MATICES EN LA TEMATIZACIÓN DEL ESQUEMA DE LA DERIVADA

Fuentealba, C.[a], Badillo, E.[b], Sánchez-Matamoros, G.[c]

[a y b]Universidad Austral de Chile, [b]Universidad Autónoma de Barcelona, [c]Universidad de Sevilla; [a]cfuentealba@uach.cl, [b]Edelmira.Badillo@uab.cat, [c]gsanchezmatamoros@us.es

Resumen

En el presente trabajo nos centramos en el análisis de la comprensión de la derivada en estudiantes universitarios con instrucción previa en cálculo diferencial. Por una parte, consideramos los elementos teóricos y analíticos propuestos por la teoría APOE en relación a la tematización de un esquema y por otra, la configuración del concepto de derivada caracterizada por: los elementos matemáticos, las relaciones lógicas y los modos de representación que los estudiantes utilizan al resolver una tarea. Los resultados sugieren que tematizar el esquema de la derivada es difícil de lograr y que además, existen matices entre quienes lo consiguen observándose diferencias en la forma de establecer las conexiones entre las derivadas sucesivas de una función.

Palabras clave: *derivada, esquema de derivada, tematización*

INTRODUCCIÓN

El concepto de derivada, es sin lugar a duda, uno de los elementos fundamentales y estructurantes de cualquier curso de cálculo o análisis matemático. Nadie discute su importancia y es por ello que está incluido en los currículos tanto de matemáticas como del área científica. Sin embargo, a pesar de la importancia del cálculo, un problema aún sin solución es cómo lograr el aprendizaje por parte de los estudiantes de la diferenciación o la integración que corresponden a los conceptos fundamentales de este curso. Según Artigue (1995) la enseñanza tradicional, en particular, la enseñanza universitaria, aunque tiene otras ambiciones, tiende a centrarse en una práctica algorítmica y algebraica del cálculo evaluando en esencia las competencias adquiridas en este dominio. Esto ha provocado que un gran número de estudiantes prefieran utilizar dichas técnicas para resolver las tareas que se les proponen, lo cual generalmente no los lleva a un camino óptimo de resolución. De esta forma, a pesar de que el concepto de derivada posee una amplia gama de aplicaciones en distintas disciplinas científicas, su comprensión por parte de los estudiantes resulta ser un reto cognitivo.

Esta complejidad presente en la comprensión del concepto de derivada ha motivado a varios investigadores a abordar la problemática desde diversos planteamientos teóricos aportando información que, sin duda, ha tenido consecuencias positivas en el desarrollo del currículo de cálculo y específicamente sobre el concepto de derivada. Sin embargo, se hace necesario ahondar en la compresión que los estudiantes logran construir del concepto de derivada, una vez acabado un proceso de instrucción, considerando la multidimensionalidad que lo configura.

Marco teórico

El presente trabajo considera los aportes teóricos y analíticos planteados por la Teoría APOE (Arnon et al., 2014; Asiala et al., 1997), los cuales permiten describir tanto el camino como la construcción de las estructuras cognitivas lógico-matemáticas realizadas por un individuo durante el proceso de aprendizaje de un concepto matemático. En este marco se considera que el principal mecanismo de construcción de conocimiento matemático es la abstracción reflexiva y que la comprensión de un concepto por parte de un estudiante comienza con la manipulación de los objetos físicos o mentales previamente construidos en términos de acciones. Las acciones se interiorizan para formar procesos que se encapsulan para formar objetos. Finalmente, las acciones, los procesos y los objetos se pueden organizar en esquemas (Dubinsky, 1991). Los esquemas corresponden a la colección de acciones, procesos, objetos y otros esquemas que están relacionados consciente o inconscientemente en la mente de un individuo en una estructura coherente y que pueden ser empleados en la solución de una situación problemática que involucre esa área de las matemáticas (Asiala et al., 1997). En relación a los esquemas, Piaget y García (1983, 1989) indican que estos crecen según ciertos mecanismos y se desarrollan o evolucionan pasando por tres niveles, intra-inter-trans, denominado triada que se suceden según un orden fijo, caracterizándose por el grado de construcción de relaciones entre los elementos matemáticos constitutivos del concepto. En este sentido, Trigueros (2005) indica que cuando un sujeto se encuentra frente a un problema específico en el ámbito de las matemáticas, evoca un esquema para tratarlo. Al hacerlo, pone en juego aquellos conceptos de los que dispone en ese momento y utiliza relaciones entre estos. Ante una misma situación, diferentes estudiantes, utilizan los mismos conceptos y diferentes relaciones entre ellos. Por lo tanto, a la hora de analizar el nivel de comprensión de un esquema es necesario observar los elementos matemáticos utilizados y los tipos de relaciones establecidos entre ellos que corresponderían a las partes constituyentes del esquema (Sánchez-Matamoros, García y Llinares, 2006).

