

DISEÑO DE UN MARCO DE INVESTIGACIÓN APLICACIÓN AL PROCESO DE APRENDIZAJE DE LAS PROPIEDADES GLOBALES DE LAS FUNCIONES

Cristina Pecharromán, IES Valverde de Lucerna. Puebla de Sanabria (Zamora)

Tomás Ortega, Universidad de Valladolid

RESUMEN

La investigación que se presenta trata el análisis del aprendizaje de las propiedades globales de las funciones y la elaboración de un diseño de enseñanza que pretende facilitar el aprendizaje de estos contenidos. Este diseño se elabora siguiendo un marco de investigación que integra el marco teórico que proporciona el Enfoque Lógico Semiótico (ELOS) con un marco metodológico de investigación cualitativa, basado en la investigación-acción (I-A) y la investigación de diseño.

ABSTRACT

The research presents the analysis of learning comes from the global properties of functions and the development of a design education that aims to facilitate the learning of such content. This design was developed following a research framework that integrates the theoretical framework that provides the Logical Semiotic Approach with a methodological framework of qualitative research, based on action research and research design. Finally, this framework is applied to learning the concept of extremes.

Pecharromán, C., Ortega, T. (2009). Diseño de un marco de investigación. Aplicación al proceso de aprendizaje de las propiedades globales de las funciones. En M.J. González, M.T. González & J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 367-378). Santander: SEIEM.

INTRODUCCIÓN

Este artículo presenta un marco de investigación que surge del desarrollo experimental de un trabajo dirigido a la mejora del proceso de enseñanza-aprendizaje de las propiedades globales de las funciones a partir de su representación gráfica, (dominio, recorrido, monotonía, extremos, corte con ejes, signo, continuidad, tendencia, periodicidad, simetrías convexidad), en segundo ciclo de E.S.O.

El estudio local de las propiedades de las funciones se realiza desde la perspectiva infinitesimal aplicando los conceptos de límite y derivada. Sin embargo, se puede hacer un estudio más general de las propiedades de las funciones sin utilizar estos conceptos y, en oposición a “local”, surge el término “global”. Aquí se ha creado un diseño de enseñanza que parte del análisis cualitativo de sus gráficas y, bajo el cual, se integra el marco teórico y el metodológico de la investigación, donde éste último, recoge los rasgos de las metodologías cualitativas de I-A y de diseño.

ANTECEDENTES

Han sido diversos los trabajos de investigación que son referentes del nuestro, como el de Leinhardt y otros (1990), donde se realiza una labor de revisión y análisis de las funciones y de los gráficos desde los enfoques de las tareas, del aprendizaje y de la enseñanza. Sin embargo, aquí sólo exponemos brevemente las ideas que han orientado los planteamientos y el desarrollo de un diseño de enseñanza, en torno al cual, se desarrolla la investigación que se presenta.

- Se resalta la importancia del sistema de representación gráfico como medio de expresión de objetos matemáticos, por tanto, como medio de aprendizaje de ciertos conceptos asociados a él, lo que destaca la función semiótica de este lenguaje (Deulofeu, 1995; Bloch, 2003; Sanz Lerma 2004).
- Se observa la predisposición a desarrollar procesos de visualización para alcanzar diferentes objetivos dentro del proceso de aprendizaje de las matemáticas (Castro y Castro, 1997; Bagni, 2004; Dolores, 2004; Dolores y Cuevas, 2007).
- Se señala la importancia del uso de las diferentes representaciones de los conceptos para su aprendizaje y la relevancia de conocer las relaciones entre las mismas (Azcárate, 1997; Castro y Castro, 1997; Knuth, 2000; Bloch, 2003; Schwarz y Dreyfus, 1995; Duval, 1993; Duval, 1998; Bagni, 2004).
- Se considera que el aprendizaje de los conceptos debe partir del conocimiento de los alumnos (Azcárate, 1995) o de sus intuiciones (Deulofeu, 1995).
- Se indica que el dominio del sistema de representación formal debe considerarse más un objetivo del proceso de aprendizaje que un medio para el desarrollo de este proceso (Azcárate, 1997; Socas, 2008).

