

# DESDE LO SINTÉTICO A LO ANALÍTICO: UNA PROPUESTA PARA LA CONSTRUCCIÓN DE LA RECTA DE EULER.

Bonilla Barraza, D<sup>a</sup>. Díaz Pallauta, J<sup>b</sup>

Colegio Tamecura. Liceo Católico de Atacama.  
danielabonillab@gmail.com, jocelyndiazpallauta16@gmail.com

## Resumen

*La presente comunicación consiste en una propuesta didáctica que promueve la transición de una geometría sintética hacia una geometría analítica con el objetivo de caracterizar la recta de Euler. Para su diseño se utiliza elementos de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD).*

*Se describe una organización matemática que determina la ecuación cartesiana de la recta de Euler, con este fin, se generan tipos de tareas, donde se plantean diversas técnicas desde la construcción geométrica de los puntos notables en un triángulo (Circuncentro, Ortocentro y Baricentro) a las condiciones analíticas necesarias que dan origen a esta recta en el plano cartesiano.*

**Palabras claves:** *recta de Euler, tareas, construcciones geométricas.*

## ANTECEDENTES Y OBJETIVOS DE INVESTIGACIÓN

En el estudio que se presenta a continuación se considera fundamental la transición de una geometría sintética a una geometría analítica, pues en la enseñanza actual de la matemática se presenta un divorcio entre ambas perspectivas, sobre este fenómeno dan cuenta investigaciones como Gascón 2002, quien manifiesta que hay un desconocimiento de los nexos epistemológicos entre ambas geometrías.

En Chile, la recta, se encuentra presente a lo largo del curriculum escolar, se trata en los programas de estudio de enseñanza básica principalmente como una noción que permite definir ángulos entre rectas paralelas, teorema de Thales, entre otras. Posteriormente en secundaria (tercero año medio) los textos escolares introducen sus ecuaciones a partir de sistemas de ecuaciones de rectas o mediante el teorema de Thales, planteando actividades mayoritariamente analíticas como determinar ecuaciones de rectas dadas distintas condiciones, calcular pendientes y coeficiente de posición.

Abordando los puntos anteriores, la presente propuesta didáctica consiste en la introducción de las condiciones analíticas que describen una recta en el plano cartesiano en la enseñanza secundaria a partir de la construcción geométrica de la recta de Euler. Pues, la “existencia de una recta que pase por el circuncentro, baricentro y ortocentro de un triángulo cualquiera, permite el desarrollo de una geometría, que se bien se desliga de lo concreto, involucra una riqueza conceptual, analítica y procedimental” (Chávez & Parraguez, 2014, p 695).

Investigaciones como Bonilla & Díaz, 2014 dan cuenta de la importancia de la colinealidad de tres puntos como elemento significativo en el surgimiento de las ecuaciones de rectas, por lo tanto, se considera esencial argumentar sobre la colinealidad de los tres puntos notables que generan la recta de Euler.

Para este diseño se utiliza elementos de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) (Chevallard, 1999). Se entenderá como organización matemática, a un conjunto de tipos de tareas, de técnicas o procedimientos para resolver estas tareas y de definiciones, propiedades y teoremas que permitan describir y justificar la resolución de la tarea.

Para la aplicación y análisis de una propuesta, la TAD cuenta con una organización didáctica donde se distingue distintos momentos, entre ellos, el encuentro inicial con la organización matemática, exploración del tipo de tareas T, elaboración de una técnica, trabajo de la técnica e institucionalización.

