# ESTUDIANTES DE SEXTO GRADO DE PRIMARIA CONSTRUYEN EL CONCEPTO DE NÚMERO $\pi$

Karen Rosario Calderón Ignacio, María Guadalupe Cabañas Sánchez
cair.k@hotmail.com, gcabanas.sanchez@gmail.com
Universidad Autónoma de Guerrero
Básico

**Resumen**
En esta investigación nos interesamos porque un grupo de estudiantes de sexto grado de primaria, construyeran el concepto de número π mientras resuelven problemas prácticos del contexto. El estudio se sustenta de la Teoría de la Actividad, que concibe a la acción como el eje rector de toda actividad realizada por el sujeto. La actividad desde esta teoría, transcurre por tres momentos principales: Orientación, Ejecución y Control (Linares, 1995). Los resultados evidencian, que una mayoría de estudiantes construyó el concepto de pi, en el proceso de resolución de dos problemas que los ubicaron a determinar la relación que existe entre la medida de la longitud de la circunferencia, con el diámetro correspondiente.

**Palabras clave:** *Conceptos matemáticos, número* $\boldsymbol{\pi}$.

## 1. INTRODUCCIÓN

Los conceptos son una categoría especial en la enseñanza de la matemática, pues constituyen la forma fundamental con que opera el pensamiento matemático (Ballester *et al*, 1992; Cantoral, *et al*, 2000). En la enseñanza de la matemática, se distinguen conceptos sobre objetos, relaciones y operaciones, y su comprensión por los estudiantes, contribuye en su capacidad para representar la relación entre la matemática y la realidad objetiva (Ballester *et al*, 1992). Los conceptos sobre objetos designan clases de objetos reales que se pueden caracterizar por medio de representantes (ej. circunferencia, número real, número primo, etc.). Los conceptos sobre operaciones por su parte, designan acciones que se efectúan sobre los objetos, y como ejemplo se presenta: adicionar, bisecar, dividir a, etc. Por cuanto a los conceptos sobre relaciones, reflejan las relaciones existentes entre los objetos, tales como: menor que, divisor de, límite de, etc.

La investigación que se reporta está articulada a un concepto matemático sobre objeto, el número π. El número π es una constante que relaciona el perímetro de una circunferencia con la amplitud de su diámetro. Es un número irracional que tiene infinitas cifras decimales. En la escuela primaria, los estudiantes empiezan a familiarizarse con este número mientras calculan el perímetro de una circunferencia y el área del círculo, pero no es claro para ellos su significado, menos aún cómo se obtiene. Esto sucede en gran medida, porque este concepto matemático aparece a nivel de uso sin una mediación previa de cómo se obtiene o de dónde proviene, por ser un número irracional. Esta clase de números como bien se sabe, en nuestro país, México, su estudio está previsto hasta tercero de secundaria. No obstante lo anterior, nuestro punto de partida es que los estudiantes de sexto grado de primaria, pueden experimentar de manera empírica, cómo se obtiene ese número y con ello, den significado a fin de contribuir en el desarrollo de su pensamiento tanto aritmético como geométrico. Es así que el objetivo de este trabajo, consistió en que los estudiantes de sexto grado de primaria construyeran de manera empírica el concepto de número π, mientras resuelven problemas prácticos del contexto. La consecución de este objetivo, requirió del diseño de una situación de aprendizaje, que permitiera una intervención dinámica de parte de los participantes en el proceso de construcción de este concepto matemático, desde el punto de vista didáctico y de la forma de organización de la actividad en el salón de clases.

## 2. FUNDAMENTOS TEÓRICOS

El estudio toma como base aspectos teóricos y metodológicos planteados en Ballester et al (1992) sobre la formación de conceptos matemáticos, quienes definen un concepto como el reflejo mental de una clase de individuos, procesos, relaciones de la realidad objetiva o de la conciencia, sobre la base de sus características invariantes. Se sustenta además, de la Teoría de la Actividad sistematizada por Galperin (véase Linares, 1995).

