



DIFICULTADES EN EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO VARIACIONAL EN PROFESORES DE BACHILLERATO

Mario Caballero Pérez, Ricardo Cantoral Uriza
macaballero@cinvestav.mx, rcantor@cinvestav.mx
Cinvestav-IPN
Medio superior

Resumen

Los resultados de investigaciones enmarcados en el Pensamiento y Lenguaje Variacional han mostrado la existencia de dificultades en profesores para abordar situaciones de variación, pero no se ha estudiado las razones que las originan. En este trabajo nos propusimos analizar esas causas mediante un conjunto de actividades que permitieron analizar las estrategias de respuesta a las que recurrían los profesores. Los resultados muestran que las dificultades para desarrollar un pensamiento variacional se encuentran en la centración en utilizar de forma mecánica o forzada algún conocimiento matemático cuyo uso garantiza poder dar respuesta a las actividades. La centración en los objetos matemáticos no sólo no deja ver el carácter variacional del Cálculo, sino que también es el origen de las dificultades para el desarrollo del pensamiento variacional.

Palabras clave: *Pensamiento variacional, variación, profesor.*

1. INTRODUCCIÓN

En el presente escrito exponemos los resultados derivados de una investigación que tenía por objetivo analizar las causas que originan el surgimiento de dificultades en profesores de bachillerato al llevar a cabo actividades enmarcadas en el Pensamiento y Lenguaje Variacional (Pylvar). Esta investigación surge al considerar el estudio de la variación como un elemento necesario en el aprendizaje del Cálculo, pero que no es propiciado en los salones de clase, dejando en su lugar un aprendizaje basado en recursos memorísticos (Reséndiz y Cantoral, 2003). Dado que el profesor juega un papel fundamental como gestor del aprendizaje del alumno consideramos necesario que tenga desarrollado este pensamiento variacional para poder propiciarlo en sus alumnos. Sin embargo, los trabajos sobre profesores enmarcados en el Pylvar muestran que existen dificultades para abordar satisfactoriamente situaciones de variación. Por ejemplo, en el trabajo de González (1999) se propone una actividad para decidir sobre el signo de la primera y segunda derivada, a la que responden usando recursos memorísticos como la idea de pendiente y concavidad, pero ante el signo de la tercera derivada presentan dificultades y errores en sus respuestas que se manifiestan en el uso de “teoremas factuales”, que consisten en afirmaciones basadas en las propiedades de los signos de la primera y segunda derivada y que son extrapolados para argumentar sobre la tercera derivada. No se recurre en ningún momento al estudio de la variación presente en las gráficas, lo que permitiría a los participantes construir argumentos sólidos que les permitan responder a la actividad. Consideramos no se ha explorado lo suficiente las razones que originan el surgimiento de estas dificultades, aspecto esencial para cualquier propuesta que pretenda incorporar ideas variacionales al conocimiento del profesor. Es por ello que en este trabajo nos enfocamos en analizar cuáles son las causas que ocasionan esas dificultades a los profesores para desarrollar un pensamiento variacional.

Nuestra hipótesis sostiene que las causas que originan estas dificultades para desarrollar un pensamiento variacional en profesores de bachillerato consisten en que ante una situación que involucra el estudio de la variación y el cambio, el pensamiento de los profesores los lleva a

centrarse en utilizar algún conocimiento matemático que dominen y que previamente los condujo a un resultado satisfactorio, de manera que su uso le garantice poder dar respuesta a las situaciones que se le plantean. Esto se manifiesta mediante el uso de propiedades, teoremas o reglas matemáticas, o en la centración por encontrar y usar expresiones analíticas de funciones que le permitan desarrollar sus respuestas, sin detenerse a realizar un análisis de las causas que originan los fenómenos descritos en esas situaciones, es decir el cambio y la variación que experimentan esos fenómenos. Para corroborar nuestra hipótesis diseñamos un conjunto de situaciones de variación que nos permitieron identificar las estrategias de respuesta a las que recurren los profesores, y de las cuales identificamos aquellas que no corresponden a un pensamiento variacional y las analizamos a partir de la hipótesis planteada.

