

ESTRATEGIAS DESARROLLADAS POR ESTUDIANTES DE BACHILLERATO EN EL CONTEXTO DE LA PRUEBA ENLACE



Julio Cesar Solache Ramírez, Rosa Margarita Díaz, Guadalupe Cabañas-Sánchez
jcsr1103@hotmail.com, rmdn11881@hotmail.com, cabanas.sanchez@gmail.com
Universidad Autónoma de Guerrero
Avance de investigación
Medio Superior

Resumen

El artículo reporta los avances de una investigación que caracteriza estrategias desarrolladas por estudiantes de un bachillerato general mientras resuelven problemas matemáticos de la prueba ENLACE. El estudio se sustenta de la aplicación de ocho problemas relativos al contenido de *Cantidad*, el reporte da cuenta del análisis de uno de ellos. A partir de la forma de proceder de los estudiantes ante un mismo problema, relativo al contenido de proporcionalidad directa, se reconoció un solo tipo de estrategia, la regla de tres, que de acuerdo a la categoría propuesta en Pastrana (2012), se ubica dentro de las *estrategias formales*. El análisis da cuenta además, que la cantidad de conocimiento que posee un estudiante, así como la calidad y diversidad de los conocimientos que fueron básicos para una adecuada interpretación, comprensión y resolución de un problema.

Palabras clave: *Estrategias, problemas matemáticos, prueba Enlace.*

1. INTRODUCCIÓN

En los últimos años, diversas investigaciones de carácter cognitivo han identificado y caracterizado las estrategias desarrolladas por niños y jóvenes mientras resuelven problemas matemáticos (e.g. Kospentaris, Spyrou & Lappas, 2011; Mónaco & Aguirre, 1996; Morales, 2010; Olave, 2005). En una mayoría de estudios, el contexto de los problemas se ha ubicado principalmente en el ámbito de la matemática escolar, esto es, están asociados a los objetivos del currículum oficial. Sin duda su consideración ha sido importante, por su contribución en la comprensión del pensamiento matemático de los estudiantes. Mónaco y Aguirre (1996) por ejemplo, exploraron estrategias desarrolladas por estudiantes de secundaria en nuestro país, México, mientras resolvían problemas aritméticos y algebraicos. Caracterizaron dos tipos de estrategias, a las que llamaron reflexivas e irreflexivas. Las primeras, las entienden como aquellas que requieren de un proceso de análisis previo que le permita a quien resuelve un problema, asociar la vía de solución a factores estructurales; las segundas, las conciben como aquellas que responden a una forma de proceder automatizado.

Es así que identifican las estrategias siguientes: a) Tanteo inteligente, b) Significados, c) Opera con los números, d) Busca números cómodos, e) Procedimiento rutinario asociado a indicadores textuales, y; f) Palabras clave. Las dos primeras las ubican en las reflexivas y el resto, como irreflexivas. Otra caracterización de estrategias de este tipo, lo encontramos en Morales (2010), quien las explora con estudiantes de bachillerato mientras resuelven problemas algebraicos. Reporta, además de las estrategias b), c), e) y f) estudiadas por Mónaco y Aguirre (1996), las siguientes: 1) Tanteo no inteligente, 2) Trabajo hacia atrás, 3) Modelación y 4) Plantar la solución. Estas estrategias, excepto la 2, en palabras del autor, ya habían sido reportadas en otras investigaciones. Planteamos la hipótesis, que su uso está ligado a aspectos como el contexto de las situaciones, la experiencia que tienen con la matemática o bien, el nivel de profundidad de los estudios, por citar ejemplos. Esta hipótesis se confirma con la investigación de Olave (2005),

quien las exploró con estudiantes de un bachillerato diversificado en su país, Uruguay, mientras calculaban el área bajo una curva, un tema que aún no habían estudiado. Reconoció las estrategias siguientes: a) División de la región en figuras, b) Estimación visual, c) Uso de la expresión analítica, d) uso de particiones, e) Estimación de la medida, f) Acota-aproximar, g) Uso de la tangente, y; h) Imagen de área como fórmula.

