REDISEÑO DEL PRIMER CURSO DE CÁLCULO CON BASE EN LOS TRABAJOS ORIGINALES DE LOS SIGLOS XVII Y XVIII Y CON APOYO DE GEOGEBRA

Ismael Arcos Quezada
ismael_arcos@msn.com
Facultad de Ingeniería, Universidad Autónoma del Estado de México

Resumen. El Cálculo de sus orígenes, a fines del siglo XVII, estaba basado en las cantidades infinitamente pequeñas o infinitesimales, en el caso de Leibniz, o en las fluxiones en el caso de Newton. Aunque hubo detractores en ambos casos, ese Cálculo fue utilizado exitosamente en la solución de innumerables problemas que habían permanecido sin resolver durante casi dos milenios y fue la herramienta fundamental para el desarrollo de otras ciencias. Sin embargo, a partir de la publicación del Análisis de Cauchy, en la década de los años veinte del siglo xix, los infinitesimales y las fluxiones fueron cayendo en desuso hasta que quedaron prácticamente proscritos un siglo después. En este laboratorio se explora una presentación del Cálculo en el que los infinitesimales tienen cabida, en el entendido de que esto resulta más accesible que la presentación tradicional basada en el concepto riguroso de límite.

Palabras clave: *Curso de Cálculo, Historia del Cálculo, Cálculo infinitesimal, Cálculo leibniziano, Geogebra*.

1. PROPÓSITO Y ALCANCE

El propósito principal es que los profesores participantes se lleven una idea clara de los cambios que tienen lugar en un primer curso de Cálculo Diferencial e Integral, al momento de presentar los conceptos importantes del curso, y al resolver problemas con el apoyo de estos, si se aceptan y utilizan las cantidades infinitamente pequeñas (infinitesimales). En cada una de las tres sesiones se abordarán sólo dos o tres ideas o situaciones, referentes a los antecedentes en la primera, al Cálculo Diferencial en la segunda y al Cálculo Integral en la tercera sesión. Además se tomará en cuenta la disponibilidad de un software libre como Geogebra.

2. MARCO TEÓRICO O CONCEPTUAL

Con base en un trabajo de tesis doctoral (de quien implementará el laboratorio) y un texto sobre el desarrollo conceptual del cálculo (del cual es coautor el presentador del laboratorio), se ha escrito una propuesta para la presentación del primer curso de Cálculo, en el que los infinitesimales son un importante recurso, buscando recuperar las cualidades didáctica (simpleza y claridad) del Cálculo leibniziano de los siglos XVII y XVIII, que fueron soslayadas desde la aparición del Análisis de Cauchy y proscritas desde comienzos del siglo aprovechadas en los textos de ciencias básicas y de la ingeniería, hasta nuestros días. Así pues, las referencias básicas son obra de quien fungirá como instructor en el laboratorio.

3. MÉTODO

En cada una de las tres sesiones se hará una exposición de los antecedentes, respecto de la temática a tratar, tomando en cuenta, por una parte, la manera en la que se abordaron esos temas en los trabajos originales y, por otro, la manera en la que son utilizados en los textos de ciencias básicas y de la ingeniería. Luego se propone una actividad en la que los profesores participantes observen cómo cambia el discurso y cómo se pueden abordar y resolver algunos problemas toda vez que lo infinitamente pequeño tiene aceptación.

4. DISEÑOS DIDÁCTICOS

Primera sesión. El límite

Si los infinitesimales o cantidades infinitamente pequeñas son aceptados, muchos cambios ocurren, algunos de manera drástica. Ese es el caso del límite, que a partir de la propuesta de Cauchy devino en el concepto central, ya que la derivada y la integral se definen como límites.