Para el objetivo de nuestro estudio consideramos los aportes de la teoría relacionados con la tematización de un esquema, la cual según Cooley, Trigueros y Baker (2007) implica la coherencia del esquema, es decir, la posibilidad de que el sujeto reconozca las relaciones que están incluidas en el esquema y sea capaz de decidir qué problema puede resolverse utilizando el esquema y cuál no. En este mismo sentido y en relación a la tematización del esquema de la derivada consideramos, por una parte, los aportes realizados por Baker, Cooley y Trigueros (2000) que indican que la tematización puede observarse cuando un estudiante es capaz de movilizar las relaciones lógicas entre los elementos matemáticos a una situación nueva (modificación de condiciones de las tareas del cuestionario) y, por otra, los resultados de García, Llinares y Sánchez-Matamoros (2011) que mencionan que la tematización del esquema puede observarse cuando un estudiante es capaz de establecer correctamente conexiones entre las derivadas sucesivas de una función, es decir, cuando toma conciencia de que el operador derivada es transformación lineal que se puede generalizar.

Metodología

Los participantes de este estudio correspondieron a 25 estudiantes universitarios, de los cuales, 17 eran estudiantes de tercer curso de Ingeniería en Organización Industrial de una universidad privada y los restantes 8 estudiantes, pertenecían al primer curso de licenciatura en Matemáticas y Física de una universidad pública. Es importante destacar que todos los estudiantes poseían instrucción previa en cálculo diferencial.

El primer instrumento aplicado correspondió a un cuestionario en el cual se planteaban tres tareas sobre la comprensión del concepto de derivada, dichas tareas tenían como base investigaciones previas realizadas (Baker et al., 2000; García et al., 2011). La resolución de las tareas involucraba el uso de los elementos matemáticos que configuran el concepto tales como: los elementos matemáticos, las relaciones lógicas y los modos de representación (Tabla 1).

Tabla 1. Descripción de la conexión entre los modos de representación y elementos matemáticos puntuales/globales necesarios para responder a las tareas

Tarea 1
<u>*Modo de representación*</u>: analítico →gráfico
<u>*Elementos matemáticos*</u>: Interpretación analítica de la derivada y sus implicaciones sobre la gráfica de la función (existencia de valores extremos, puntos de inflexión). Signo de la primera derivada y su relación con respecto a los intervalos de monotonía de la función. Signo de la segunda derivada y su relación con respecto

a los intervalos de convexidad de la función

Tarea 2

<u>*Modo de representación*</u>: gráfico→ analítico → gráfico

<u>*Elementos matemáticos*</u>: Interpretación geométrica y analítica de la derivada (existencia de valores extremos, puntos de inflexión, discontinuidades y picos). Intervalos de monotonía y convexidad de la función y su relación con el signo de la primera derivada o segunda derivada según sea el caso. El operador derivada (si f es una parábola entonces f' es una recta)

Tarea 3

Modo de representación: gráfico → analítico → gráfico

<u>*Elementos matemáticos*</u>: Interpretación geométrica (existencia de valores extremos, puntos de inflexión, discontinuidades y picos). Intervalos de monotonía de la primera derivada y su relación con el signo de la segunda derivada (intervalos de convexidad de la función). Intervalos de cambio de signo de la primera derivada y su relación con respecto a la monotonía de función

A modo de ejemplo, presentamos la primera tarea del cuestionario estudiantes. Como se observa en la Figura 1, se entrega información analítica de la función f en términos de f' y f'', a partir de ello se les solicita a los estudiantes esbozar la gráfica de la función f. Uno de los objetivos de esta tarea fue observar si los estudiantes eran capaces de establecer las relaciones tanto puntuales como globales que asocian: el signo de f' en un intervalo con la monotonía de f en dicho intervalo, el signo de f'' en un intervalo con la concavidad de f en el intervalo y los ceros de f' con la posible existencia de valores extremos o puntos de inflexión. Por otra parte, se pretende verificar si los estudiantes son capaces de identificar las contradicciones presentes en las condiciones analíticas entregadas y además, plantear una modificación que les permita dar una solución adecuada de la tarea mostrando de esta forma coordinación de los elementos matemáticos entregados.