La investigación da cuenta de estrategias distintas a las mencionadas renglones arriba y se presume que influye el contexto de la situación, así como la experiencia con el estudio del área bajo una curva que aún no había sido objeto de estudio, aun cuando pusieron en juego conocimiento previo. Pastrana (2012), además del contexto, reconoce al pensamiento matemático desarrollado por los estudiantes, a lo que sabe, la cantidad y calidad de lo que sabe. Ello, a partir de explorar estrategias en estudiantes matriculados en primer semestre de bachillerato, en el contexto de problemas matemáticos de la prueba PISA. Es así que reconoce estrategias como: comparación de magnitudes y de cambios a través de la variación, uso de fórmulas, uso de propiedades, uso de la regla de tres, uso de diagramas, estimación de medidas, lectura de gráficas, descomposición y recomposición de formas geométricas. Estas estrategias, se ubicaron según el tipo de problema (un detalle pormenorizado puede verse en Pastrana, 2012).

Es en el contexto de las estrategias que ubicamos nuestra investigación. Nos interesamos en explorarlas con estudiantes matriculados en un bachillerato, particularmente mientras resuelven problemas matemáticos planteados en la prueba ENLACE¹, la cual se aplica en este nivel educativo a estudiantes mexicanos que están por concluirlo, a fin de “conocer el rendimiento académico de los alumnos y, al mismo tiempo, explorar los factores de su contexto, para emitir juicios de valor sobre este aspecto del Sistema Educativo Nacional” (INEE, 2012). Por ello las situaciones que se plantean toman como base el currículo. Sin embargo, es bien sabido que los resultados de esta prueba, han quedado hasta ahora, a nivel de comparar datos y por supuesto en la emisión de juicios acerca de lo que hacen o dejan de hacer los alumnos sin profundizar en lo que saben y sus entendimientos.

Como profesores de matemáticas de bachillerato, los dos primeros autores nos interesamos en profundizar en estos resultados, a fin de comprender mejor qué hacen los estudiantes en ese proceso y por qué lo hacen y como fin último, proponer intervenciones didácticas. Para ello, nos planteamos como problema de investigación, analizar qué tipo de situaciones se plantean en la prueba ENLACE, en qué contexto se ubican y cuáles son los procesos que desarrollan los estudiantes que participan en ella mientras las resuelven. Para llevar adelante este trabajo, nos planteamos dos objetivos: a) Analizar, desde la perspectiva de la prueba ENLACE, qué procesos deben desarrollar los estudiantes mientras resuelven los problemas matemáticos, y; b) Caracterizar las estrategias que desarrollan estudiantes de bachillerato mientras resuelven problemas matemáticos de la prueba ENLACE. El artículo ofrecerá datos de los avances relativos a las estrategias.

2. ASPECTOS TEÓRICOS Y METODOLÓGICOS

¹ Evaluación Nacional del Logro Académico de los Centros Escolares (INEE, 2012).

a) *Orientación teórica*

Los conceptos de problema y de estrategia son fundamentales en nuestra investigación. Por problema, entenderemos en el sentido de Polya (1965), quien lo define como “*buscar conscientemente alguna acción apropiada para lograr una meta claramente concebida pero no inmediata de alcanzar*”. Polya (1965) destaca a su vez, tres componentes de un problema: a) Estar consciente de una dificultad; b) tener deseos de resolverla; c) la no existencia de un camino inmediato para resolverlo. En el proceso de resolución de un problema, destaca cuatro fases: 1) Comprender el problema, 2) Concebir un plan, 3) Ejecución del plan, y; 4) Visión retrospectiva (revisión del problema y su solución). Estos aspectos son básicos en el proceso de exploración que llevamos a cabo, pues contribuyen en la comprensión de su forma de proceder así como de lo que sabe.

Por cuanto al concepto de estrategia, lo entendemos en el sentido de Escoriza (2003), quien sostiene que son procedimientos intencionales, deliberados, propositivos y cuya ejecución requiere control (regulación y evaluación) sistemático y continuado durante el proceso. Escoriza distingue además, que las características de un lector ante la resolución de un problema, consisten de: a) La *cantidad* de conocimiento que posee; b) la *calidad* de lo que sabe, y; c) la *diversidad* de los conocimientos previos que posee. Estas características se conciben fundamentales para una adecuada interpretación, comprensión y resolución de un problema.

b) *Caracterización de estrategias*

Por cuanto a la caracterización de las estrategias que emergieron de las acciones realizadas por los estudiantes en el proceso de resolución de los problemas, se atendió a la caracterización de Pastrana (2012) quien las distingue como *formales* e *informales*.