En los textos de otras ciencias básicas, por ejemplo en los de Mecánica, el límite aparece ocasionalmente, como cuando se define la velocidad instantánea como el límite de la velocidad promedio cuando la variación del tiempo tiende a cero:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

Expresado de esta manera, si no se acepta lo infinitamente pequeño, dx y dt no tienen significado por separado, sólo lo tiene el cociente $\frac{dx}{dt}$, visto como el límite de $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ (velocidad instantánea). Sin embargo, una vez que las definiciones de velocidad y aceleración instantáneas han sido dadas, y a veces haciendo un apunte de manera explícita, los autores terminan por hacer cosas como eliminar dt de las ecuaciones $v = \frac{dx}{dt}$ y $a = \frac{dv}{dt}$ para obtener $dt = \frac{dx}{v} = \frac{dv}{a}$ y de aquí la ecuación diferencial $a\,dx = v\,dv$.

Esto a pesar de que este proceso algebraico no es válido si no se aceptan dx, dt y dv como cantidades separadas, de manera que realizar este proceso equivale a aceptar la legitimidad de las cantidades infinitamente pequeñas. Por otra parte prácticamente nunca se tiene la necesidad de calcular el límite de una función para un valor de la variable, a partir de su regla de correspondencia.

El Cálculo del límite es, pues, una operación que prácticamente no se requiere fuera del ámbito del Cálculo mismo, y aún en este caso la manera en la que normalmente se hace en los textos de Cálculo deja mucho que desear.

Ahora bien, la descripción del comportamiento de una variable como resultado de la variación de otra de la que la primera depende, es un asunto que cabe considerar en un primer curso de Cálculo. En este contexto, el cálculo del límite de una función en un punto puede utilizarse para determinar si la gráfica de la función presenta un hueco o, dicho de otra manera, presenta una discontinuidad de hueco.

Para ello se propone, en primer término, abordar el asunto de la continuidad antes que el del cálculo del límite. En ese momento se hace referencia a la discontinuidad de hueco como sigue:

Sea f la función continua cuya gráfica se muestra en la Figura 1 (izquierda), y sea g la función que resulta de quitar de f el par $\big(a, f(a)\big)$.

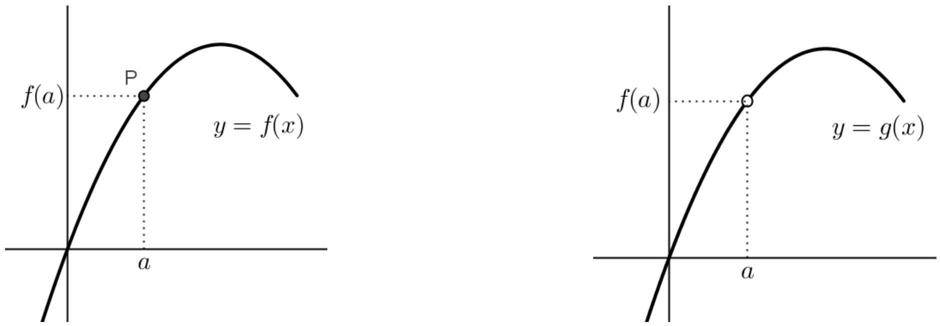

Figura 1

Decimos entonces que la gráfica de g será entonces idéntica a la de f, exceptuando el punto $(a, f(a))$, en cuyo lugar aparecerá un hueco (Figura 1, derecha).

Recordemos ahora que $\frac{k(x-a)}{x-a} \equiv k$, siempre que $x \neq a$. Así pues, si f es una función continua y queremos “agujerarla” en $x = a$, definimos $g(x) = \frac{f(x)(x-a)}{x-a}$.

De esta manera, $g(x) \equiv f(x)$ para toda $x \neq a$, mientras que $g(a)$ no está definida, es decir, el punto $(a, f(a))$ no está en la gráfica de g. En otras palabras, la gráfica de g es la de f con un hueco en $x = a$, tal y como ocurre con las funciones cuyas gráficas se muestran en la Figura 1.

Por ejemplo, si $f(x) = x^2 - 1$, cuya gráfica se muestra en la Figura 2 (izquierda) y se define g por $g(x) = \frac{(x^2-1)\,(x-2)}{x-2}$, entonces $g(x) \equiv f(x)$ para toda $x \neq 2$ y $g(2)$ no existe, mientras que $f(2) = 3$. Así pues, la gráfica de g es la parábola de ecuación $y = x^2 - 1$ (Figura 2, derecha) con un hueco en $(2,3)$.