2. ELEMENTOS TEÓRICOS

Para lograr nuestro objetivo nos apoyamos de la teoría Socioepistemológica, dado que nos interesó analizar las prácticas propias del estudio de la variación que favorecen y permiten el surgimiento y significación de un determinado concepto, noción, proceso o procedimiento (Cabrera, 2009). Esta teoría se fundamenta en que son las prácticas las que favorecen la construcción del conocimiento matemático, lo que implica un énfasis distinto que caracteriza a esta teoría: pasar de los objetos a las prácticas. Este enfoque se sustenta en la tesis de que los objetos son creados en ejercicio de prácticas normadas socialmente (Cantoral, Farfán, Lezama y Martínez, 2006), llamadas Prácticas Sociales, entendiéndolas como normativas de la actividad humana, no es lo que se hace, sino aquello que nos hace hacer lo que hacemos (Covián, 2005). Este énfasis en las prácticas permite vislumbrar la importancia de salir de un dominio propiamente matemático para incorporar otras prácticas de referencia (ingeniería, medicina, biología, etc.), que permiten dar sentido y significado a los conceptos bajo estudio.

Para poder identificar qué estrategias usadas por los profesores corresponde al uso de un pensamiento variacional y cuáles no, se necesitaron criterios para realizar esta diferenciación, para lo cual se realizó una caracterización de los elementos que conforma el Pylvar. El Pylvar enfatiza en el carácter variacional de las ideas matemáticas y no únicamente en su manejo simbólico y analítico. La idea base de esta línea es el estudio del cambio y la variación, nociones que dieron vida y permitieron el desarrollo de las ideas del Cálculo. El interés por estudiar el cambio en los fenómenos se deriva de una necesidad inherente al ser humano, la necesidad de predecir, que se fundamenta en el hecho de que el cambio posee herencia, “un estado posterior de un fenómeno de variación depende de las circunstancias que caracterizan el estado inicial” (Cabrera, 2009, p. 57). El proceso de cambio de un estado a otro es por tanto más importante que los estados mismos, lo que a su vez requiere de “mecanismos de cuantificación de las variables y de sus variaciones, debido a que el proceso de cambio lo podemos registrar y analizar a partir del estudio de la forma en que varían las variables que entran en juego en el fenómeno” (Cabrera, 2009, p.57), identificando aquello que cambia, cuantificando ese cambio y analizando la forma en que se dan esos cambios. Algunos elementos que lo conforman son los siguientes:

Situación Variacional (SV): Entenderemos por una situación variacional al conjunto de problemas cuyos tratamientos demandan la puesta en juego de estrategias variacionales y que requieren establecer puntos de análisis entre diversos estados del cambio.

Argumentos Variacionales (AV): Una SV se caracteriza por el empleo de argumentos de tipo variacional que recurren al análisis del cambio y de su cuantificación. Estos argumentos según Cantoral (2000) son utilizados por las personas cuando “hacen uso de maniobras, ideas, técnicas,

o explicaciones que de alguna manera reflejan y expresan el reconocimiento cuantitativo y cualitativo del cambio en el sistema u objeto que se está estudiando”. Son este tipo de argumentos los que permiten dar explicación a las SV.

Códigos Variacionales (CV): Consisten en la expresión oral o escrita del cambio y la variación, y que son articulados para generar los AV. Estos códigos pueden consistir en frases, dibujos, tablas o ademanes, que dan cuenta del análisis variacional que se realiza.

Estrategia Variacional (EV): Consiste en una forma particular de razonar y actuar ante una SV, y que posibilita el encarar y explicar dichas situaciones. Las EV permiten reconocer aquello que cambia, así como estudiar cómo y cuánto cambia dentro del sistema. Estas estrategias son caracterizadas por Salinas (2003), de donde se retoma y complementa:

- **Comparación:** Está asociada a la acción de establecer diferencias entre estados, uno anterior y uno posterior, o bien, dos estados de dos fenómenos diferentes, lo que permite identificar cambios y poder analizarlo con base en las características de su variación.
- **Seriación:** Consiste en analizar varios estados y no únicamente dos, con el objetivo de encontrar una relación o propiedad entre ellos.
- **Predicción:** Está asociada a la acción de poder anticipar un comportamiento, estado o valor, luego de realizar un análisis de la variación en estados previos, de manera que se sintetiza y abstrae esta información en modelos predictivos. Por ejemplo, dada una sucesión se pregunta por el número que corresponde a una posición posterior, e incluso una anterior.
- **Estimación:** A partir de conocer la variación de un fenómeno en estados previos, se proponen nuevos estados o comportamientos a corto plazo de manera global, a diferencia de la Predicción, donde los estados propuestos son locales. Por ejemplo en el análisis de temperaturas, la Estimación se puede usar para saber si habrá un crecimiento o disminución, en tanto que la Predicción para decir hasta qué punto crecerá, o saber algún valor específico de la temperatura dentro de algún tiempo.