- *Estrategias formales*: Es el conjunto de procedimientos orientados hacia la obtención de la solución de problemas en donde se utilizan conceptos sobre objetos, relaciones y operaciones, así como de proposiciones y propiedades matemáticas.
- *Estrategias informales*: Es el conjunto de procedimientos orientados hacia la obtención de la solución de problemas en donde se realizan transformaciones sobre la base de descomposiciones y recomposiciones de formas geométricas (cortar y pegar), estimaciones visuales y aproximaciones de medidas.

El tipo de estrategia se caracteriza atendiendo al tipo de problema, así como a la forma de proceder de los estudiantes en el proceso de resolución. En el caso del problema que discute este artículo, se ubica en el contexto algebraico, consecuentemente, las transformaciones geométricas que reconoce Pastrana (2012) en su caracterización, se articulan al contexto geométrico.

c) *Método*

Nuestra investigación es de tipo cualitativo con carácter descriptivo. Su desarrollo considera las acciones siguientes: a) La selección de una muestra de estudiantes que estén por concluir su etapa de formación académica en el bachillerato, b) La selección de los problemas del contenido matemático *Cantidad* de la prueba ENLACE 2011, c) La aplicación de los problemas seleccionados, y; d) El análisis, identificación y caracterización de las estrategias desarrolladas por los participantes en el proceso de resolución de los problemas.

c.1) *La selección de la muestra*

Participaron de manera voluntaria 28 estudiantes, matriculados en el sexto semestre de un bachillerato general. La elección de la población de este semestre, atendió a una de las exigencias de la prueba ENLACE, esto es, de quienes están por concluir sus estudios en esta etapa de su vida escolar, el bachillerato.

c.2) *Los problemas y su aplicación*

De los 20 problemas correspondientes al contenido matemático *Cantidad* de la prueba ENLACE 2011 fueron seleccionados 8 y presentados a los estudiantes en un ambiente de lápiz y papel. Este tipo de problemas están planteados a través de un enunciado, acompañados muchas veces de figuras, gráficas, tablas, etc. Las preguntas planteadas en los problemas, son de las denominadas preguntas cortas. Los problemas fueron resueltos de manera individual por los participantes, en un tiempo promedio de 135 minutos dividida en tres sesiones de 45 minutos cada una, en la primera sesión resolvieron dos problemas, en la segunda tres y tercera tres.

d) *Las estrategias y su caracterización*

Las estrategias se identificaron a partir del análisis de las explicaciones escritas presentadas por los estudiantes, en el proceso de resolución de los problemas planteados. Los aspectos que consideramos para llevar a cabo este análisis fueron: a) Qué conocimientos usa, cómo los usa y los relaciona con los datos y exigencias del problema, y; b) Qué sabe el estudiante acerca del tema que trata el problema, la cantidad y variedad de lo que sabe. Asimismo, las fases que Polya señala, se siguen en el proceso de resolución de problemas.

A partir de estos aspectos, se reconoció si las forma de proceder de los estudiantes en la resolución de problemas, se sustenta de conceptos sobre objetos, relaciones y operaciones, así como de proposiciones y propiedades matemáticas o bien, de estimaciones visuales y aproximaciones de medidas, según el tipo de problema resuelto.

3. PROCESOS COGNITIVOS ASOCIADOS AL PROCESO DE RESOLUCIÓN DE LOS PROBLEMAS

Desde la perspectiva de la prueba Enlace, se espera que en el proceso de resolución, los estudiantes pongan en juego tres procesos cognitivos siguientes:

- **Reproducción:** Consiste en aplicar conocimientos y procedimientos matemáticos a problemas directos, reconocer equivalencias, utilizar objetos y propiedades matemáticas, así como extraer información de representaciones numéricas, simbólicas y gráficas.
- **Conexión:** Este tipo de problemas plantean exigencias en su interpretación y requieren el reconocimiento de la técnica matemática a utilizar, con el fin de solucionar problemas que impliquen equivalencias, uso de propiedades matemáticas y empleo de representaciones numéricas, simbólicas y gráficas.
- **Reflexión:** Incluye problemas que NO son directos y se presentan a partir de situaciones complejas retomadas de la vida real en las que se utilice más de una forma de representación de información (textual, numérica, simbólica y gráfica). Los problemas de este tipo plantean exigencias en su interpretación y requieren que el sustentante reconozca

la técnica matemática que hay que utilizar, establezca relaciones, combine e integre información entre distintas formas de representación o entre diferentes aspectos de una situación y utilice más de un paso o proceso, con el fin de solucionar un problema.