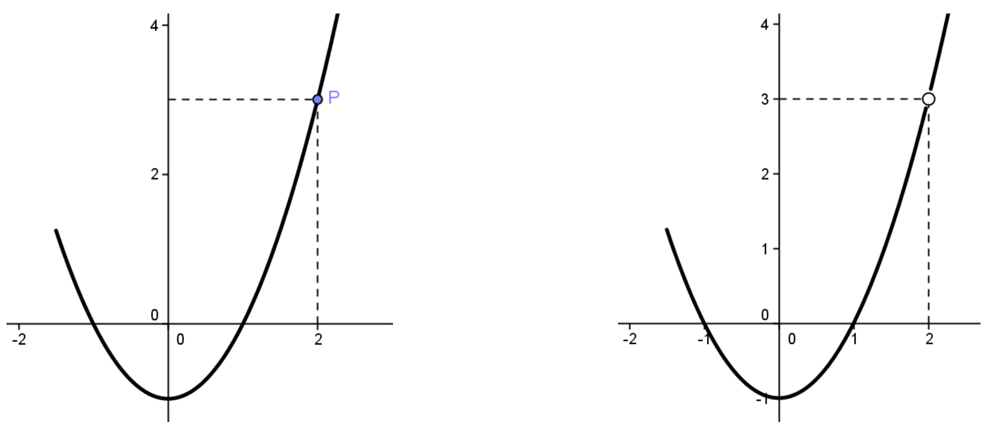

Figura 2

Ya que el hueco “aparece” como consecuencia de multiplicar y dividir por el binomio $x - a$, entonces, cuando se trata de una función racional, una condición necesaria para que la función presente de un hueco en $x = a$ es que el binomio $x - a$ sea factor común del numerador y el denominador de la fracción. Esto equivale a decir que una condición necesaria para que una función definida mediante un cociente presente un hueco en $x = a$ es que denominador y numerador sean expresiones que se anulan para ese valor de la variable.

Aceptando lo infinitamente pequeño podemos decir también que, si el valor de x está infinitamente cerca al número a, entonces el valor de $f(x)$ estará infinitamente próximo al de $g(a)$, pero $f(a)$ estará indefinido.

Considerando entonces una función definida mediante $y = f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, interesa saber qué pasa con el valor de $f(x)$ conforme x toma valores cada vez más próximos a un cierto número (real) a, para el cual tanto el denominador como el denominador se anulan, es decir, cuando se presenta la forma indeterminada $\frac{0}{0}$.

Si la respuesta es que el valor de $f(x)$ se aproxima a L, entonces diremos que el límite de la función f, cuando x tiende a a es L, lo cual se denotará $\lim_{x\to a} f(x) = L$. Además, por lo anteriormente dicho, la gráfica de f presentará un agujero en lugar del punto (a, L). Todo esto nos lleva a la siguiente definición:

Decimos que el límite de una función f, cuando x tiende a a es L, si para α infinitesimal se tiene que $f(a+\alpha) = L + \beta$, con β infinitesimal. En tal situación, la gráfica de f presentará un agujero en lugar del punto (a, L).

Cuando tenemos una función racional no hay necesidad de considerar esta definición, sobre todo si podemos factorizar numerador y denominador teniendo, en ambos casos, el factor común $x - a$. Sin embargo, cuando se tiene otro tipo de función, habrá que considerar la situación particular y recurrir, posiblemente, a una expansión en serie de potencias de alguna función.

Por ejemplo consideremos la función definida por $f(x) = \frac{1-\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt[4]{x}}$. Observemos que el denominador se anula para $x = 1$ y que para ese valor de la variable el numerador también se anula, por lo que se tiene la forma indeterminada $\frac{0}{0}$. Conviene entonces preguntarse por el límite de la función cuando $x \to 1$.