Estas consideraciones orientan un diseño de enseñanza de las propiedades globales de las funciones que pretende facilitar y mejorar el aprendizaje significativo de estos contenidos. Por una parte, se considera que el aprendizaje de los símbolos nuevos debe partir del conocimiento de los alumnos y, por otra parte, este aprendizaje se fundamenta en la relaciones entre los sistemas de representación de los conceptos. Además, estas ideas refuerzan nuestro interés por utilizar el sistema de representación gráfico como medio para iniciar el aprendizaje de estos conceptos, porque creemos que favorece su intuición, su interpretación y su comprensión, y a partir de ésta, se alcanzan la representación numérica y algebraica.

CREACIÓN DEL MARCO DE INVESTIGACIÓN

Este marco de investigación integra un marco teórico y un marco metodológico a través de los sucesivos refinamientos de un diseño de enseñanza, orientados a mejorar el aprendizaje de los alumnos.

El marco teórico ELOS (Socas, 2007) está definido mediante la elaboración de modelos de competencia teóricos y prácticos. Nuestro interés se centra en el Modelo de Competencia Cognitivo, que describe la comprensión de los conceptos desde el punto de vista de las relaciones entre los elementos del modelo: los sistemas de representación semióticos (SRS), los estadios de desarrollo cognitivo de los SR, y las dificultades de aprendizaje. En concreto, el marco ELOS propone un desarrollo cognitivo de los SR de los conceptos estructurado por estadios (semiótico, estructural y autónomo), de manera que los aprendizajes que se alcanzan en cada estadio fundamentan los aprendizajes del estadio siguiente, y donde la caracterización de estos estadios se concreta a través de acciones de aprendizaje sobre las representaciones de los conceptos:

- Semiótico: Los signos nuevos adquieren significado y se definen a partir de los antiguos ya conocidos. Se reconocen los elementos de un SRS en relación con el objeto matemático.
- Estructural: La organización del sistema antiguo contribuye a estructurar el sistema nuevo de símbolos. Se realizan transformaciones en el anterior SRS y conversiones entre SRS, en las que hay un sistema que el alumno controla y facilita la conversión al otro.
- Autónomo: El sistema nuevo de símbolos adquiere significado en sí mismo. Se dominan diversos SRS para significar el objeto (al menos dos), y se coordinan de forma espontánea.

En definitiva, para el autor, que sigue el modelo de coordinación de registros de Duval (1993, p. 35), la adquisición de los conceptos matemáticos se dará en el momento que haya una coordinación, libre de contradicciones, entre las diferentes representaciones del objeto matemático, coordinaciones que tendrán lugar en el estadio autónomo.

Este modelo permite describir el proceso de aprendizaje significativo de los conceptos a través de sus representaciones. Por tanto, teniendo en cuenta las consideraciones que en él se plantean, pretendemos elaborar un diseño de enseñanza estructurado y orientado por estos estadios de desarrollo, que evoluciona a través de las representaciones de los conceptos y sus relaciones, y que tiene en cuenta las dificultades que se han observado en el aprendizaje de los conceptos en cada ciclo de investigación.

La investigación se desarrolla bajo un marco metodológico que integra las metodologías cualitativas de I-A y de diseño. El carácter de la metodología de investigación-acción la orientan los estudios de diversos autores: Kemmis y McTaggar (1988), Hopkins (1989), Elliot (1990) y Pérez (1994). En nuestro caso, se ha seguido una espiral de tres ciclos de planificación-acción-análisis-reflexión. En la fase de planificación, se ha abordado un análisis curricular, se ha valorado el sistema antiguo de los alumnos, y se han elaborado herramientas de observación. En la acción se ha centrado en el desarrollo de la docencia y su observación, respetando el proceso educativo del grupo de alumnos. La fase de análisis, valora el aprendizaje de los alumnos a partir de la interpretación de los datos obtenidos. Y, por último, las actuaciones realizadas a lo largo de cada ciclo orientan reflexiones que se tienen en

cuenta para la siguiente planificación. Por otra parte, las diversas herramientas de información, (entrevistas, cuestionarios, cuaderno alumnos, informes observador externo, grabaciones y notas de campo), permiten la triangulación de diversas fuentes (profesor del ciclo 1, observador externo, profesores secundaria, alumnos, profesora investigadora y director de la investigación) con el fin de validar el proceso y los datos obtenidos.

También se puede considerar que ésta es una investigación de diseño, ya que, como señala Confrey (2006), en ella se ha producido una metodología que conduce y renueva los procesos de enseñanza y aprendizaje mejorando los resultados. Siguiendo a Cobb y Gravemeijer (2006), en la investigación se elabora un diseño de enseñanza que se utiliza como medio para el desarrollo de la investigación y permite un análisis retrospectivo. Según Collins et al (2004, p. 15), el término "*diseño de experimentos*" fue introducido para referirse a la investigación que pretende probar y perfeccionar diseños de enseñanza a partir de resultados de investigación previa.

