LA JUSTIFICACIÓN DE LO INFINITO EN LAENSEÑANZAESCOLAR[i]

Pavez-Hlousek, V[a]., Vidal-Cortés, R[b].;

Universidad Alberto Hurtado;
correo electrónico: valentina.pavezh@gmail.com, rvidal@uahurtado.cl

Resumen:
Esta comunicación tiene por objetivo exponer un avance de tesis de Magíster en Didáctica de la Matemática, la cual consiste enel estudio de las justificaciones que dan profesores y libros de textos acerca de procesos infinitos involucrados con algunos objetos matemáticos del currículo escolar. Para tal efecto, este estudio se compone de dos etapas: la aplicación y análisis de un cuestionario para profesores en activo, y la revisión de textos escolares. Aquí se presentan los resultados preliminares de la primera etapa, en la que se analizaron las respuestas de los profesores respecto de los argumentos que entregan frente a interrogantes relacionadas con lo infinito, para posteriormente llegar aestablecer posibles relaciones entre lo declarado por los profesores y el contenido de lostextos de estudio cuando aluden a los mismos objetos.

Palabras claves: *infinito, procesos infinitos, justificación,enseñanza del profesor de matemática, libros de textos.*

INTRODUCCIÓN

En los programas de estudio oficiales, se evidencia la presencia de objetos matemáticos que tienen relación con lo infinito, entre los cuales podemos mencionar por ejemplo, los desarrollos decimales periódicos y semiperiódicos, los desarrollos decimales de números irracionales, como el delnúmeroπ, la densidad y continuidad de los números reales, entre otros. Esto avala la necesidad deinvestigarqué tipo de justificaciones están presentes en la enseñanza, es decir tanto argumentos del profesor como lo expresado en libros de textos,ya que la noción de infinito es transversal a diversos contenidos presentes en el currículo escolar chileno.

Investigaciones relacionadas con la noción de infinito en el aula escolar,constatan la importancia de una adecuada comprensión de este objeto (Crespo, 2006). Por un lado, revelan que los procesos infinitos suelen tratarseen el aula apelando a la intuición (Crespo, 2006), lo que conlleva a que en el alumno emerja un sentimiento de desesperación y de un horror al infinito (Ortiz, 1994), y por otro lado, reportan obstáculos didácticos y epistemológicos, lo que hace que enseñar este concepto sea un desafío tanto para quién lo enseña. (Crespo, 2006)

Antecedentes desde la historia

Para Ortiz (1994) la noción de infinito ha generado una serie de confusiones y contradicciones en la historia de la matemática. En la época de la antigua Grecia, esta noción era concebida desde la percepción, basada en experiencias relacionadas con el mundo físico, un mundo finito, lo que conlleva a paradojas, que no lograban ser contestadas desde esta idea de infinito, tan inherente a la intuición humana.

Una paradoja propia de la época, que comenta Ortiz (1994) y que proviene de las bases que sustentan la matemática, es la mencionada por Euclides: “eltodo es mayor que las partes”, que Georg Cantor más adelante modifica con su teoría de los Números Transfinitos. Lo mismo ocurre con la paradoja del Hotel de Hilbert, que plantea metafóricamente que una cantidad infinita de huéspedes, cabe en un hotel con infinitas habitaciones, es decir, un conjunto infinito de elementos“forma parte” de otrotambién de tamaño infinito, lo que se opone al postulado de Euclides antes mencionado.

Por otra parte, para Crespo (2006) la noción de infinito responde a la interpretación intuitiva, ligada al sentido común, entendido como algo interminable e inalcanzable. Esta idea perduró durante muchos años en la historia de las matemáticas, hasta las intervenciones de Cantor.

De un infinito intuitivo a un infinito domado

Costa y Otto (2005) plantean el infinito potencial como la idea de uno más, es decir, se concibe como un proceso de acumulación. La idea fundamental que subyace a esta comprensión de infinito, es que siempre hay uno más (o uno menos), haciendo referencia a una tendencia, a un comportamiento iterado que jamás llega a término. Garbin y Azcárate (2005) establece queun objeto potencialmente infinito, responde a un significado referido a su conducta, por eso alude a una manera de entender esta noción, desde cómo se comporta,es decir, un infinito que da respuesta a nuestra intuición racional.

El infinito actual, en cambio, es entendido desde una concepción formalizada del objeto, respondiendo a una noción contra-intuitiva. Costa y Otto (2005) plantean que la idea de infinito en acto, se centra en considerarlo como unidad, como un todo. Responde a aquello tan grande o pequeño que no puede ser pensado, por eso se entiende en términos de un “ya alcanzado”. En otras palabras, recibe un tratamiento como si fuese un elemento que surge al superar el límite de lo infinito. A partir de esta idea, surge en la historia la posibilidad de considerarlo como un número.