Así pues, recurriendo a la serie binomial, tenemos que:

$$f(1+\alpha) = \frac{1-(1+\alpha)^{1/3}}{1-(1+\alpha)^{1/4}} = \frac{1-\left(1+\frac{1}{3}\alpha+o(\alpha^2)\right)}{1-\left(1+\frac{1}{4}\alpha+o(\alpha^2)\right)} = \frac{-\frac{1}{3}\alpha+o(\alpha^2)}{-\frac{1}{4}\alpha+o(\alpha^2)} = \frac{-\frac{1}{3}\alpha}{-\frac{1}{4}\alpha} = \frac{4}{3} + \text{infinitesimal}$$

Por lo tanto, $\lim_{x\to 1} \frac{1-\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt[4]{x}} = \frac{4}{3}$ y la gráfica de f presenta un agujero en lugar del punto $\left(1, \frac{4}{3}\right)$. En la Figura 3 se muestra la gráfica de la función en el intervalo [0,2.5].

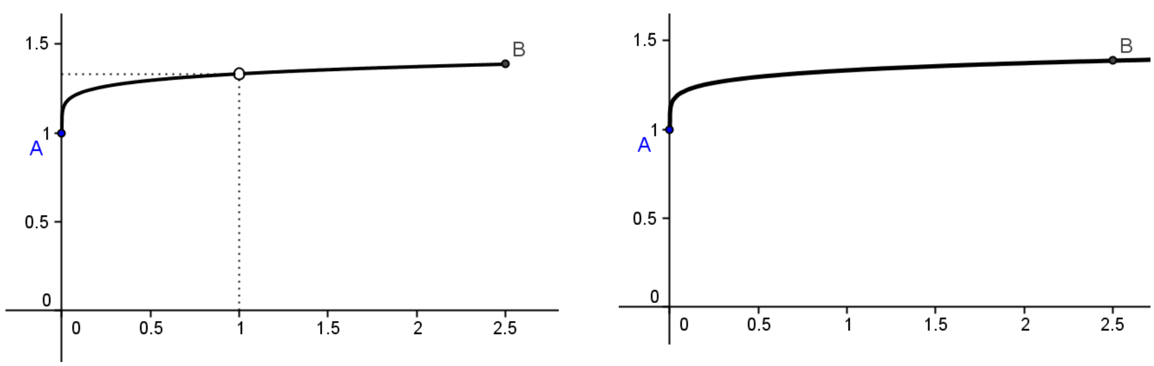

Figura 3

Si se traza la gráfica con Geogebra se obtendrá la curva mostrada en la Figura 3 (derecha), es decir, Geogebra "no detecta el agujero". Por supuesto, hay que recordar que (el tamaño de) un número no es nada en comparación del tamaño de cualquier intervalo, y que ese (único) número no es ni un pixel en la pantalla de la computadora. Hay que ayudarle al software para que nos diga que "algo falla en la gráfica" cuando $x = 1$.

Después que se presente este ejemplo se pedirá al profesor asistente averiguar qué ocurre para un conjunto de funciones propuesto.

Segunda sesión. La recta tangente

Los conceptos de *cambio* y *razón de cambio* son sumamente importantes en las ciencias básicas y de la ingeniería. El *cambio* o *incremento* de una variable no es más que la diferencia entre dos de sus valores, esto es, el valor "nuevo" menos el original, mientras que una razón de cambio es el cociente de dos de tales incrementos.

Ahora bien, con frecuencia interesa conocer cómo están relacionados los cambios de las distintas variables que intervienen en un fenómeno, particularmente para hacer predicciones —con un grado aceptable de certidumbre— de lo que ocurrirá con el valor de alguna variable en particular (variable dependiente, o función), sabiendo cómo cambiará el valor de otra de ellas (variable independiente, o simplemente, variable).

Esto puede hacerse con relativa facilidad cuando se conoce la regla de correspondencia entre las variables de interés, ya que en tal caso sólo hay que evaluar la función en los puntos de interés y calcular la diferencia. Sin embargo, hay situaciones —durante el proceso de modelación de un fenómeno, o cuando la información disponible es, por ejemplo, una tabla de valores— en que no se conoce la regla de correspondencia. En tales casos resulta sumamente útil poder estimar la magnitud del incremento de la función a partir de la magnitud del incremento de la variable y de la información disponible en el "punto de partida", es decir, de lo que se conoce de la función para el valor original o inicial de la variable, como el valor de la función o la rapidez con la que cambia su valor en ese punto.