Molina (2006, p. 261-293) hace una síntesis de las características de la *metodología de diseño* considerando diversos autores (Cobb et al, 2003; Barab y Squire, 2004; Collins et al, 2004; diSessa y Cobb, 2004) y señala siete especificidades que se pueden interpretar en términos del trabajo de investigación desarrollado:

1. Investigamos un proceso de enseñanza-aprendizaje concreto, lo que implica la consideración de un microsistema educativo particular con múltiples variables.
2. La investigación evoluciona en torno a sucesivos refinamientos de un diseño de enseñanza, que incorporan nuevos elementos y estrategias de enseñanza, que permiten mejorar este proceso.
3. La investigación surge en el aula al observar las dificultades de los alumnos para interpretar la gráfica de una función no contextualizada y expresarla en otros sistemas de representación, y promueve estrategias de enseñanza que permiten la mejora del aprendizaje de los alumnos.
4. Además del equipo investigador, han participado, el profesor que tuvieron los alumnos en cursos anteriores, otros profesores del departamento y un profesor que actuó como observador externo y analista.
5. Surge un marco de investigación de integración teórica-metodológica que modela el desarrollo experimental de este trabajo y que se pone de manifiesto en el proceso de elaboración y refinamiento de un diseño de enseñanza de unos conceptos matemáticos, siguiendo un proceso descriptivo y, por tanto, explicativo.
6. Se produce un refinamiento del diseño de enseñanza de los conceptos y del propio desarrollo experimental de la investigación derivado de la metodología de I-A, que orienta la reflexión sobre la práctica y la planificación a partir de la reflexión. Las hipótesis de investigación se han ido planteando o han evolucionado en el transcurso de la investigación.
7. Tanto la reflexión de cada ciclo como la reflexión final se fundamentan en análisis retrospectivos.

BASES DE LA DOCENCIA QUE PERMITE EL PASO DEL SISTEMA ANTIGUO AL SISTEMA NUEVO

Una visión general del desarrollo experimental de la investigación aparece en la Figura 1, que representa el paso del sistema antiguo al sistema nuevo de símbolos a través de la docencia en cada uno de los ciclos.