### Descripción de la propuesta didáctica

Se describe una organización matemática que consiste en determinar la ecuación cartesiana de la recta de Euler en el plano, con este fin, el diseño plantea en un inicio el trabajo en una geometría sintética, construyendo en forma geométrica los puntos notables en un triángulo (Circuncentro, Ortocentro y Baricentro). Para luego desarrollar las mismas actividades en el plano cartesiano. La siguiente tabla resume la organización Matemática

Organización Matemática	Tipos de tareas	Técnicas
<i>determina la ecuación cartesiana de la recta de Euler</i>	$T_1$ : Determinar si tres puntos son colineales. (puntos notables)	1.-Unir los puntos con regla
		2.-encontrar relaciones de variaciones de ordenadas y abscisas.
		3.-encontrar una ecuación para la recta que pase por los tres puntos.
	$T_2$ : Determinar las condiciones de las coordenadas de un punto $M(x,y)$ para que este alineado con dos puntos distintos $Q$ y $R$ en el plano	1.-relacionar con las variaciones de abscisas y ordenadas.
2.-verificar que el punto $M(x,y)$ pertenezca a la recta que pasa por $Q$ y $R$ .		

### Ejemplo de actividades y análisis a priori.

Las actividades están dirigidas a estudiantes de los primeros niveles de secundaria (15-16 años) que han construido los elementos secundarios del triángulo, conocen el plano cartesiano y aún no han trabajado con ecuaciones y pendientes de rectas.

Actividad 1: *Dibuje un triángulo y realice la construcción de las transversales de gravedad (indique el baricentro(P)), las simetrales(indique el circuncentro(Q)), las alturas (indique el ortocentro(R)). (Use solo regla y compas). Repita el procedimiento para distintos triángulos, escriba una conjetura sobre la posición de los puntos P, Q y R.*

Actividad 2: *En el plano cartesiano dibuje un triángulo de vértices A (3,0) ; B ( 6,9) y C ( 6,-3), construya con regla y compas el ortocentro (R), baricentro (P)y circuncentro (Q). ¿Estos puntos P,Q y R son colineales? Elabore dos estrategias distintas para justificar su conjetura.*

Actividad 3: *El punto S ( 501,126) pertenece a la recta que pasa por P, Q y R. Justifique*

Actividad 4: *Escriba las condiciones para que un punto M(x,y) este alineado con los puntos Q y R.*

En la actividad 3, la técnica sintética pierde su alcance, lo que genera que el estudiante acuda, necesariamente, a elaborar técnicas analíticas logrando generalizarlas con la actividad 4, emergiendo de este modo elementos importantes para la organización matemática planteada, en este punto se destaca el rol del docente pues es el encargado de institucionalizar, definir lo que se entenderá por pendiente de rectas y su posterior ecuación.

## Resultados de Investigación

Se utiliza como estrategia metodológica, estudio de casos, en la medida que “son particularmente apropiados para estudiar una situación en intensidad en un período de tiempo”, (Arnal, Del Rincón y Latorre, 1992). La Unidad de análisis está formada por un grupos de 20 estudiantes de primer año medio (desconocen la recta y sus ecuaciones), realizan las actividades trabajando en parejas, en tres sesiones de 90 minutos.

Ejemplos de respuestas.

En relación a la actividad 1, En el Momento de exploración de la tarea, los estudiantes utilizan técnicas sintéticas, es decir, construyen con regla y compas, los elementos secundarios del triángulo, marcando los puntos notables Circuncentro, Baricentro y Ortocentro, la mayoría de los estudiantes determina que estos puntos son colineales, dando respuestas como: “*están en una misma línea*”, “*pertenecen a un mismo segmento*”(ver ejemplo figura1), y para el caso del triángulo equilátero concluyen que estos tres puntos coinciden.