Estructura Variacional Específica (EstV): Consisten en los conocimientos matemáticos o científicos que se usan en una SV para darle explicación, y en las que se apoyan las EV para realizar el estudio de la variación.

Tareas Variacionales: Consisten en actividades, acciones y ejecuciones que permiten organizar el estudio de la variación dentro de una SV en acciones y objetivos específicos, dentro de contextos particulares (gráfico, analítico, numérico, etc.).

3. ASPECTOS METODOLÓGICOS

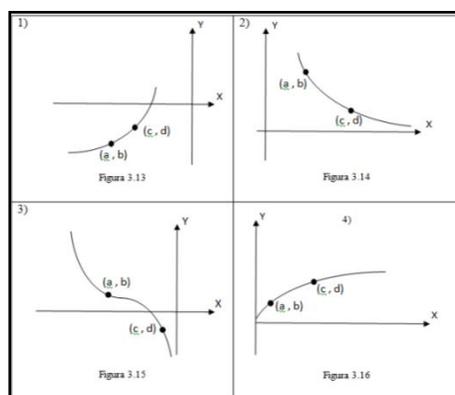
Para lograr nuestro objetivo se diseñaron actividades en las que el estudio de la variación es necesario para llegar a una solución válida. Por ejemplo, las actividades contienen gráficas con comportamientos variacionales similares, de manera que el uso de las propiedades de la primera y segunda derivada no es suficiente. En este mismo sentido se preguntó sobre el valor numérico de la segunda derivada, ya que en el discurso matemático escolar no hay una herramienta directa para dar respuesta, se requiere de un análisis de la variación.

La población consiste de profesores de bachillerato, que por lo menos habían ofertado un curso de Cálculo Diferencial o Integral, Pre-Cálculo, o asignaturas similares. La muestra corresponde tanto a profesores de instituciones públicas como privadas de México, siendo cinco hombres y

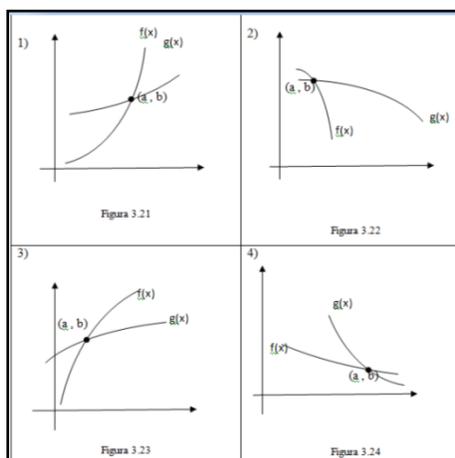
una mujer, cuyas edades oscilan entre 26 y 35 años, y entre 3 y 8 años de experiencia docente. El método con el que se lleva a cabo esta investigación consiste en entregar a los profesores un cuadernillo que contiene las actividades antes señaladas y un cuestionario para incluir algunos datos personales del profesor. Una vez recopilados los datos, se procedió a identificar aquellas estrategias que reflejan un uso de ideas variacionales, y aquellas que no recurren a él, para lo cual nos basamos en la caracterización realizada al Pylvar. Una vez analizadas las respuestas se procedió a compararlas con nuestra hipótesis, con el fin de validarla o rechazarla.

A continuación se muestran algunos ejemplos de las primeras dos actividades de un total de cuatro que fueron diseñadas para la investigación:

Actividad 1: A partir de las siguientes gráficas determina si el valor numérico de la primera derivada en a es mayor, menor o igual al valor numérico de la primera derivada en c . En cada caso justifica el procedimiento realizado.



Actividad 2: A continuación se presentan segmentos de las gráficas de dos funciones f y g , las cuales se cortan en mismo punto. ¿Es $f''(a)$ mayor, menor o igual a $g''(a)$? Detalla el razonamiento empleado en cada inciso.



4. RESULTADOS

De las respuestas de los profesores se pudieron identificar diversas estrategias de respuesta, que agrupamos en nueve tipos, y dividimos en dos grupos como se muestra en la siguiente tabla:

		Descripción	
Grupo 1	Analiza las inclinaciones (pendientes) de las rectas tangentes para determinar en qué punto la primera derivada es mayor.	V1	
	Analiza la variación de la primera derivada para determinar en qué gráfica la segunda derivada es mayor.	V2	
	Analiza la forma de la gráfica para determinar cuál presenta mayor variación	V3	
	Identifica el tipo de variación indicada y realiza las gráficas considerando que reflejen esa variación	V4	
	Analiza la variación en los datos proporcionados para encontrar algún patrón o comportamiento.	V5	
	Utiliza las características particulares de funciones específicas para analizar la variación de la gráfica.	V6	
Grupo 2	Propone una función específica de la que conoce, o encuentra, su expresión analítica para operar con ella.	NV1	
	Establece una o más propiedades que relacionan el valor de la derivada con alguna característica de la gráfica.	NV2	

Tabla 1. Tipos de estrategias de respuesta identificadas.