Ya que el incremento de una variable es la diferencia entre dos de sus valores, y debido a que el eje de abscisas se recorre, convencionalmente, "de izquierda a derecha", el incremento de la variable se considerará siempre positivo. De esta manera, si f es una función definida por $y = f(x)$, e interesa observar qué pasa con la función cuando la variable x cambia su valor de b a w, entonces, el incremento de x es $w - b$ y el de la función $f(w) - f(b)$. En general:

$$\text{incremento} = \text{valor final} - \text{valor inicial}$$

Usualmente se simboliza un incremento mediante una letra Δ (delta mayúscula), de manera que el incremento de una variable x será $\Delta x = x_f - x_i$, donde x_i y x_f son, respectivamente, los valores inicial y final de x.

Ahora bien, si el incremento de la variable es infinitesimal, es decir, si los valores inicial y final de la variable difieren en una cantidad infinitamente pequeña, el incremento se llamará *diferencial*, en cuyo caso se usará d en lugar de Δ. Así pues, dx denotará un incremento infinitesimal de la variable x.

De esta manera, siendo f una función definida por $y = f(x)$, y suponiendo que x tiene un valor inicial a y un incremento dx (por lo tanto un valor final $a + dx$), se dirá entonces que el correspondiente incremento de la función —el cual, suponiendo continuidad en la función, se espera que sea también infinitesimal— es la *diferencial de la función* (en $x = a$), es decir:

$$df(a) = f(a + dx) - f(a)$$

Por ejemplo, si $y = x^2$ y $a = 3$, entonces $dy(3) = (3 + dx)^2 - 3^2 = 6dx + (dx)^2$, sin embargo, sólo se conservará el término principal, así, que $dy(3) = 6dx$.

Puede verse que, si se obtiene la diferencial de cada una de las partes de una ecuación en dos variables $R_1(x, y) = R_2(x, y)$, se obtendrá otra que tendrá siempre la forma $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$, que será llamada ecuación diferencial de la ecuación original.

De esta ecuación podrá obtenerse, según convenga, una expresión para $\frac{dy}{dx}$ o para $\frac{dx}{dy}$ en términos de x y y por lo que podrá ser evaluada en cualquier punto del plano.

Recta tangente. Consideremos una curva C, definida mediante $R(x, y) = 0$, o bien mediante $y = f(x)$, así como un punto P de la misma. Sean además L_T, la recta tangente a C en P y L_N la recta normal a C en P, es decir, la recta perpendicular a L_T, que pasa por P, tal como se ilustra en la Figura 4.

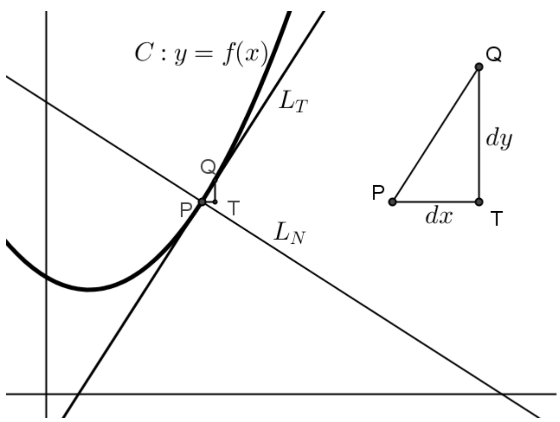

Figura 4

Si Q es un punto de la curva, infinitamente próximo a P, de manera que $PT = dx$ y $TQ = dy$ (derecha), tendremos entonces que las pendiente de L_T y L_N son $m_T = \frac{dy}{dx}$ y $m_N = -\frac{dx}{dy}$ y. Es decir:

Si C es una curva definida mediante $R(x, y) = 0$ y $P = (x_P, y_P)$ un punto de la curva, entonces las pendientes de las rectas tangente y normal a C en P son, respectivamente:

$$m_T = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(x_P,y_P)} \qquad \text{y} \qquad m_N = -\left.\frac{dx}{dy}\right|_{(x_P,y_P)}$$

Por ejemplo, para la parábola definida por $y^2 = 4x$, al calcular la diferencial en cada lado de la ecuación, tenemos que $2y\ dy = 4\ dx$, de donde:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4}{2y} = \frac{2}{y} \qquad \text{y} \qquad \frac{dx}{dy} = \frac{y}{2}$$

De esta manera, la pendiente de la recta tangente en cada punto de la parábola está dado por $m_T = \frac{2}{y}$, y la de la recta normal por $m_N = -\frac{y}{2}$. En particular, para el punto $P = (1, 2)$ se tendrá $m_T = \frac{2}{2} = 1$ y $m_N = -\frac{2}{2} = -1$. La curva dada y las rectas tangente y normal obtenidas se muestran en la Figura 5.

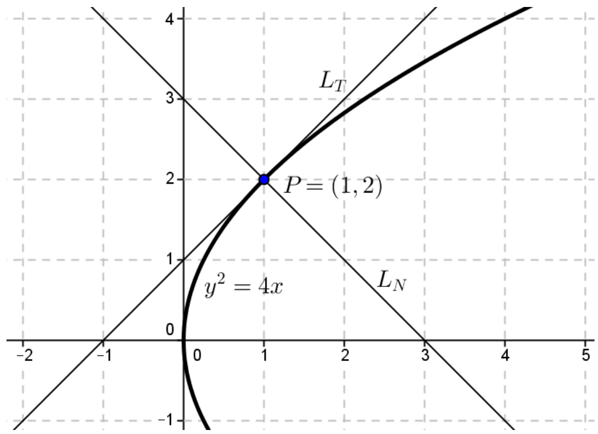

Figura 5

Ahora bien, respecto de la recta tangente, hay dos situaciones que resultan de particular interés, y son aquellas en las que la recta tangente es horizontal (paralela al eje *x*) o vertical (paralela al eje *y*). A partir de la figura 4.7 podemos concluir, por una parte, que si la tangente a una curva definida por medio de $R(x, y) = 0$ es horizontal, entonces los puntos P y Q están sobre una misma recta horizontal (Q coincide con *T*), en cuyo caso $dy = 0$, o bien $\frac{dy}{dx} = 0$. Es decir:

Si *C* es una curva definida mediante $R(x, y) = 0$ y si en un punto P se tiene que $\frac{dy}{dx} = 0$, entonces la recta tangente a *C* en *P* es horizontal (paralela al eje de abscisas) y la recta normal es vertical.

Análogamente también podemos concluir que la tangente a una curva definida por medio de $R(x, y) = 0$, es vertical, si P y Q están sobre una misma recta vertical, en cuyo caso $dx = 0$, o bien $\frac{dx}{dy} = 0$, es decir:

Si C es una curva definida mediante $R(x, y) = 0$, y si en un punto P se tiene que $\frac{dx}{dy} = 0$, entonces la recta tangente a C en P es vertical (paralela al eje de ordenadas) y la recta normal es horizontal.

Después de esta presentación se propondrá a los profesores asistentes un conjunto de curvas y puntos, de manera que se obtengan rectas tangentes y normales así como puntos de una curva en los que la tangente sea horizontal o vertical.

Tercera sesión. Proceso de integración

Por lo general se presenta la operación de integración como la inversa de la diferenciación. Después de ello puede abordarse el proceso de integración, el cual es de suma importancia en el estudio de las ciencias básicas y de la ingeniería. Para ello se requiere de la siguiente definición:

La *integral* (*definida*) de una función *f*, en el intervalo $[a, b]$, se denota y define mediante:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

donde *F* es una primitiva de *f*.