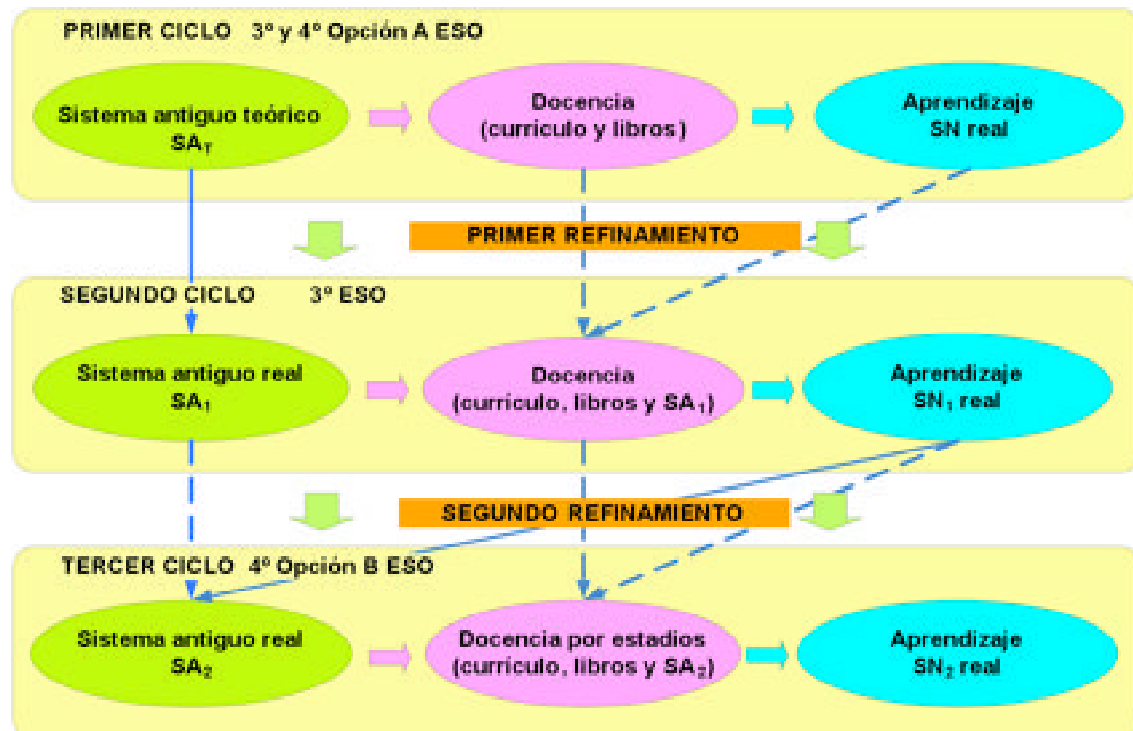


Figura 1. Ciclos de investigación, sistemas de signos y diseños de enseñanza.

Un análisis curricular de las propiedades globales de las funciones y los contenidos que fundamentan su aprendizaje permite determinar los sistemas de símbolos teóricos, antiguo y nuevo, que constituirán uno de los referentes de la docencia en los tres ciclos de la investigación.

En el primer ciclo, sólo se consideran los sistemas de símbolos teóricos, antiguo y nuevo, como referentes para fijar el punto de partida del aprendizaje y para el desarrollo de la docencia. Se advierte que este diseño de enseñanza da lugar a aprendizajes muy deficitarios, debido a que los alumnos no tienen adquirido el sistema antiguo teórico. Por tanto, se pone de manifiesto la necesidad de valorar y conocer el *sistema antiguo real* del grupo de alumnos, entendido como el *conocimiento que va a fundamentar el aprendizaje de los conceptos*. Nosotros señalamos la importancia de valorar el sistema antiguo de los alumnos, porque gran parte de la motivación por el aprendizaje radica en que éste enlace con el conocimiento del alumno, dotando al aprendizaje de un sentido de continuidad del conocimiento.

Se observa que el sistema antiguo real del grupo de alumnos está caracterizado por los siguientes aspectos:

- Fija un punto de partida del aprendizaje de los símbolos nuevos.

- Pone de manifiesto errores en el conocimiento de los símbolos del sistema antiguo que deben ser tenidos en cuenta en la docencia del sistema nuevo de símbolos.
- Cada alumno posee un sistema antiguo particular que no tiene por qué coincidir con el de sus compañeros, ni con el sistema antiguo teórico. Sin embargo, como la docencia que se desarrolla es grupal, para paliar las diferencias entre los alumnos, se plantea que la propia docencia retome el significado de los símbolos del sistema antiguo que, se ha visto, pertenecen a la mayoría de ellos.

En el segundo ciclo, tiene lugar el primer refinamiento del diseño de enseñanza. Se desarrolla una docencia que evoluciona y parte del sistema antiguo real observado en el grupo de alumnos, y está orientada por el currículo y libros de texto. Aunque se manifiesta una mejora del aprendizaje de los conceptos, se aprecian importantes errores y dificultades de aprendizaje, que llevan al planteamiento de un nuevo refinamiento del diseño de enseñanza, centrado en la propia docencia de los símbolos nuevos. En el primer y segundo ciclo, se han desarrollado docencias que abordan los diferentes sistemas de representación de los conceptos, pero no inciden en el hecho de explicitar las relaciones entre las mismas y tampoco se reflexiona sobre cuál es la progresión más adecuada para introducir las representaciones de los conceptos en función de la abstracción de sus símbolos.

En el tercer ciclo, se elabora un diseño de enseñanza que parte del sistema antiguo de los alumnos, pero además, está basado en el modelo de aprendizaje que propone el marco ELOS, y también tiene en cuenta las ideas de diversos autores y las reflexiones motivadas por las actuaciones de los dos primeros ciclos. Para la concreción del diseño, asociamos a cada estadio unos contenidos de aprendizaje, teniendo en cuenta la caracterización de estos estadios y los contenidos propios del nivel educativo en el que se desarrolla la docencia (4º Op. B). Algunos aspectos que describen globalmente este diseño de enseñanza son los siguientes:

- Fundamenta el aprendizaje de los símbolos nuevos en el significado de los símbolos antiguos, es decir, en los símbolos que constituyen el conocimiento de los alumnos.
- Está estructurado por los estadios de desarrollo que caracteriza el marco teórico ELOS, y actúa sobre las diversas representaciones, -verbal (V), gráfica (G), numérica (N) y algebraica (A)-, partiendo de las representaciones más cercanas al sistema antiguo hasta alcanzar aquellas de símbolos más abstractos.
- Unas acciones sobre las representaciones del concepto concretan el aprendizaje que se alcanza en cada estadio de desarrollo, -reconocimientos (R), transformaciones (T), conversiones (C□) y coordinaciones (C□)-.
- Se motiva una docencia orientada por las relaciones entre los símbolos, con el fin de evitar aprendizajes mecánicos y memorísticos. En concreto, se promueve el aprendizaje significativo por conversiones y coordinaciones entre las diferentes representaciones.
- Tiene en cuenta los errores y las dificultades de aprendizaje observadas en los ciclos de investigación, en el sentido de plantear estrategias de enseñanza que los aborden en el propio diseño.

Como se muestra en la Figura 2, se inicia el aprendizaje en el estadio semiótico, donde se alcanza el reconocimiento del concepto en la representación gráfica a partir del significado de los símbolos del sistema antiguo. En el estadio estructural, se producen transformaciones sobre la representación gráfica del concepto que facilitan la conversión al sistema de representación numérico, donde se llega a reconocer el concepto. La conversión recíproca y la coordinación entre las representaciones gráfica y numérica son menos intuitivas, porque la representación numérica aporta poca información sobre el carácter covariacional de los conceptos, por tanto, se alcanzan en el estadio autónomo. Por último, en este estadio, se alcanza el reconocimiento formal, por conversión desde la representación gráfica, pudiendo llegar a coordinar ambas representaciones. Para algunos conceptos, su reconocimiento formal permite identificarles en otras representaciones, como el algebraico particular o un reconocimiento numérico tabular y, aunque no se alcanza la correspondiente conversión recíproca, la representación de llegada refuerza el carácter del concepto en la representación de partida, la formal.

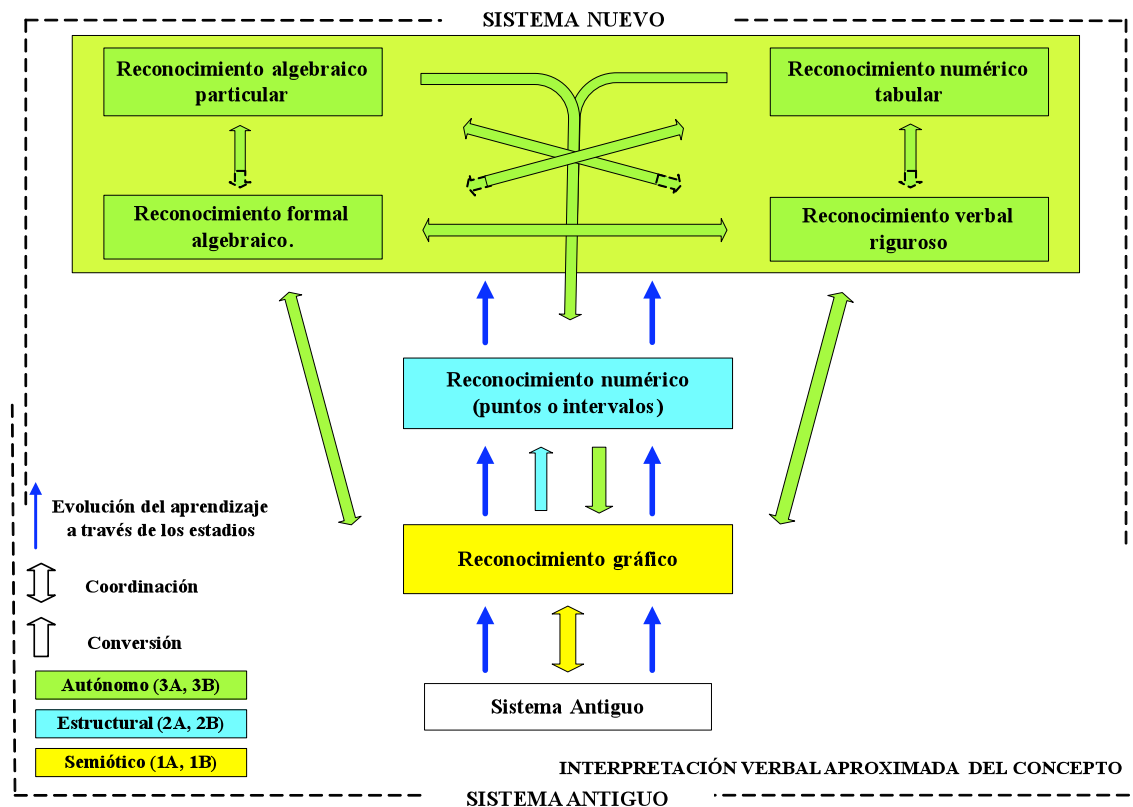


Figura 2. Evolución del aprendizaje de los conceptos por estadios y a través de sus representaciones.