Desde la perspectiva de la Teoría de la Actividad, la construcción de conceptos matemáticos se sustenta de una serie de acciones mentales, por ello se concibe a la acción como la piedra angular de toda actividad (Linares, 1995). Leontiev (1981), citando en Dolores y García (2012) sostiene que una actividad está constituida por sujeto, objeto, acciones y operaciones. El sujeto es la persona (o grupo) comprometida con la actividad. El objeto (como objetivo), es mantenido por el sujeto y motiva la actividad, generando una determinada dirección de acción, que puede cambiar a lo largo de la actividad. A las acciones normalmente se les entiende como tareas, y son llevadas a cabo de forma automática. Estas acciones a su vez, pueden realizarse con diferentes operaciones de acuerdo a cómo varían sus condiciones (Castillo, 2011). A su vez, la actividad tiene cuatro momentos principales en que transcurre: orientación, ejecución, control y corrección (Linares, 1995). Para los propósitos de este trabajo, se desarrollaron las tres primeras fases.

*Fase 1: Orientación hacia el problema*. Esta fase, consta de tres etapas: a) Aseguramiento del nivel de partida, b) Motivación hacia el objetivo, y c) Orientación hacia el objetivo (ver aspectos metodológicos).

*Fase 2: Ejecución.* Consiste en la creación de una situación de partida mediante la preparación y elaboración de objetos de análisis correspondientes al objetivo. Asimismo, de la selección de una estrategia, sobre todo orientando como proceder ante definiciones similares, y determinación correspondiente de los pasos de las acciones para la investigación de determinados objetos, atendiendo a la extensión del concepto.

*Fase 3: Control.* Esta etapa, se establecen las características comunes y no comunes de los objetos o pares de objetos observados (en este caso, del número $\pi$), o búsqueda de las relaciones por las cuales se puede sustituir el definiendum (algo que está o va a ser definido) por ejemplo. En la definición de relaciones, operaciones etc. La culminación de esta etapa, se da a partir de la formulación de la definición o de una explicación del concepto, educción de las características comunes a un sistema de características necesarias y suficientes.

Estos aspectos, fueron fundamentales en el proceso de construcción del concepto de número $\pi$.

## 3. ASPECTOS METODOLÓGICOS

En la formación de conceptos se distinguen dos vías principales (Ballester, *et al*, 1992), la vía inductiva y la deductiva. En la primera el concepto se desarrolla por medio de descripciones y explicaciones, hasta llegar a la definición. En la segunda, se parte de la definición del concepto y mediante el análisis de ejemplos se descubre el contenido y extensión del concepto. Para nuestros fines y de acuerdo al objetivo de esta investigación, se siguió la vía inductiva.

En Ballester, *et al*, (1992), se considera además, que en el proceso de elaboración total de un concepto se distingue entre lo que se quiere *definir un concepto* o *introducir un concepto.* Definir lo conciben como el hecho de que los estudiantes elaboren una definición exacta. Introducir un concepto significa, que los estudiantes conozcan todas las características que definen al concepto pero no una definición explícita. Esta distinción es importante, porque el nivel de construcción del concepto de π, que se esperaba de los estudiantes, fue el de introducción del concepto.

Las etapas que se siguieron en el proceso de construcción del concepto de π, fueron las siguientes:

- *Aseguramiento del nivel de partida.* Consistió en asegurar que los estudiantes dispusieran de los conocimientos matemáticos previos necesarios para actuar sobre la situación. En este caso, conocimientos matemáticos relacionados con las operaciones básicas con los números naturales y decimales, el concepto de circunferencia y sus elementos. Esta etapa, se previó a través de la revisión de los programas de enseñanza.
- *Motivación y orientación hacia el objetivo*. Se motivó a través de problemas prácticos del contexto, que ubicaron a los estudiantes a medir con dos tipos de instrumentos (hilo y regla graduada).
- *Disposición de objetos de análisis (representantes y no representantes del concepto en cuestión*). La resolución de los problemas implicaba para el estudiante, el análisis o la construcción de formas circulares. Seguidamente, se les ubicó a medir el contorno de las circunferencias y sus respectivos diámetros. Con base en ello, determinaron el valor que resulta de dividir la medida que obtuvieron de la circunferencia con su diámetro.
- *Análisis de los objetos respecto a características comunes y no comunes.* Se ubicó a los estudiantes a analizar los valores que obtuvieron como resultado de dividir la longitud de las circunferencias entre sus respectivos diámetros.
- *Establecer un sistema de características necesarias y suficientes*. En esta etapa, se esperaba que los estudiantes reconocieran: a) que siempre obtenían un número entero con una parte decimal, b) que el número entero siempre era tres, c) que el número decimal era de dos cifras, y; d) que si la parte decimal aumentaba era mínima.
- *Formulación de una explicación,* consistió en que los estudiantes lograran identificar que el número resultante del cociente era precisamente una aproximación de π.