Puede considerarse además una notación particularmente utilizada para la integral:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$$

Por ejemplo:

$$\int_1^2 x^2\, dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_1^2 = \frac{1}{3}2^3 - \frac{1}{3}1^3 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

Tomando en cuenta esto, y recordando que la diferencial de una variable es un incremento infinitesimal de la misma, podemos entonces calcular una cantidad mediante la integración si conocemos el incremento infinitesimal de la misma, que corresponde a un incremento infinitesimal de alguna variable.

En efecto, supóngase que se desea obtener el valor de una cierta cantidad variable P, y que conocemos el valor de una variación infinitesimal *dP* de la misma (a la que llamaremos *elemento* de *P*), correspondiente a una variación infinitesimal *dx* de alguna variable *x*, como el producto de una expresión que depende de esa variable y la diferencial de esta, es decir $dP(x) = f(x)dx$.

De esta manera, si *F* es una primitiva de *f*, es decir, si $F'(x) = f(x)$, entonces $dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx$, así que $dP(x) = f(x)dx = dF(x)$ y $P(x) = F(x) + C$. Suponiendo, además, que $P(a) = 0$, es decir, que el valor de P es cero cuando $x = a$, entonces se tendrá que $0 = F(a) + C$, de donde $C = -F(a)$, así que $P(x) = F(x) - F(a)$.

Finalmente, si el valor deseado de P es el que corresponde a $x = b$, se tendrá entonces que $P(b) = F(b) - F(a)$, es decir $P(b) = \int_a^b f(x)dx$. En resumen:

Sabiendo que una variación infinitesimal de P, correspondiente a una variación *dx* de una variable *x*, está dada por $dP(x) = f(x)dx$, y sabiendo además que *F* es cualquier primitiva de *f*, y que $P(a) = 0$, entonces el valor de P, correspondiente a $x = b$ estará dado por:

$$P(b) = \int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$$

Esta idea tiene sus orígenes en el Cálculo leibniziano y puede considerarse como un proceso para calcular el valor de una cantidad (entera) a partir del conocimiento del valor de una parte infinitamente pequeña de la misma, que suele llamarse elemento. Por eso Johan Bernoulli designó por integración (recuperación del valor de la cantidad entera) a este proceso.

El área bajo la curva. Siendo f una función definida mediante $y = f(x)$, llamaremos *área bajo la gráfica* de f en $[a, b]$, que denotaremos mediante $A_a^b(f)$, al área de la región comprendida entre la gráfica de f, el eje x y las rectas $x = a$ y $x = b$.

Vamos a realizar el proceso antes descrito para calcular el área bajo la curva. Para ello supongamos una curva C, definida mediante $y = f(x)$, siendo f una función continua y con valores no negativos en $[a, b]$, y consideremos un punto P que se mueve sobre la curva desde $Q = (a, f(a))$ hasta $T = (b, f(b))$.

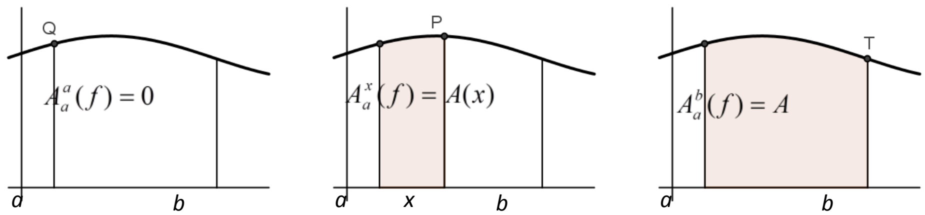

Figura 6

Observemos (Figura 6) que este movimiento genera la región cuya área queremos calcular, de manera tal que, conforme el punto sobre la curva se desplaza desde la posición correspondiente a $x = a$ (punto Q) , hasta la correspondiente a $x = b$ (punto T), el área bajo la curva varía desde cero hasta el valor total buscado. Para cualquier valor intermedio de x el área sería la indicada por $A(x)$ en la Figura 6 (centro).