Las diversas representaciones que se van adquiriendo a lo largo de todo el proceso de aprendizaje, en algunos casos, permiten independizar el concepto del soporte gráfico a partir del cual se ha iniciado su aprendizaje, y facilitan la adquisición del nuevo símbolo con significado propio, independiente de sus representaciones.

Se presenta el diseño de enseñanza de extremos, indicando las acciones de aprendizaje que tienen lugar en cada estadio de desarrollo y sendas producciones de los alumnos.

Máximos y mínimos

El significado de los términos máximo y mínimo es conocido por los alumnos y dotan al correspondiente concepto matemático de cierto carácter intuitivo, pero insuficiente para su correcto y completo aprendizaje a través de las diversas representaciones.

Sistema antiguo

Los símbolos del sistema antiguo que pudieran fundamentar directamente el aprendizaje del nuevo símbolo son los relativos al sistema de referencia cartesiano, el concepto de función y sus diversas representaciones, el significado de notaciones gráficas y numérico-simbólicas y su relación, y el significado del término “entorno”.

Estadio semiótico

Se distinguen y señalan sobre la gráfica los puntos que “sobresalen” -más altos o más bajos- en entornos de la gráfica. Estos son los máximos y mínimos de la gráfica, respectivamente. Las acciones de aprendizaje asociadas a este estadio son: $R_{V(Apr)}$, $C_{V(Apr)} \rightarrow G$, R_G , $C_G \rightarrow V(Apr)$, $C_G \leftrightarrow V(Apr)$. La Figura 3 ejemplifica la acción de reconocimiento gráfico y la Figura 4 está escaneada del cuaderno del alumno:

R_G: Reconocimiento gráfico en el estadio semiótico

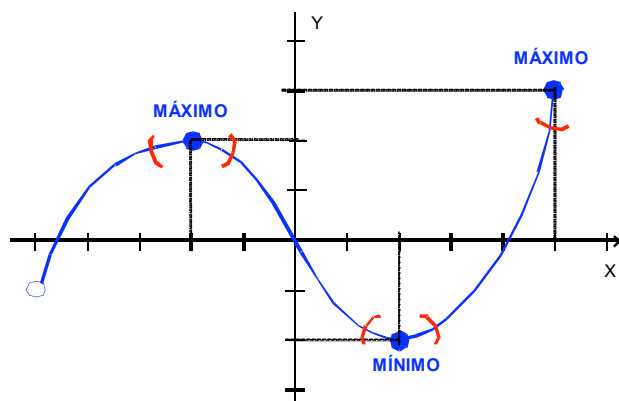


Figura 3. Acción de aprendizaje.

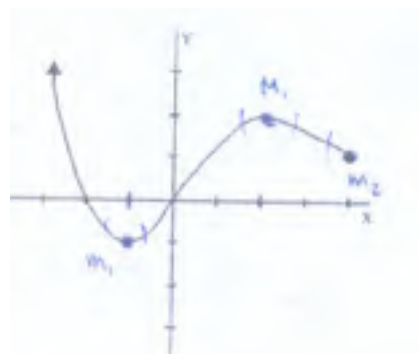


Figura 4. Reconocimiento gráfico.

Estadio estructural

Se obtiene la proyección del punto extremo sobre los ejes cartesianos (abscisa y ordenada), y se expresa esta información de forma numérica, es decir, se dan las coordenadas del punto extremo y se conoce su significado (ubicación, valor del extremo). La proyección del entorno encamina hacia la definición formal del concepto. Las acciones de aprendizaje asociadas a este estadio son: T_G , $C_G \rightarrow N(P)$, $R_{N(P)}$. La Figura 5 ejemplifica la acción de la transformación gráfica y la Figura 6 está escaneada del cuaderno del alumno:

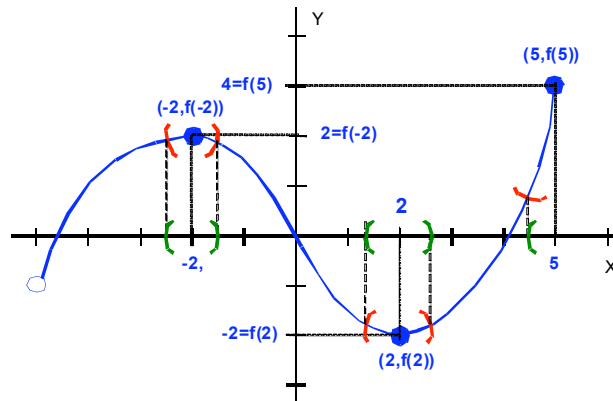
T_G: Transformación gráfica en el estadio estructural

Figura 5. Acción de aprendizaje.