### A. La situación de aprendizaje y contexto de aplicación

La situación se constituyó de dos secciones, una denominada Para aprender y la otra, Síntesis. La primera, se conformó de dos actividades, a objeto de que los estudiantes reconocieran que el valor que se obtiene del cociente de la medida de la longitud de una circunferencia entre su respectivo diámetro, es un número racional llamado pi. La sección síntesis, tuvo como fin, que los estudiantes formularan por escrito, una explicación acerca de las características invariantes que tiene el número que obtuvieron, en este caso, π.

Las actividades se resolvieron en un ambiente de lápiz y papel, durante una sesión de dos horas, con un grupo de estudiantes que cursaban sexto grado de primaria. El desarrollo de las actividades estuvo dirigido por el primer autor de este artículo, quien además constituyó los equipos de trabajo, esto es, siete de cuatro integrantes, y dos de cinco.

El papel que jugó el investigador en el aula fue de orientador en algunas dudas y dificultades que los estudiantes presentaron, como lo veremos más adelante.

### B. Los participantes

La muestra con la que se trabajó estuvo constituida por 36 estudiantes (11-12 años de edad) matriculados en sexto grado en una escuela primaria ubicada en la ciudad de Chilpancingo, del estado de Guerrero. Los antecedentes académicos de los participantes, consistieron de contenidos matemáticos relacionados con los significados de las operaciones básicas con los números naturales y decimales, el concepto de circunferencia y sus elementos.

### C. Recolección de datos y su análisis

Los datos provienen de las producciones escritas de los estudiantes, así como de las evidencias que tomaron a través de las videograbaciones, y de las notas del investigador.

## 4. ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

El análisis es resultado de la revisión y control del proceso general en que se desarrolló la situación de aprendizaje, esto es a partir de los momentos en que transcurre la actividad: orientación, ejecución y control. En seguida, se describen las actividades que conformaron la situación de aprendizaje, con los resultados obtenidos.

### A. Sección *para aprender*

### 1). Actividad 1. La bicicleta (parte 1)

Esta actividad situó a los estudiantes a construir con regla y compás, una bicicleta como la que se muestra en la Figura 1, considerando las medidas siguientes: La rueda mayor deberá medir 10 cm de diámetro y la menor, 3 cm. Una vez hecho lo anterior, se le pidió que realizaran lo siguiente:

- Medir con un hilo la longitud de la rueda de menor diámetro, y cortar el pedazo que tuviese esa medida.
- Medir con la regla graduada, el pedazo de hilo que representa la longitud de la rueda menor (o circunferencia menor).
- Con base en los datos se les pidió que explicaran qué valor se obtiene si se divide la longitud de la circunferencia entre su respectivo diámetro.

*Figura 1*

El propósito de esta actividad, era que determinaran un valor aproximado, como resultado de dividir la longitud de una circunferencia entre y el valor de su diámetro.

### 1.1) ¿Qué encontramos?

Al inicio de esta actividad, nos percatamos, que aun cuando los estudiantes habían trabajado con la circunferencia a nivel de su construcción con regla y compás, así como a identificar el radio y el diámetro, tuvieron dificultades con ambos aspectos. En este caso, no sabían cómo construir las circunferencias, en razón de que el dato que les proporcionó fue el diámetro y ellos, estaban más familiarizados a trabajar con el radio. Incluso, no

*Figura 2*

recordaban cómo usar la regla y el compás para construirlas, por ello, se les dieron instrucciones básicas de cómo realizarlas y además, que la magnitud a usar en ese proceso, era un radio de 5 cm. Una vez que construyeron la circunferencia de radio menor, midieron su longitud con el hilo que se les proporcionó y cortaron el pedazo correspondiente, para seguidamente, medirlo con la regla, tal como se muestra en la Figura 2. En seguida, determinaron el valor del cociente entre la longitud de la circunferencia (a partir del pedazo de hilo) con su respectivo diámetro. Como resultado de este cociente, aparecieron dos tipos de valores: 3.13 y 3.14. En esta actividad, sólo interesó que los estudiantes arribaron a este tipo de números.