Este tipo de procesos fueron considerados en el planteamiento de los problemas de la prueba ENLACE 2011. De modo que un problema y su resolución, puede considerar uno o más de estos procesos. Si bien el estudio se aleja del interés por caracterizarlos, se mencionan con el fin de distinguir si se trata de una situación rutinaria (ubicado como proceso cognitivo de reproducción por ejemplo) o con un nivel de complejidad mayor.

4. DISCUSIÓN Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

A continuación presentamos a manera de ejemplo el caso de dos estudiantes quienes resolvieron un problema de opción múltiple, relacionado con porcentajes. Es el siguiente:

Jorge pagó \$2,600 por una televisión que tenía un descuento del 25% ¿Cuánto costaba originalmente?

El problema no se resuelve de manera directa, pues se requiere que el resolutor establezca relaciones entre el todo (cantidad a determinar) con las partes (lo que pagó y lo que se descontó). En el proceso de resolución, debe establecer una relación de proporción entre los datos. De modo que los procesos cognitivos están asociados con la reproducción y la conexión. La reproducción, porque se parte del hecho que el estudiante conoce cómo representar el 25% o bien el 75% de cierta cantidad, así como realizar de forma adecuada operaciones aritméticas. La conexión, por que debe comprender que puede usar una regla de tres para determinar la cantidad pedida. De manera que se ponen en juego procedimientos considerados como rutinarios, ya estudiados en etapas previas de su formación escolar.

El Caso de Oscar:

a) ¿Cómo lo resolvió?

Oscar distingue a \$2600, la cantidad que pagó por el producto con la letra P y el descuento, con la letra D. Lo que se le pide, lo reconoce como precio original. Su estrategia consiste en determinar la cantidad de dinero que representa el descuento que se le hizo al televisor, es decir, el 25%. Para ello, se apoya de la regla de tres, como se muestra en la figura siguiente:

$P = \$2600$
 $D = 25\%$

$\$2600 \div 75\%$
 $\cdot X \leftarrow 25\%$

¿Original = ?

A partir de ello, determina que \$866.66 equivale al descuento en pesos. Para hallar el precio original, suma el descuento con la cantidad que pagó, como se muestra enseguida:

Handwritten calculation showing the sum of percentages and the addition of the discount to the amount paid:

$$25\% + 75\% = 100\%$$

$$866.66 + 2600 = \$3466.66$$

En su proceder, Oscar relaciona las partes con el todo (precio original)

b) *¿Cómo controla y valora el proceso de solución del problema?*

En Oscar, el control y valoración del proceso lo vislumbramos en tres momentos:

- 1) Al separar condiciones de las exigencias.
- 2) Al momento que decide determinar la cantidad en pesos, del descuento (25%)
- 3) Cuando relaciona partes con el todo y lo comprueba con las cantidades correspondientes. Es decir, 25% y 75% con el 100%.

Se percibe en Oscar que su control lo establece al sumar las partes para obtener el todo o precio total del producto. De acuerdo con su proceder Oscar las estrategias que usa en el proceso de solución, es la **regla de tres** y en seguida, la **relación que establece entre las partes y el todo**. Atendiendo a la categoría propuesta en Pastrana (2012), la estrategia que desarrolla este estudiante, se ubica dentro de las *formales*.

El caso de Mauricio

a) *¿Cómo resolvió el problema?*

En el proceso de resolución, Mauricio primero separa condiciones de exigencias, apoyándose de literales para representar los datos. De este modo, al precio que pagó por el producto lo llama P , al descuento D y k , como una constante, se entiende que de proporcionalidad ya que afirma que P es directamente proporcional a D , tal como se observa en sus explicaciones escritas.