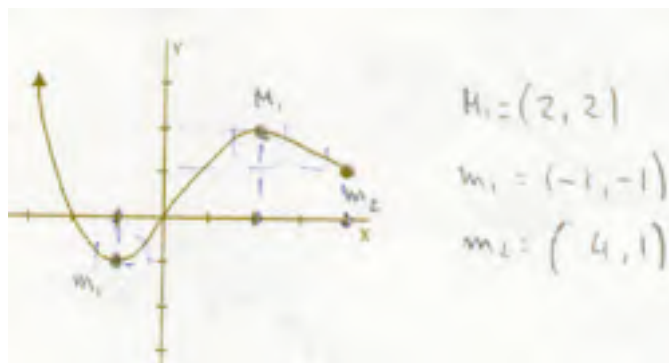


Figura 6. Conversión gráfico numérica.

Estadio autónomo

Se plantea llegar a coordinar las representaciones gráfica y numérica, y gráfica y formal (expresión algebraica universal o definición verbal rigurosa). El reconocimiento formal de este concepto permite interpretarlo en el sistema de representación numérico tabular de las funciones. Las acciones de aprendizaje propias de este estadio son las siguientes: $C_{N(P)} \rightarrow G$, $C_G \leftrightarrow N(P)$, $C_G \rightarrow V(\text{Rig})$, $R_{V(\text{Rig})}$, $C_G \rightarrow A(\text{Uni})$, $R_{A(\text{Uni})}$, $C_{V(\text{Rig})} \rightarrow G$, $C_G \leftrightarrow V(\text{Rig})$, $C_{A(\text{Uni})} \rightarrow G$, $C_G \leftrightarrow A(\text{Uni})$, $C_{V(\text{Rig})} \rightarrow A(\text{Uni})$, $C_{A(\text{Uni})} \rightarrow V(\text{Rig})$, $C_{V(\text{Rig})} \leftrightarrow A(\text{Uni})$, $C_{V(\text{Rig})} \rightarrow N(\text{Tab})$, $C_{A(\text{Uni})} \rightarrow N(\text{Tab})$, $R_{N(\text{Tab})}$. La Figura 7 ejemplifica la acción de conversión del sistema de representación gráfico al formal y la Figura 8 está escaneada del cuaderno del alumno. El simbolismo que se introduce sobre la gráfica facilita esta conversión:

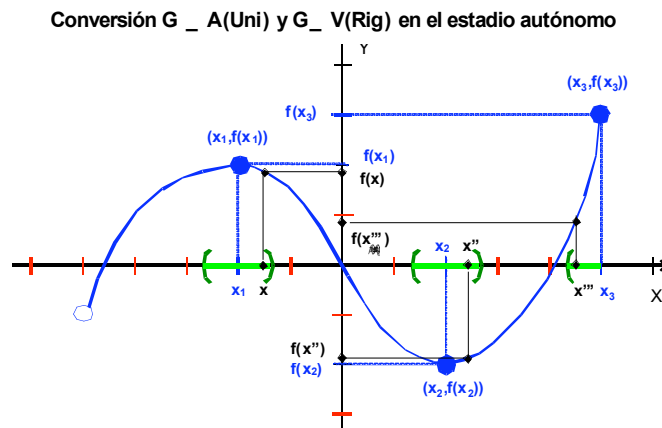


Figura 7. Acción de aprendizaje.



Figura 8. Coordinaciones gráfico numérico puntual y gráfico verbal

CONCLUSIONES

La investigación realizada manifiesta que el modelo de enseñanza basado en el marco ELOS permite alcanzar un aprendizaje de los conceptos más completo (sobre más representaciones), y más significativo (fundamentado en las relaciones-coordinaciones). Este diseño también va a permitir un minucioso análisis del aprendizaje, por estadios y por acciones.