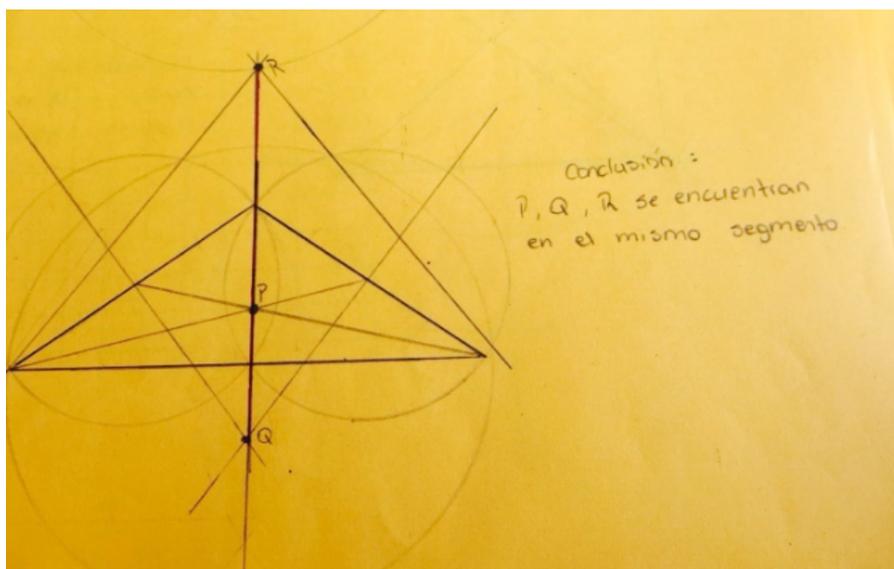


Figura1: respuesta de los estudiantes ( E3- E4)

Con respecto a la actividad 2, que conecta la geometría sintética y la geometría analítica los estudiantes construyen técnicas para justificar la tarea, observando características particulares de la recta de Euler, si bien, no utilizan fórmulas de pendiente, ni de distancias, pues la desconocen. Comienzan a surgir elementos analíticos de las rectas( ver figura 2)

Escriben respuesta como: “cada 4 cuadritos de la línea x , se avanza 1 hacia arriba(eje y) ”, “ la distancia entre R y P , es el doble de la distancia de los puntos P y Q” “ se concluye que P, T y Q están en la misma línea”.

P , es el doble de la distancia de los puntos P y Q” “ se concluye que P, T y Q están en la misma línea”.

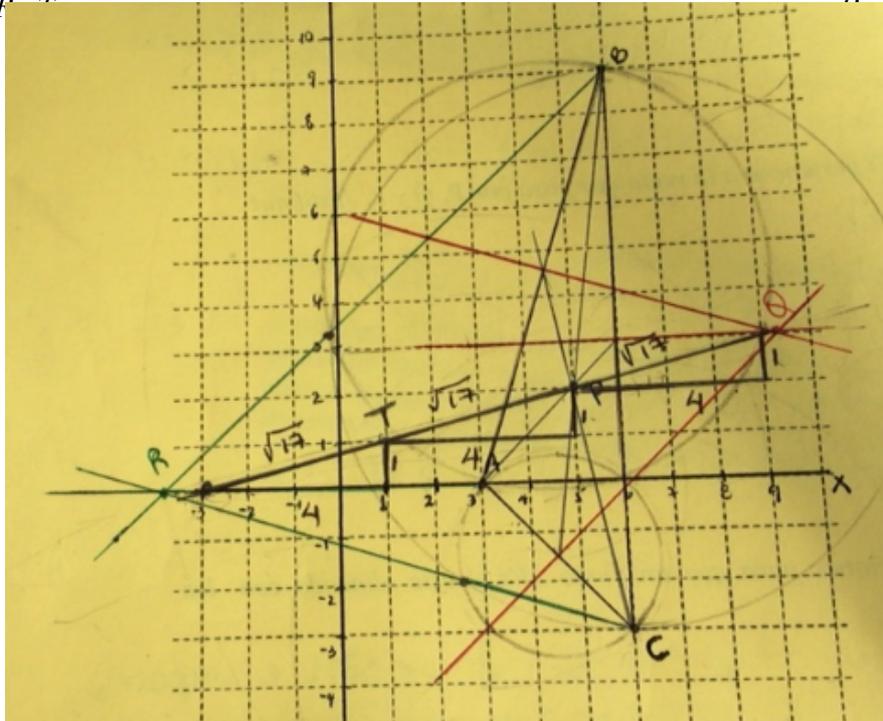
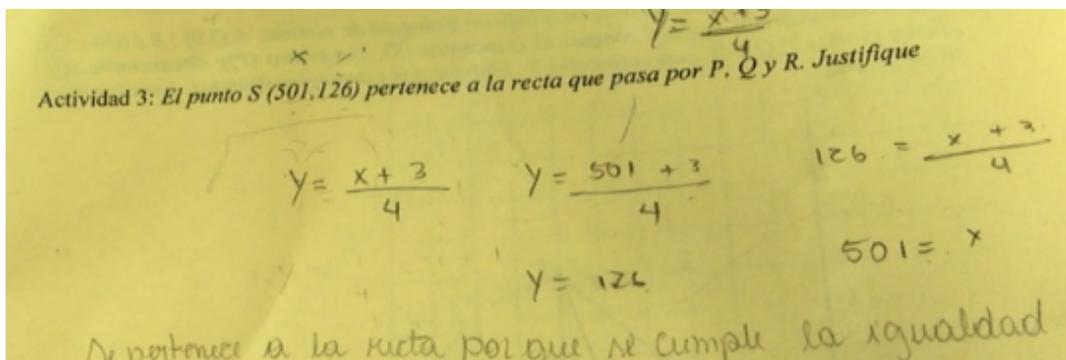