El grupo 1 consta de las estrategias que hacen uso de un pensamiento variacional para responder a las actividades, en tanto que el grupo 2 consiste en aquellas estrategias que no hacen uso de un pensamiento variacional. Esta diferenciación se realizó con base en el análisis de las respuestas y tomando en cuenta la caracterización del Pylvar.

Un ejemplo del grupo 1 son las respuestas plasmadas por el Profesor D a la actividad 2, pues hace uso de la estrategia de Seriación al analizar el comportamiento variacional de las gráficas en una vecindad cercana al punto de intersección de las gráficas, y con base en ello determina el tipo de variación que presenta, para después usar la estrategia de Comparación para determinar cuál de las dos gráficas presenta mayor variación, y por tanto mayor valor de la segunda derivada en el ese punto. Para ello se apoya en el uso de la pendiente de la tangente y de la forma en que crece o decrece, lo que corresponde a una EstV. El uso de esta estrategia permite la generación del AV que guía las respuestas y que se articula por medio de los CV apreciables en frases como “alrededor del punto a los cambios de x con respecto de y son mayores en $f(x)$ que en $g(x)$ ”.

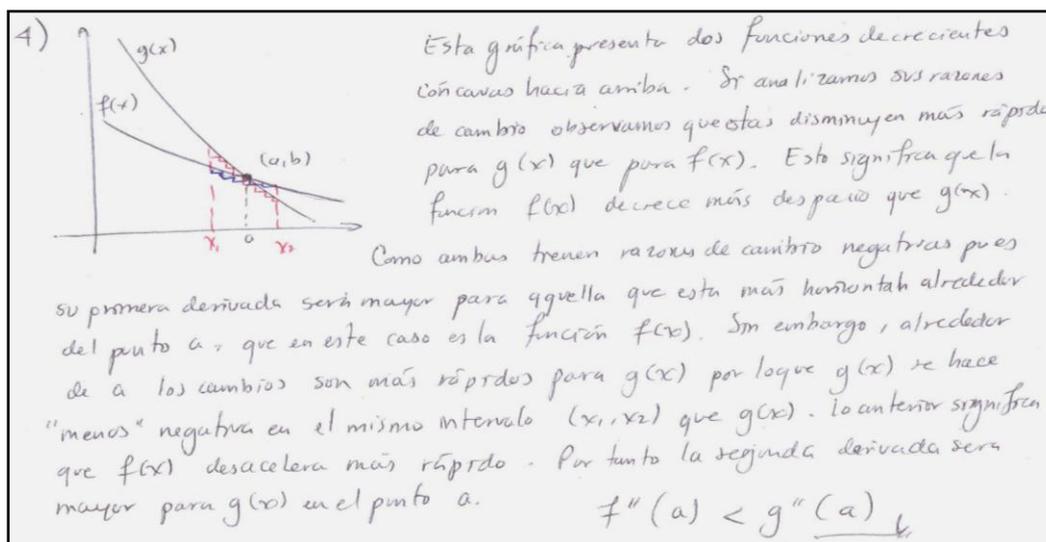


Figura 1. Respuesta del Profesor D a la actividad 2.

Del grupo 2, la estrategia NV1 consiste en asumir que las gráficas corresponden a un tipo particular de función, y con base en ello establecer una expresión analítica para desarrollar una respuesta, aun cuando se haga sobre supuestos que no son válidos. Por ejemplo, en el caso de profesor C en la actividad 2 asume que las gráficas corresponden a funciones cuadráticas, y propone dos expresiones analíticas para encontrar su derivada y ver en cuál la segunda derivada es mayor, pero al asumir que las funciones son cuadráticas concluye que la información presentada es insuficiente. Este tipo de respuestas hace que no sea necesario recurrir al estudio de la variación, pues el profesor se apoya en el “hecho” de que las funciones son cuadráticas.