Ahora bien, siendo G y E (Figura 7) dos puntos de la curva, infinitamente próximos entre sí, cuando el punto se desplaza de G a E, las coordenadas x y y tendrán incrementos dx $(= CD = GH)$ y dy $(= HE)$, respectivamente, y la correspondiente diferencial del área, es decir, el elemento de área, será el área del trapecio $CDEG$. Así pues:

$$dA = \text{área del trapecio } CDEG$$
$$dA = \text{área del rectángulo } CDHG + \text{área del triángulo } GHE$$
$$dA = f(x)dx + \frac{1}{2}dx\,dy = f(x)dx$$

Además sabemos que $A(a) = 0$ (Figura 7, izquierda), y que $A(b) = A$ es el área que queremos calcular, así que si F es una primitiva de f, se tendrá:

$$A_a^b(f) = \int_a^b f(x)\,dx$$

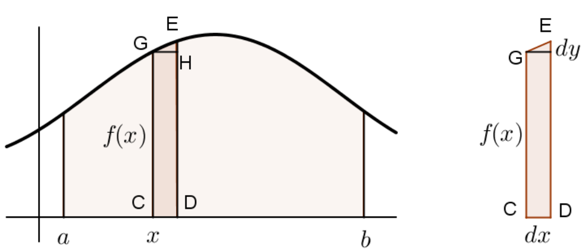

Figura 7

Por ejemplo, si C es la parábola definida por $y = kx^2$, con $k > 0$, el área bajo esta curva, desde $x = 0$ (vértice) hasta $x = b$ será:

$$A_0^b(f) = \int_0^b kx^2\,dx = \frac{1}{3}kx^3\Big|_{x=0}^{x=b} = \frac{1}{3}ab^3$$

Notemos que el área del rectángulo en el que está inscrito el sector parabólico es $b(ab^2) = ab^3$, así que el sector parabólico, que aparece sombreado en la figura 8, cubre exactamente la tercera parte del rectángulo en el que está inscrito.

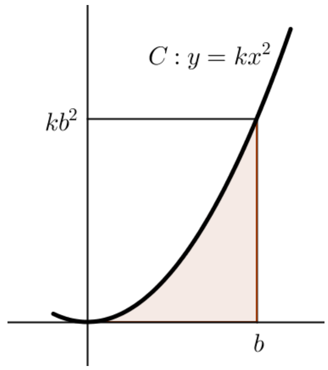

Figura 8

Este es el mismo resultado que obtuvo Arquímedes hace casi dos y medio milenios, con la gran diferencia que se requiere de adquirir mucho conocimiento y entrenamiento para sólo entender la demostración del resultado y otro tanto para entender cómo llegó Arquímedes al mismo.

Después de esta presentación se propondrá a los profesores participantes algunos problemas de carácter geométrico (rectificación de curvas, cuadratura de figuras planas y cubatura de figuras sólidas) para ser abordadas con este proceso.

5. CONSIDERACIONES FINALES

A pesar de que es ampliamente reconocido que la presentación de los conceptos del Cálculo, teniendo como concepto central al de límite, es prácticamente inaccesible para la mayoría de los estudiantes de bachillerato o de ingeniería, los trabajos de investigación en Matemática Educativa se siguen desarrollando alrededor de la metodología o del recurso de la tecnología, pero permanece la visión de que los infinitesimales no son permitidos.

Aquí se comenta un esfuerzo en esta dirección que se lleva a cabo en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma del Estado de México, desde hace poco más de dos décadas, esperando compartir la preocupación de que en el proceso educativo se tenga como propósito primordial que los estudiantes entiendan y usen los conceptos del Cálculo, si bien no con el rigor lógico que algunos profesores han esperado desde hace más o menos un siglo.

6. REFERENCIAS

Arcos, I. (2000). *Acerca de la enseñanza del cálculo en escuelas de ingeniería. Un acercamiento infinitesimalista*. Tesis doctoral. Cinvestav-IPN, México.

Arcos, J. I., Guerrero, M., Sepúlveda, A. y García J. (2007). Desarrollo Conceptual del Cálculo. Toluca, México: Kali.

Arcos, I. (2011). *Cálculo infinitesimal para estudiantes de ingeniería*. 3ª edición. Toluca, México: Kali.