Figura2: Respuesta de los estudiantes ( E7- E8)

En relación al tipo de tareas ( $T_2$ ), determinar las condiciones de las coordenadas de un punto  $M(x,y)$  para que este alineado con dos puntos distintos  $Q$  y  $R$  en el plano.

6  
Parejas



de

estudiantes, elaboraron técnicas analíticas (figura 3), estableciendo ecuaciones que relacionaban los puntos de la actividad 2, dando respuestas como: “debe cumplir la igualdad  $y = \frac{x+3}{4}$ ” o “ $4y = x + 3$ , significa que al multiplicar 4 veces el valor de  $y$  nos da el mismo resultado que al

*sumarle 3 unidades a  $x$ , solo si esto se cumple los puntos están en la misma línea”.*

Figura 3: respuesta de estudiantes E13- E14

## REFLEXIONES FINALES

Se sugiere la aplicación de la propuesta didáctica a estudiantes que desconocen ecuaciones de rectas y fórmulas de pendientes, pues los elementos matemáticos que surgen en la actividades a partir de la elaboración de técnicas que respondan a un tipo de tareas específica, en este caso determinar las condiciones de colinealidad de tres puntos, son un soporte fundamental para el docente al momento de institucionalizar. Es tarea del docente decir que cuando el estudiante da cuenta de que “*cada 4 cuadritos de la línea  $x$ , se avanza 1 hacia arriba(eje  $y$ )*” se está hablando en forma implícita de lo que se conoce como pendiente de la recta.

Es importante destacar la riqueza de la recta de Euler en esta propuesta, pues el hecho de que se pueda construir en forma geométrica (regla y compas o software) genera un impacto positivo en los estudiantes, reflexionando sobre la posición de los puntos notables y la relación de sus distancias.

## Referencias bibliográficas

Bonilla, d. & Díaz, j. (2014). “Ecuación vectorial de una recta: una propuesta didáctica desde la teoría antropológica de lo didáctico”. En r. flores (ed), *acta latinoamericana de matemática educativa n° 27*, 807-813. México: comité latinoamericano de matemática educativa.

Chevallard, Y. (1999) *L’analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19 (2),221-266.

Chavez, V. & Parraguez, M. (2014). “Construcciones mentales para el objeto recta de euler”. En r. flores (ed), *acta latinoamericana de matemática educativa n° 27*, 689-696. México: comité latinoamericano de matemática educativa.

Duran, D. (2005). *El Círculo de los Nueve Puntos y la Recta de Euler. Divulgaciones Matemáticas*,13(1), 73-76.

Gascón,J(2002):” *Geometría sintética en la ESO y analítica en el Bachillerato. ¿Dos mundos completamente separados?*”, *SUMA*, n.º 39, 13-25.