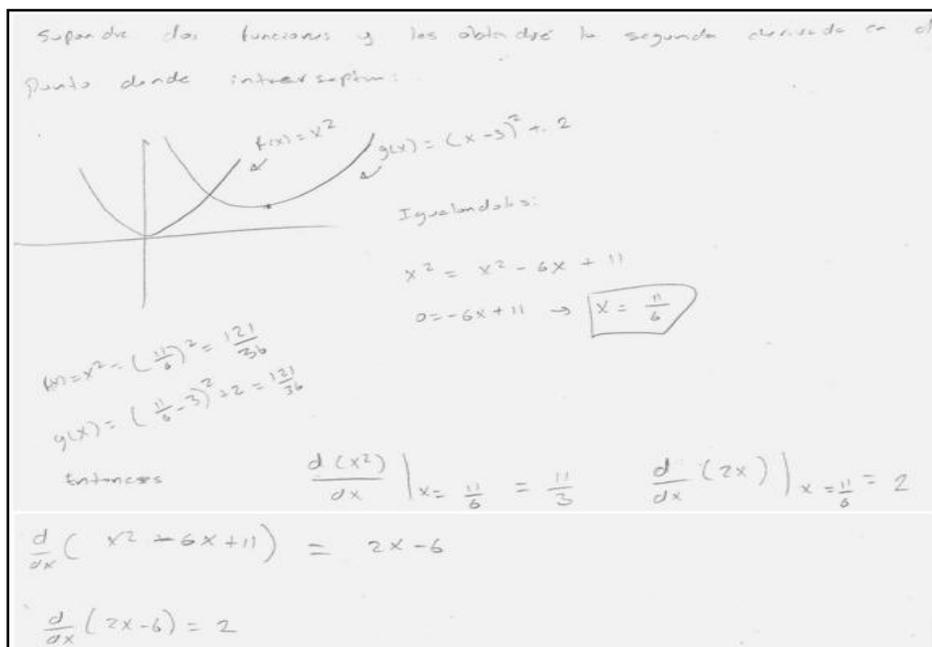


Figura 2. Respuesta del Profesor C a la actividad 2.

La segunda estrategia del grupo 2 es la NV2, que consiste en establecer propiedades matemáticas que permitan al profesor proporcionar una respuesta a las actividades planteadas. No obstante, el uso que se observó de estas propiedades en las actividades no fue siempre válido, y en muchas ocasiones, las mismas propiedades eran incorrectas. Por ejemplo, en la respuesta del profesor F a la actividad 1, se plantea la propiedad “si la función es no decreciente, la derivada es también no decreciente”, y con base en ello proporciona las respuestas.

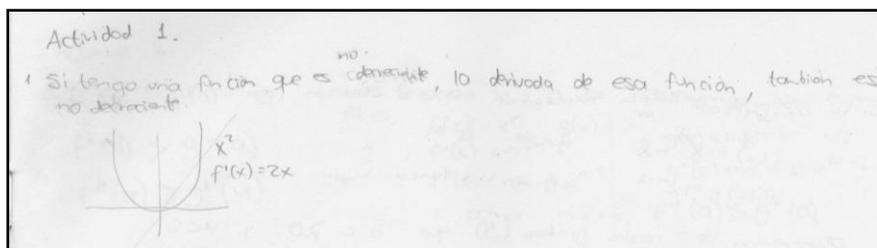


Figura 3. Respuesta del profesor F a las actividad 1.

Dicha propiedad únicamente es válida cuando la primera y la segunda derivada tienen el mismo signo, sin embargo el profesor hace uso de ella en todos los incisos sin importar esto. Cabe señalar, que más que una falta de conocimiento matemático, estas acciones parecen responder a una necesidad por tener un referente para garantizar una respuesta, lo que hace que el profesor

“adapte” su conocimiento a las actividades, lo que resulta en la creación de “teoremas factuales”, como se reporta en González (1999).

Otro ejemplo de la centración en el uso de propiedades lo encontramos en las respuestas del profesor F a la actividad 2, donde analiza los valores de los exponentes de funciones polinómicas que considera corresponde a las gráficas presentadas:

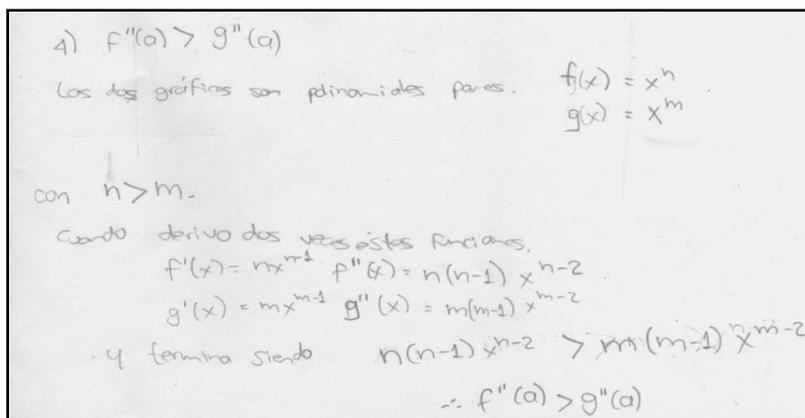


Figura 4. Respuestas del profesor F a la actividad 2.