**2) Actividad 2. La bicicleta (parte 2)**

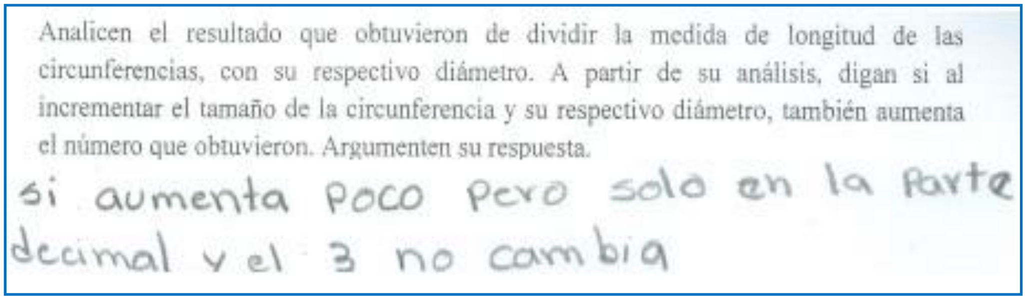
En esta actividad se pidió a los estudiantes que repitieran el procedimiento anterior, sobre la circunferencia de radio mayor. En seguida, debían registrar en una tabla los valores que obtuvieron en ambas actividades, es decir, el resultado que obtiene de dividir la longitud de la circunferencia (menor y mayor), entre la medida de su correspondiente diámetro. Con base en ambos datos, ellos debían compararlos a objeto de que reconocieran de que son casi iguales, excepto por el valor de la parte decimal.

**2.1) ¿Qué encontramos?**

En general, los equipos procedieron como en la actividad anterior para medir con el hilo la longitud de la circunferencia de radio mayor, es decir, superponiendo el hilo en el contorno. No obstante, encontramos que un equipo cambió su estrategia, ya que usaron pegamento para colocar el hilo sobre la circunferencia, argumentando que era para tener mayor precisión y no se les moviera, dato curioso que nos deja ver la habilidad que tienen estos estudiantes, tal como se muestra en la Figura 3.

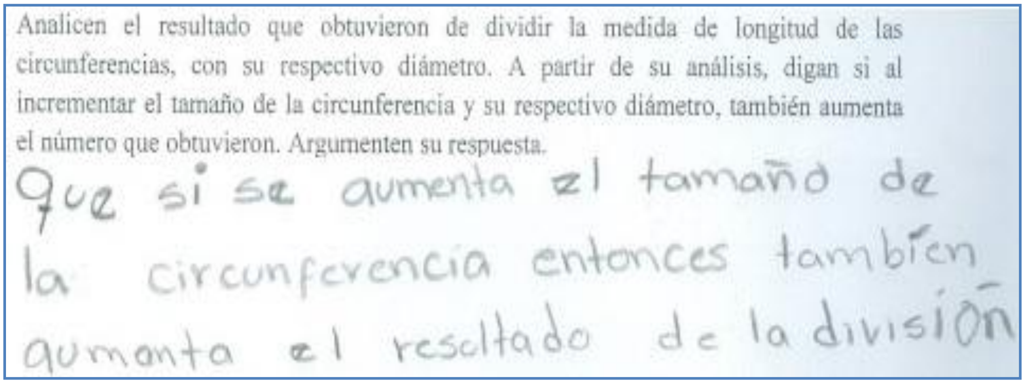
*Figura 3*

Una vez que todos midieron la longitud de la circunferencia, cortaron el pedazo de hilo de ese tamaño. Sin embargo, una mayoría, al tratar de medir el pedazo de hilo, se dio cuenta que era más grande que el tamaño de la regla, lo que se constituyó en una dificultad, pues no trataron de medir el pedazo sobrante y sumarlo a los 30 cm que medía la regla. Nos percatamos de este hecho, por preguntas de los integrantes de esos equipos. Es así que les indicó a todo el grupo, que midieran la otra parte del hilo y lo sumaran a 30 cm. Una vez que obtuvieron ese dato, lo dividieron entre la medida del diámetro de la circunferencia. En esta etapa, nos percatamos de que cuatro de los nueve equipos que se constituyeron, se dieron cuenta de que al aumentar la longitud de la circunferencia y su respectivo radio, el valor que obtienen de dividirlos, aumenta mínimamente en la parte decimal y que el número entero permanece constante, esto es, de que son “casi iguales” (Véase el Caso 1, en Figura 4). En cambio los cinco quipos restantes, coincidían en sus argumentos en el sentido, de que si se aumentaban las longitudes (de la circunferencia y el radio) también aumentaría el valor del cociente (Caso 2, en Figura 5). Este tipo de argumentos, provenían de los equipos que tuvieron dificultad para medir un pedazo de hilo mayor a la regla graduada.