Cantor y la formalización del infinito

Ortiz (1994) afirma que Cantor rechazó la concepción de infinito potencial que permanecía latente en la época, ya que asume que todo infinito potencial presupone la existencia de uno actual. Así, Cantor a través de su teoría levanta la existencia de cardinalidades infinitas diferentes. Una de ellas, por ejemplo, asociada a los números naturales, permite levantar la noción deconjunto infinito numerable, simbolizada por$\aleph_0$.Otra cardinalidad se asocia a un conjunto infinito no numerable, correspondiente al tamaño de los números reales, denotada por $2^{\aleph_0}$.

Hernández (2001), plantea que las cantidades mencionadas anteriormente, son entendidas como números, pero diferentes a los que comúnmente conocemos, ya que representan cardinalidades infinitas. Cantor a partir de esto, comienza a crear una nueva aritmética(Aritmética Transfinita), para dar status de número a estos nuevos entes.

El infinito en el aula de matemática

De los objetos matemáticos presentes en el currículo nacional, que se encuentran vinculados con la noción de infinito, existen diversos investigadores que mencionan la importancia del discurso matemático escolar referidos a la enseñanza de éstos y su relación con los procesos infinitos.

Acerca de la comprensión y significado de los números irracionales en el aula de matemática, Crespo (2009)detectauna marcada tendencia a considerar un infinito potencial, ya que surge en el alumnola necesidad de mostrar los resultados mediante su expresión decimal, lo que genera obstáculosepistemológicos en el aprendizaje de los números irracionales.

Por otro lado, al tratar los periodos de los números racionales, Pochulu (2007) detecta una dificultad común en alumnos de nivel medio, cuando se ven enfrentados a la tarea de identificar unpatrón en el desarrollo decimal de un número, ya que cuando no lo encuentran con facilidad, asumen que se trata de un número irracional.

El problema

A raíz de los antecedentes expuestos, se evidencia la presencia de dificultades en la comprensión de procesos infinitos que subyacen a ciertas temáticas presentes en el aula de matemática. Se observa en la actualidad, que en la enseñanza matemática suele trabajarse la noción de infinito desde una idea que se quedó en la antigua Grecia,donde predomina una perspectiva potencial e intuitiva, visión compartida como veremos tanto en profesores como en los estudiantes. Desde este escenario, surge la necesidad de desarrollar la presente investigación, en la que se analizan las justificaciones referidas a lo infinitopresentes en la enseñanza escolar.

De lo anterior, emergen entonces las preguntas de investigación que orientan a los objetivos del estudio: ¿Se dan y en tal caso hasta qué punto son comprensibles las justificaciones de libros de texto o presentes en lo expresado por el profesor?¿Qué tipo de justificaciones dan los profesores acerca de lo infinito? ¿Son las mismas queentregan los libros de textos?¿Existen diferencias en las justificaciones referidas a lo infinito entre algunos objetos matemáticos y otros? ¿Esto podría conllevar a obstáculos en el aprendizaje de objetos matemáticos permeados con la noción de infinito?¿Incide la experiencia docente en el tipo de justificaciones que se dan? A partir de estas sub-preguntas de investigación, surge una pregunta de investigación general: ¿Cuáles son las justificaciones de los procesos infinitos presentes en la matemática escolar?

Como objetivo general del estudio se propone: Analizar las justificaciones, en caso de existir, de lo infinito presente en la matemática escolar, referidas a objetos matemáticos del currículo nacional. Los objetivos específicos que ayudarán a alcanzar el objetivo general son:

1) Identificar y caracterizar tipos de justificaciones asociadas a lo infinito en la enseñanza de la matemática escolar, 2) Identificar si en los objetos relacionados con lo infinito presentes en el estudio predomina una tendencia a justificar, 3) Determinar si la experiencia docente índice en el tipo de justificaciones,4) Identificar posibles errores conceptuales y/o procedimentales en los objetos relacionados con lo infinito, en función de las justificaciones, y por último 5) Determinar convergencia entre los discursos referidos a las justificaciones respecto de lo infinito en la enseñanza escolar, entre los saberes del profesor y los provistos en libros de texto.

Para abordar este problema, se ha optado como marco de referenciauna adaptación de los esquemas de prueba propuestos por Harley y Sowder (1998),identificando y categorizando lasjustificaciones observadas tanto en profesores como el libros de texto, referidas a lo infinito de algunos objetos matemáticos.

Metodología de la investigación

La metodología a utilizar en la investigación será de tipo cualitativo, cuyo diseño descriptivo y exploratorio, constará de dos estudios de casos.El primero, buscará analizar las justificaciones de profesores referidas a temáticas que aluden a procesos infinitos de ciertos objetos, y el segundo analizará las justificaciones que están presentes en librosde textosrespecto de los mismos objetos.

En el estudio de casos centrado en las justificaciones de profesores, se aplicó y analizó un cuestionario (de diez preguntas), validado previamente por juicio de expertos, que constó de dos partes. La primera (cuatro preguntas) recopilódatos relativos a suexperiencia docente: año qué obtuvo el título de profesor de matemáticas, años que lleva realizando clases, niveles escolares donde realiza clases y dependencia laboral del establecimiento donde trabaja, respectivamente.La segunda parte (seis preguntas) recogió informaciónacerca de su perspectiva en torno a situaciones de aula en matemática, referidas al objeto de estudio, para objetos matemáticos que aluden a procesos infinitos.Al respecto, se seleccionó una lista de contenidos del currículo oficial para éstas últimas seis preguntas: desarrollo decimal periódico, medida irracional para un segmento, división por cero, cifras decimales del número π, amplitud de intervalos reales, y finalmente, concepto de función representado en diagrama sagital.