Este trabajo experimental genera un marco teórico-metodológico de investigación. El marco teórico y los antecedentes orientan unos refinamientos del diseño del enseñanza, pero, éstos sólo son posibles a partir de la práctica reflexiva que se sucede en cada ciclo de la investigación, la cual tiene lugar cuando se unen docencia e investigación, aspectos que caracterizan a las metodologías de I-A y diseño.

BIBLIOGRAFÍA

- Azcárate, C. (1995). Sistemas de representación. *UNO Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 4, 13-20.
- Azcárate, C. (1997). Si el eje de ordenadas es vertical, ¿qué podemos decir de las alturas de un triángulo? *SUMA*, 25, 23-30.
- Bagni, G. T. (2004). Una experiencia didáctica sobre funciones en la escuela secundaria. *RELIME Revista Latinoamericana de Investigación en matemática Educativa*, 7, (1), 5-23.
- Barab, S. A., Squire, K. D. (2004). Design-Based Research. Putting Our Stake in the Ground. *Journal of the Learning Sciences*, 13(1), 1-14.
- Bloch, I. (2003). Teaching functions in a graphic milieu: what forms of knowledge enable students to conjecture and prove? *Educational studies in mathematics*, 52 (1), 3-28.
- Castro, E., Castro, E. (1997). Representaciones y modelización. En L. Rico (Coord.), *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria* (pp. 95-124). Barcelona: ICE de la Universidad Autónoma de Barcelona y Horsori.
- Cobb, P., Hodge, L. L. (2003). Design experiments in education research. *Educational Researcher*, 32 (1), 9-13.
- Cobb, P., Gravemeijer, K. (2006) Design research from the learning design perspective. En J. van den Akker, K. Gravemeijer, S. McKenney y N. Nieveen (Eds.), *Educational design research* (pp. 17-51). London: Routledge.
- Collins, A., Joseph, D., y Bielaczyc, K. (2004). Design Research: Theoretical and Methodological Issues. *Journal of the Learning Sciences*, 13(1), 15-42.
- Confrey, R. (2006). The evolution of design studies as methodology. En R. K. Sawyer (Ed.), *The Cambridge Handbook of the Learning Sciences* (pp. 135-152). Cambridge: Cambridge University Press.
- Deulofeu, J. (1995). Concepciones de los alumnos de secundaria sobre distintas gráficas de funciones. *UNO Revista de Didáctica de las matemáticas*, 4, 6-16.
- Disessa, A. A., Cobb, P. (2004). Ontological innovation and the role of theory in design experiments. *Journal of the Learning Sciences*, 13(1), 77-103.
- Dolores, C. (2004). Acerca del análisis de funciones a través de sus gráficas: concepciones alternativas de estudiantes de bachillerato. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 7 (3), 195-218.
- Dolores, C., Cuevas, I. (2007). Lectura e interpretación de gráficas socialmente compartidas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 10 (1), 69-96.
- Duval, R. (1993). *Sémiosis et Noésis*. Conférence A.P.M.E.P.I.R.E.M.
- Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa II* (pp. 173-201). Matemática Educativa del Cinvestav-IPN Grupo Editorial Iberoamericana.
- Elliot, J. (1990). *La investigación-acción en educación*. Madrid: Morata.

- Hopkins, D. (1989). *Investigación en el aula*. Barcelona: PPU.
- Kemmis, S., McTaggart, R. (1988). *Cómo planificar la investigación-acción*. Barcelona: Laertes.
- Knuth, E. (2000). Student understanding of the Cartesian connection: an exploratory study. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31 (4), 500-508.
- Leinhardt, G. et al (1990). Functions, graphs, and graphing: tasks, learning, and teaching. *Review of Educational Research*, 60 (1), 1-64.
- Molina, M. (2006). *Desarrollo de pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria*. Tesis doctoral. Universidad de Granada.
- Pérez, G. (1994). *Investigación cualitativa. Retos e interrogantes*. Madrid: La Muralla.
- Sanz Lerma, I. (2004). Expresiones gráficas del lenguaje matemático. *UNO Revista de Didáctica de las matemáticas*, 35, 9-22.
- Schwarz, B., Dreyfus, T. (1995). New actions upon old objects: a new ontological perspective on functions. *Educational Studies in Mathematics*, 29, 259-291.
- Socas, M. (2008). Dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas. Análisis desde el Enfoque Lógico Semiótico. En M. Camacho, P Flores, P. Bolea (Coords.), *Investigación en Educación Matemática XI* (pp.19-52). La Laguna: SEIEM.