Este análisis consiste en suponer que las gráficas corresponden a funciones polinomiales con exponente par m y n , en donde la función con mayor exponente será aquella cuya gráfica este “más horizontal”. Después el profesor deriva estas funciones polinomiales y compara, según los valores de m y n , las expresiones resultantes para determinar cuál tiene mayor valor de la segunda derivada. Estas acciones del profesor parecen corresponder a un pensamiento variacional debido a que se comparan las expresiones analíticas para determinar cual posee mayor valor de la segunda derivada. No obstante, observamos que esta estrategia no es usada para analizar la variación, sino que sirve como justificación para el uso de una propiedad, que consiste en que la segunda derivada con mayor valor corresponde a la función con exponente más grande. El profesor usa la estrategia de Comparación para verificar el resultado que se obtiene, no para generar el argumento de respuesta, como sería bajo un pensamiento variacional.

5. CONCLUSIONES

En este trabajo nos enfocamos en analizar cuáles son las causas que ocasionan dificultades en profesores para desarrollar un pensamiento variacional, los resultados derivados del análisis a las respuestas de los profesores permiten concluir lo siguiente:

El uso de las estrategias del grupo 2 era “forzado”, en el sentido de que se debía asumir datos extras que no eran siempre válidos, como suponer que las gráficas correspondían a una función en particular, o en hacer uso de propiedades que no eran válidas en ese contexto. La centración en este tipo de estrategias no permite al profesor adaptarse a las características de cada situación, sino que se ven en la necesidad de forzar su uso a cada una de las situaciones, lo que no propicia analizar la variación de los fenómenos en juego, en el caso de este trabajo la variación de las gráficas, y por tanto, su uso dificulta el desarrollo de un pensamiento variacional. La centración en los objetos matemáticos no sólo no deja ver el carácter variacional del Cálculo, como ha sido establecido en otras investigaciones (Ver Reséndiz, 2004), sino que también es el origen de las dificultades para el desarrollo del pensamiento variacional.



6. REFERENCIAS

- Cabrera, L. (2009). *El Pensamiento y Lenguaje Variacional y el desarrollo de Competencias. Un estudio en el marco de la Reforma Integral de Bachillerato*. Tesis de maestría no publicada, Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN. México, D.F., México.
- Cantoral, R. (2000). Situaciones de cambio, pensamiento y lenguaje variacional. En R. Cantoral, R.M. Farfán, F. Cordero, J.A. Alanís, R.A. Rodríguez y A. Garza (Eds.) *Desarrollo del Pensamiento Matemático* (pp. 185-203). México, DF: Trillas.
- Cantoral, R.; Farfán, R.; Lezama, J.; Martínez, G. (2006). Socioepistemología y representación: Algunos Ejemplos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, Número Especial, pp. 83-102.
- Covián, O. (2005). *El papel del conocimiento matemático en la construcción de la vivienda tradicional: El caso de la Cultura Maya*. Tesis de maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México, D.F., México.
- González, R. (1999). *La derivada como una organización de las derivadas sucesivas: Estudio de la puesta en funcionamiento de una ingeniería didáctica de resignificación*. Tesis de maestría no publicada. Centro de investigaciones y de estudios avanzados del IPN. México, D.F., México.
- Reséndiz, E. y Cantoral, R. (2003). El papel de la variación en las explicaciones de los profesores: Un estudio en situación escolar. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 6(2), 133-154.
- Reséndiz. (2004). *La variación en las explicaciones de los profesores en situación escolar*. Tesis de doctorado no publicada, Centro de Investigaciones y de Estudios Avanzados del IPN, México, D.F., México.
- Salinas, P. (2003). *Un estudio sobre la evolución de ideas variacionales en los cursos introductorios al cálculo*. Tesis de maestría no publicada, Centro de Investigaciones y de Estudios Avanzados del IPN, México, D.F., México.