Esboza la gráfica de una función f que satisface las siguientes condiciones:

a) f es continua

b) $f(2)=0$

c) $f'(3)=f'(5)=0$

d) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-4$

e) $\lim_{x\to 8^-} f(x)=-\infty$

f) $f'(x)<0$ cuando $5<x<8$

g) $f'(x)\geqslant 0$ cuando $x<5$

h) $f''(x)<0$ cuando $3<x<8$

i) $f''(x)>0$ cuando $x<3$

Figura 1. Enunciado de la Tarea N°1 del cuestionario

A partir del análisis de los protocolos obtenidos con el primer instrumento logramos clasificar a los estudiantes en distintos niveles de comprensión del esquema de la derivada (Tabla2).

Tabla 2. Niveles de comprensión del esquema de la derivada Sánchez-Matamoros et al. (2006)

Intra: No se establecen relaciones lógicas, y los posibles esbozos de relación (del tipo conjunción lógica) se realizarán con errores. Los estudiantes usan los elementos matemáticos de forma aislada (y a veces de forma incorrecta).
Inter: Los estudiantes establecen relaciones lógicas entre los elementos matemáticos, pero con limitaciones, predominando el uso de la conjunción lógica relacionando sólo elementos matemáticos que se encuentren en el mismo modo de representación analítico o gráfico. El estudiante es capaz de usar más elementos matemáticos de forma correcta que en el nivel anterior.
Trans: Aumenta el repertorio de las relaciones lógicas que el estudiante es capaz de establecer entre diferentes los elementos matemáticos (y lógica, contrarrecíproco, y equivalencia lógica). En este nivel se produce la síntesis de los modos de representación y lleva a la construcción de la estructura matemática. La síntesis se aplica a situaciones en las que hay que relacionar (relación lógica) información gráfica y analítica, es decir, usar información procedente de dos sistemas de representación diferentes para considerarla conjuntamente y obtener una información que no se

conocía.

Además, nos entregó información para la elaboración del segundo instrumento que fue aplicado a los estudiantes que poseían un nivel trans de comprensión del concepto y que posiblemente habían tematizado el esquema. Este segundo instrumento correspondió a una entrevista clínica que tuvo dos finalidades: (i) profundizar en el proceso de resolución de la secuencia de tareas propuestas a los estudiantes e (ii) indagar en las posibles manifestaciones de tematización del esquema. Esta entrevista clínica estaba conformada por dos tipos de interrogantes (Tabla 3) las primeras se relacionaban con modificaciones de las condiciones de la tareas propuestas en la secuencia y las segundas buscaban observar las relaciones que los estudiantes establecían entre las derivadas sucesivas de una función.

Tabla 3. Algunas de las preguntas planteadas en las entrevistas

Tarea	Pregunta
1	¿Existe algún cambio significativo en la gráfica de la función si eliminamos la condición c?
2	Al modificar la condición de que la gráfica dada es la de la función derivada y no la de la función ¿Qué pasa en los puntos $x = 7$, $x = 10$ y $x = 14$?
3	Explica cómo interpretas la información de x_0. ¿Qué puedes decir sobre las derivadas sucesivas derivadas sucesivas (f', f'' y f''') en $x = 1$, $x = 3$ y x_0? Justifícalo. (x_0 correspondía a un punto de inflexión de f')