Analicen el resultado que obtuvieron de dividir la medida de longitud de las circunferencias, con su respectivo diámetro. A partir de su análisis, digan si al incrementar el tamaño de la circunferencia y su respectivo diámetro, también aumenta el número que obtuvieron. Argumenten su respuesta.

si aumenta poco pero solo en la Parte decimal y el 3 no cambia

*Figura 4*. Caso 1.


Analicen el resultado que obtuvieron de dividir la medida de longitud de las circunferencias, con su respectivo diámetro. A partir de su análisis, digan si al incrementar el tamaño de la circunferencia y su respectivo diámetro, también aumenta el número que obtuvieron. Argumenten su respuesta.

Que si se aumenta el tamaño de la circunferencia entonces tambien aumanta el resoltado de la division

*Figura 5*. Caso 2.

**B. Sección *Síntesis***

**1). Actividad 3. Síntesis**

Esta actividad consistió en que los estudiantes lograran identificar y establecer que el número resultante del cociente era precisamente una aproximación del número π.

**1.1) ¿Qué encontramos?**

Los estudiantes lograron reconocer que el número que obtuvieron al dividir la longitud de la circunferencia entre la medida de su correspondiente diámetro, se llama π. Lo reconocieron, en razón de que ya habían trabajado con él a nivel de uso, mientras calculaban el área de una circunferencia. Esto dio pie para hacer una discusión grupal. Por ello se invitó a dos equipos a mostrar sus resultados al resto del grupo, quienes aceptaron participar, tal como se muestra en la Figura 6.

*Figura 6*

Es así que explicaron cómo se realizó la actividad y de qué forma lograron identificar el número que estaba en juego. Mencionaron que el número era π y que su valor es 3.14 aproximadamente. Haciendo referencia que al observar el número que obtuvieron lo relacionaron con π, debido a que les era familiar, pues lo habían trabajado anteriormente en otras lecciones (en el cálculo del área de la circunferencia). No obstante, reconocieron que no sabían de donde resultaba, dado que solo se los proporcionaban de manera directa diciéndoles que era 3.1416. Con esta actividad, reconocen que aprendieron cómo se obtiene este número llamado π.

## 5. Reflexiones finales

Los estudiantes construyeron empíricamente el concepto de π, al medir el contorno de una circunferencia con un hilo, para después con su regla graduada, verificar cual es la medida del pedazo de hilo que corresponde a esa longitud, y entonces proceder a realizar el cociente de la longitud de dicha circunferencia entre su correspondiente diámetro. Con base en el análisis de las características del número que obtuvieron como resultado de este cociente, así como por la familiaridad que tenían en términos de uso con este número, lo llamaron número pi. De esta manera, ellos comprendieron de donde se obtiene el número π.

Se reconoce que un obstáculo fue la medida que se dio con respecto a la longitud del diámetro de la circunferencia ya que al momento de que los estudiantes trataron de medir el pedazo de hilo, se dieron cuenta que era más grande que el tamaño de la regla, lo que constituyó en una dificultad, pues en un principio no trataron de medir el pedazo sobrante para luego sumarlo a los 30 cm que medía la regla. Lo sumaron, una vez que se intervino. Otro obstáculo, apareció, cuando se les dijo que construyeran una circunferencia a partir de la medida del diámetro. Ello, porque habían trabajado con este tipo de construcciones, a partir de la medida del radio. Ambos obstáculos, entran en la categoría de los obstáculos didácticos, pues aparecen por el privilegio de cierto de tipo de actividades, como el caso de trabajar con medidas de longitud menores a la de una regla graduada, al trabajar con instrumentos de medición de ese tipo.

## 6. Referencias


Ballester, S., Almeida, B., Álvarez, A., Arango, c., Cruz, I., García, M., González, J., Hernández, S., Santana, H., Torres, P., Villegas, E. y Machado, A. (1992). *Metodología de la enseñanza de la matemática II*. Cuba: Pueblo y Educación.

Castillo, J. (2011). *Desarrollo de la habilidad de visualizar en geometría*. Tesis de maestría no publicada. Universidad Autónoma de Guerrero. México.

Cantoral, R., Farfán, R., Cordero, F., Alanís, J., Rodríguez, R. y Garza, A. (2000). *Desarrollo del pensamiento matemático*. México: Trillas.

Dolores, C. y García, M. (2012). Una propuesta para contribuir a la comprensión de la derivada. En R. Flores (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 25*, 385-393. México, DF: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Linares, G. (1995). *La enseñanza de las matemáticas en la enseñanza superior*. México: Universidad Autónoma de Guerrero.