Handwritten notes defining variables and stating a proportionality relationship:

$P = \text{precio}$
 $D = \text{descuento}$

"Si P es directamente Proporcional a D "

$$P = kD$$

Donde k es una constante

Una vez hecho esto, sustituye los datos en la expresión $P = kD$. No obstante, se observan algunos errores tanto al momento de sustituir los datos como en sus procedimientos. Aunque es

claro que obtiene la respuesta correcta del problema. En la figura siguiente se evidencian este hecho.

$$2600 = K 25 \therefore \frac{2600}{25} = K \therefore K = 34.66$$

$$P = (34.66)(25) = 866.66$$

El proceder de Mauricio lo lleva a determinar la cantidad de dinero que representa el descuento que se le hizo al televisor, es decir, el 25%. Lo que obtiene lo suma con lo que pagó ya con el descuento y de ese modo determina el costo original del producto.

$$\begin{array}{r} 2600 \\ + 866.66 \\ \hline 3466.66 \end{array}$$

b) *¿Cómo controla y valora el proceso de resolución?*

En Mauricio, el control y valoración del proceso lo vislumbramos en tres momentos:

- 1) Al separar condiciones de las exigencias.
- 2) Al momento que decide determinar la cantidad en pesos, del descuento (25%)
- 3) Cuando suma las partes para obtener el todo (precio original del producto)

Se percibe en Mauricio que su control lo establece al sumar las partes para obtener el precio original del producto. De acuerdo con su proceder, la estrategia que usa en el proceso de solución, es la **regla de tres**, independientemente de sus errores, así como **relacionar las partes con el todo**. Atendiendo a la categoría propuesta en Pastrana (2012), la estrategia que desarrolla este estudiante, se ubica dentro de las *formales*.

5. REFLEXIONES FINALES

Esta etapa del trabajo, da cuenta que los problemas planteados en la prueba ENLACE 2011, sin duda se articulan a los contenidos curriculares y que en el proceso de resolución, se ponen en juego la reproducción de conocimiento y la conexión. La reproducción, está asociada a procedimientos rutinarios, como las operaciones básicas, y la conexión, con el reconocimiento de una regla, en este caso la regla de tres. Esta regla de tres aparece como la estrategia que lleva a los estudiantes a determinar una respuesta, asimismo, la **relación que establecen entre las partes y el todo**. Esta última, como una forma de control de su proceso de resolución. Se observa

que en estos dos casos, los estudiantes resuelven procedimientos rutinarios, además que relacionan lo que saben con un problema considerado como de la vida real.

Atendiendo a la categoría propuesta en Pastrana (2012), la regla de tres, estrategia desarrollada por los dos estudiantes, forma parte de las *estrategias formales*. Entendemos que esta estrategia emerge, no solo por los conocimientos que ponen en juego los estudiantes en el proceso de resolución, sino también, por el tipo de problema, que se corresponde a un contenido de proporcionalidad directa.

Otro aspecto, tiene que ver con el método que desarrollamos en esta parte del estudio y tiene que ver que los datos provienen únicamente de explicaciones escritas. Una mejor comprensión de la problemática que estudiamos, se obtendrá a partir de entrevistas clínicas, a realizar en una etapa posterior.

6. REFERENCIAS

- Escoriza, J. (2003). *Estrategias de comprensión del discurso escrito expositivo*. España: Edicions Universitat, Pp. 15-17.
- INEE (2012). INEE: *Una década de evaluación 2002-2012*. Instituto Nacional de Evaluación de la Educación. México: INEE.
- Kospentaris, G. & Spyrou, P. & Lappas, D. Exploring students' strategies in area conservation geometrical tasks. *Educational Studies in Mathematics* 77(1), 105-127.
- Mónaco, B. & Aguirre, I. (1996). *Caracterización de algunas estrategias para resolver problemas aritméticos y algebraicos en el nivel medio básico*. Un estudio de casos. Tesis de maestría no publicada. México: Universidad Autónoma de Guerrero.
- Morales, R. (2010). *Estrategias de resolución de problemas matemáticos en el Nivel Medio Superior de la Universidad Autónoma de Guerrero*. Tesis de maestría no publicada. México: Universidad Autónoma de Guerrero.
- Olave, M. (2005). *Un estudio sobre las estrategias de los estudiantes de bachillerato al enfrentarse al cálculo del área bajo una curva*. Tesis de maestría no publicada. México: Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología del Instituto Politécnico Nacional.
- Pastrana, F. (2012). *Estrategias desarrolladas por estudiantes de nivel medio superior al resolver problemas matemáticos de la prueba PISA*. (Tesis inédita de maestría). Universidad Autónoma de Guerrero. México.
- Polya, G. (1965). *¿Cómo plantear y resolver problemas?* México: Editorial Trillas.