Análisis y resultados

Como primer paso realizamos un análisis de las respuestas de los 25 estudiantes a cada una de las tareas propuestas del cuestionario considerando como criterio de valoración, la completitud de cada una de las tareas y de la secuencia en general. A partir de este análisis redujimos el número de sujetos de estudio a nueve casos los que clasificamos en los distintos niveles comprensión del esquema. Posteriormente, nos centramos en el análisis de tres estudiantes que denominamos A1, A3 y A4 los cuales fueron clasificados en un nivel de comprensión trans del esquema y manifestaban características que nos permitían inferir una posible tematización del mismo, a ellos les aplicamos las entrevistas clínicas. Con la información obtenida por medio del cuestionario y las entrevistas clínicas logramos observar que los estudiantes que habían tematizado el esquema mostraban coherencia y flexibilidad del esquema al responder y argumentar correctamente a las modificaciones de las condiciones de las tareas, sin embargo, se observaban diferencias en el uso que los estudiantes hacían de las derivadas sucesivas mostrando diferencias en la forma de establecer y argumentar dichas relaciones, lo cual nos permitió definir tres tipos de conexiones entre las derivadas sucesivas de una función (Tabla 4) y que hemos denominado como conexiones: inicial, indirecta y directa.

Tabla 4. Tipos de conexiones entre las derivadas sucesivas de una función

Inicial: Logra establecer las conexiones entre las derivadas sucesivas pero duda de sus afirmaciones
Indirecta: Establece con seguridad las conexiones utilizando funciones auxiliares
Directa: Establece directamente y con seguridad las conexiones entre las derivadas sucesivas de una función

A modo de ejemplo, presentamos un fragmento de la entrevista al estudiante A1 que muestra evidencia de una conexión de tipo directa.

E: Ya ¿y cuál sería su valor o cuánto valdría f' …, f'' en x_0?
A1: La f'', está creciendo por lo que también es positiva. La f''' ya estaría anulada.
E: ¿Y por qué estaría anulada?
A1: Porque hay un punto de cambio de concavidad.
E: Ah, ok. O sea tú lo que estás haciendo es trasladar relaciones que…

A1: En cambio de mirar lo, lo…, la f'' en función de la…, o sea, en cambio de mirar la f'' en función de la primera función, veo la f''' en función de f'.

CONCLUSIONES

Hemos encontrado evidencia que los estudiantes con el esquema tematizado muestran coherencia y flexibilidad en el uso de los elementos matemáticos (puntuales/globales, analíticos/gráficos) que conectan la función con la primera y segunda derivada, tanto en las relaciones directas como contrarias. Sin embargo, observamos diferencias en cuanto a la extensión de dichas conexiones con otras derivadas sucesivas, ya que mientras algunos estudiantes dudan de las conexiones entre f, f', f'' y f''', otros son capaces de hacer uso directo de ellas, mientras que otros necesitan referirse a una función auxiliar F que hacen corresponder con f' y partir de las conexiones entre F, F' y F'' resuelven las tareas y trasladan sus respuestas a f, f', f'' o f'''.

Finalmente, los resultados muestran que lograr tematizar el esquema de derivada al finalizar un proceso de instrucción, no es fácil, lo cual queda de manifiesto en que de un total de 25 estudiantes con instrucción previa en cálculo diferencial solo tres pudieron conseguirlo.

Referencias

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Fuentes, S. R., Trigueros, M.,Weller, K. (2014). APOS theory: A framework for research and curriculum development in mathematics education. Springer.

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D. J., Dubinsky, E., Mathews, D., Thomas, K. (1997). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. MAA NOTES, 37–54.

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En P. Gómez (Ed), Ingeniería didáctica en educación matemática (pp.97-140). México: Grupo Editorial Iberoamericano.

Baker, B., Cooley, L., y Trigueros, M. (2000). A Calculus Graphing Schema. Journal for Research in Mathematics Education, 31(5), 557-578.

Cooley, L., Trigueros, M., & Baker, B. (2007). Schema thematization: a framework and an example. Journal for Research in Mathematics Education, 38(4), 370-392.

Dubinsky, E. (1991). Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking. En D. Tall (Ed.), Advanced Mathematical Thinking, 95–123.

García, M., Llinares, S., y Sánchez-Matamoros, G. (2011). Characterizing thematized derivative schema by the underlying emergent structures. International journal of science and mathematics education, 9(5), 1023-1045.

Piaget, J., y García, R. (1983, 1989). Psicogénesis e historia de la ciencia. México, España, Argentina, Colombia (Madrid): Siglo veintiuno editores, S.A.

Sánchez-Matamoros García, G., García Blanco, M., & Llinares Ciscar, S. (2006). El desarrollo del esquema de derivada. Enseñanza de Las Ciencias, 24(1), 85–98.

Trigueros, M. (2005). La noción de esquema en la investigación en matemática educativa a nivel superior. Educación Matemática, 17(1), 5–31.