El segundo estudio de casos(en elaboración) corresponde al análisis de libros de textos. Cabe señalar, que dicha fase comenzará con el diseño de una matriz de análisis, cuya finalidad es orientar la recopilación de información en los textos de estudio, lo que permitirá levantar conclusiones en cuanto a similitudes o diferencias, entre las justificaciones de los profesores y las que se encuentran presentes en los manuales escolares.

Resultados preliminares

El cuestionario fueaplicado a 20 profesores de matemáticas que realizan clases entre séptimo y cuarto año de enseñanza media en la actualidad. A continuación se presentan algunos resultados preliminares:

- 5 de los 20 profesores encuestados no acepta que $3,\overline{9}$ es igual a 4. De los 15 restantesque aceptaron dicha igualdad, 11 la explican desde la fórmula para transformar un desarrollo decimal infinito periódico en una expresión fraccionaria.

- 10 de los 20se refirieron a la imposibilidad de la existencia de un segmento de medida $\sqrt[5]{3}$, justificando que al tratarse de un número infinito no periódico, dicho segmento no puede tener una medida exacta.

- 4 delos 20profesores encuestados, declaró que cualquier persona podría encontrar los dígitos de su RUT dentro de las cifras decimales de π, justificando que "si no estuvierantodas las combinaciones posibles de números, entonces π no podría ser infinito".

- 2 de 20profesores expuso que el intervalo $]0,1[$ no tiene la misma amplitud que el intervalo $[0,1]$, ya que el último posee dos elementos más que el primero.
- Finalmente, 19 de los20 encuestadosno advierten acerca de la representación errónea para la enseñanza del concepto de funciónde variable real, al utilizar diagramas sagitales, ya que no notan la dificultad de emplear este tipo de representaciones, propias de los conjuntos finitos.

A partir de los resultados preliminares mencionados, se detectan contradicciones e inconsistencias a nivel de conocimiento de los profesores, por lo que ahora se precisa de un análisis de las justificaciones presentes en lo expresado por los encuestados. Este análisis se hará a partir de categorizaciones de justificaciones, en base al marco referencial y en algunos casos, a categorías creadas en virtud de las respuestas observadas. Posterior a esto, se procederá a observar libros de texto para ver que está ocurriendofrente a lo infinito de los mismos objetos matemáticos presentados. Resulta interesante identificar si lo propuesto en los manuales de estudio, se asemeja o no a lo expuestopor los profesores.

Proyecciones de la investigación

Luego de finalizada la investigación, se esperaría por un lado, servir como antecedente para futuros estudios que presentenpropuestas didácticas para trabajar con objetos matemáticos que aludan a lo infinito. Por otro lado, se esperaría impactar en el ámbito de la didáctica de tal forma de hacer emerger la necesidad de perfeccionamientos docentes en relación al tema, o tal vez remecer en la toma de consciencia de la elaboración de libros de textos y las justificaciones referidas a procesos infinitos presentes en los objetos matemáticos del currículo escolar.

Referencias

Costa Reparaz, E., & Otto, L. B. (2005). Ideología y Matemáticas: El infinito. Obtenido de Universidad de Valencia: http://www.uv.es/asepuma/XIII/comunica/comunica_30.pdf

Crespo, C. C. (2006). Un paseo por el paraíso de cantor: problemas y reflexiones acerca del infinito. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa Vol. 19, (págs. 28-34). México.

Crespo, C. C. (2009). Acerca de la comprensión y significado de los números irracionales en el aula de matemática. Revista Premisa, 21-30.

Garbin, S., & Azcárate, C. (2002). Infinito actual e inconsistencias: acerca de las incoherencias en los esquemas conceptuales de alumnos de 16-17 años. Enseñanza de las Ciencias, 87-113.

Harel, G., &Sowder, L. (1998). Students` Proof Schemes: Results from exploratory studies. En: Dubinski, E.; Schoenfeld, A. y Kaput, J. (Eds), Research in collegiate mathematics education, vol.III.,234-283.American MathematicalSociety, Providence, USA.

Hernández, J. A. (2000). Bibliografía del infinito: La noción de transfinitud de Georg Cantor y su presencia en la prosa de Jorge Luis Borges.

Ortiz, J. R. (1994). El concepto de infinito. Asociación Matemática Venezolana. Boletín, I(2), 59-81.

Pochulu, M. D. (2007). Períodos de números racionales: Un abordaje desde la teoría de números y con nuevos recursos. Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 68, 4-9.

---

[i] Esta comunicación se basó en el avance del diseño final del Trabajo de Graduación para optar al grado de Magíster en Didáctica de la Matemática de la Universidad Alberto Hurtado.