un discurso del Cálculo. Propusimos la representación gráfica de funciones como la manera de interpretar globalmente el comportamiento de una magnitud que está cambiando.

A su vez, con apoyo de la simulación del movimiento, fue posible confrontar conflictos cognitivos asociados con la representación gráfica de una función, así como propiciar un ambiente para discutir las diferencias entre el lenguaje natural y científico (como el caso de velocidad y rapidez) o atribuir un significado a la presencia de números negativos en este contexto.

El ambiente de SimCalc apoyó el surgimiento de generalizaciones a partir de la experiencia de los estudiantes y proporcionó un medio para arribar a ideas importantes de la matemática. Aprovechamos la incorporación de la pantalla pública como un medio en el que fue posible compartir las contribuciones de los estudiantes, con la intención de discutir y reflexionar sobre posibles alternativas de solución o bien diferencias importantes que pueden o no ser válidas para

cumplir con la actividad. De la misma manera, empleamos este recurso como un lugar para emprender discursos matemáticos en los que todos pudimos participar, ya que la simulación permitió validar muchas de las propuestas expuestas.

5. CONCLUSIONES

Los aprendices visuales piden actividades visuales que los atraigan y con las que puedan interactuar. El software dinámico ofrece la oportunidad de ambos. SimCalc nos ha inspirado a fomentar la visualización en el proceso de aprendizaje del Cálculo. Este tipo de ambientes digitales ha puesto al alcance de los estudiantes un contenido que ofrece mayores posibilidades para interactuar y comprender.

El uso de SimCalc para el diseño de las actividades que compartimos en este trabajo, y la experiencia de llevarlo a cabo con los estudiantes en el aula, nos permite ofrecer un contenido organizado, donde ideas importantes pueden trabajarse de manera intuitiva y brindando un sentimiento de confianza al compartir los resultados. El contexto está acompañado de significados y en él se están reconociendo hechos que se establecen como relaciones cualitativas de una función con su derivada.

Una nueva forma de tratar con las gráficas, en ambientes dinámicos, como una herramienta común para el razonamiento matemático hace al salón de clase un escenario propicio para el aprendizaje visual. Podemos mencionar que trabajamos ante un medio dinámico que posibilita a los estudiantes el hacer emerger conjeturas, confrontar sus hipótesis y apoyar sus conclusiones.

El estudio de las estrategias algebraicas no fue la vía para acceder a la representación gráfica de funciones, que tradicionalmente forma la parte final de un curso de Cálculo; en lugar de ello, pudimos concebir a la gráfica de una función como una respuesta visual para representar el comportamiento de una magnitud que está cambiando.

6. REFERENCIAS

- Duval, R. (2006a). A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61, 103-131.
- Duval, R. (2006b). Un tema crucial en la educación matemática: la habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española* 9(1), 143-168.
- Duval, R. (2008). A crucial issue in mathematics education: The ability to change representation register. Regular Lecture. In Mogens Niss (Ed.), *Proceedings of the 10th International Congress on Mathematical Education* (pp. 1-17). IMFUFA, Department of Science, Systems and Models, Roskilde University, Denmark.
- Moreno-Armella, L., Hegedus S. y Kaput, J. (2008). From static to dynamic mathematics: historical and representational perspectives. *Educational Studies in Mathematics*, 68, 99-111.
- Moreno-Armella, L., y Sriraman, B. (2005). Structural stability and dynamic geometry: Some ideas on situated proofs. *ZDM The International Journal of Mathematics Education*, 37(3), 130-139.
- Noss, R., & Hoyles, C. (2004). *The technological presence: Shaping and shaped by learners*. Plenary Paper 10th International Congress on Mathematical Education. Retrieved 29 May, 2009 from <http://www.icme-organisers.dk/tsg15/Noss&Hoyles.pdf>