ORGANIZACIÓN DIDÁCTICA DE UN EMBRIÓN DEL GRADIENTE

Alberto Camacho, Bertha Ivonne Sánchez, Adriana Engler, Verónica Valenzuela
camachoalberto@hotmail.com, ivonnesanchez10@yahoo.com, aengler@fca.unl.edu.ar, vvalenzuelamx@yahoo.com.mx
IT Chihuahua II, IT Cd. Jiménez, UN del Litoral-Argentina, IT Chihuahua II
Superior

Resumen
El documento ofrece un estudio sobre la inmersión de saberes externos que ocurre durante la modelación de las organizaciones didácticas (OD) sujetas a la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD). Se presenta una transposición de conocimientos de la práctica social de delineación conocida como del claroscuro, que fue utilizada ampliamente en el diseño de mapas topográficos en la Topografía mexicana de finales del siglo XIX. De esta última se ha tomado la técnica que lleva a determinar la Línea de Mayor Pendiente (LMP). La LMP es un embrión que dio origen al concepto actual de gradiente que se enseña en el nivel superior de enseñanza de la ingeniería. El propósito es justificar la inclusión de esta técnica durante la modelación de las OD a partir de las seis funciones tecnológicas que proponen Castela y Romo (2011) y cuestionar el resultado con la justificación que hace la TAD de la técnica dominante del gradiente en el ambiente escolar.

Palabras Clave: *Funciones tecnológicas, práctica social, técnica, tecnología.*

1. INTRODUCCIÓN

En este escrito se plantea un embrión del concepto de Gradiente que se enseña en el nivel superior de enseñanza de los cursos de ingeniería tanto en México como en Argentina. Éste forma parte de la construcción en la historia de ese concepto y ha sido tomado de una práctica social con la que se diseñaban los planos topográficos en la forma desarrollada por el ingeniero mexicano Francisco Díaz Covarrubias a finales del siglo XIX. La práctica de delineación es concebida en su Manual de Topografía (1890) como método del claroscuro, el cual incorpora una técnica con la que se determina la Línea de Mayor Pendiente (LMP). El propósito es justificar la introducción en el aula de esa noción desde la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) a partir de las seis funciones tecnológicas que proponen Castela y Romo (2011). La justificación surge de una organización conocida como épure praxeológica, en el sentido de las autoras citadas, y tiene lugar debido a que Valenzuela, Camacho y Cuevas (2013) diseñaron un modelo de instrucciones para dinamizar con esa noción las técnicas y procedimientos contenidos en el concepto actual de gradiente que se usan para su enseñanza. Interesa además cuestionar los contrastes epistemológicos surgidos por la irrupción de conocimientos externos entre los acercamientos de los saberes contenidos en la LMP y aquellos del concepto de gradiente en su definición incorporada en la praxeología matemática dominante.

Por su naturaleza, la práctica social de delineación del claroscuro se consolida en una Institución ajena a la matemática y su enseñanza, quien provee de nociones extra matemáticas en un contexto aislado del ambiente variacional y teórico en el que descansa la definición dominante del gradiente. Su introducción ayuda a dinamizar las técnicas contenidas en dicha definición, y forma parte de un proceso didáctico previo a su obligada definición en el aula.

2. ÉPURE PRAXEOLÓGICA

Se parte de los siguientes principios fundamentales de la TAD:

I. Los efectos transpositivos sobre las Organizaciones Matemáticas y en las Organizaciones Didácticas en la TAD modifican su estructura teórica, fincándose así una ausencia de *cuestionamiento tecnológico* que da lugar a diferentes fenómenos epistemológicos.
II. El objetivo central de la TAD es la noción de Institución, en tanto esta última afirma la relatividad de las prácticas matemáticas (Artigue, Boch y Gascón, 2010).
III. Los saberes matemáticos contenidos en la praxeologías matemáticas dominantes, suelen no funcionar para dar respuesta a ciertos fenómenos didácticos.
IV. Una Institución se concibe como aquellas ideas, reglas o principios, que norman y determinan las actividades de los seres humanos, por ejemplo: las Instituciones escolares, un teorema, una práctica social, una técnica de amplio uso, etc.

Según Chevallard (2007) en el marco de la TAD, la unidad básica de estudio conocida como Praxeología Matemática [T, τ, θ, Θ], o bien organización matemática (OM), muestra que T es una tarea por resolver en un ambiente escolar, τ es la técnica con la cual se puede abordar la tarea T, θ la tecnología de la que se desprende la técnica (teoremas, axiomas, definiciones, etc.) y Θ el marco teórico que soporta la organización. En ese esquema se parte del supuesto teórico de que la teoría Θ justifica a la tecnología θ, la tecnología θ justifica a su vez la técnica τ, en tanto la técnica τ justifica a las tareas T. Esto último a partir de las normas de validación aceptadas en la Institución usuaria del conocimiento. La TAD *modela* la actividad matemática mediante la determinación de praxeologías que representan una estructuración coherente de los modos del *hacer* y *saber*. Donde:

1) El saber-hacer o la *praxis* [T, τ] y

2) El saber o *logos* [θ, Θ].

La tecnología teórica θ es:

> (…) quien, en una institución o persona reemplaza la *función* tecnológica: justifica y esclarece la técnica τ relacionada con un tipo de tareas T, permitiendo reconstruirla cuando ella es *dada* (Chevallard, 2007, p. 714). (…) una tercera función corresponde al empleo más actual del término tecnología: la función de producción de técnicas (Chevallard, 1998, p. 4).

El siguiente es un ejemplo de la definición dominante del concepto de derivada quien *produce*, y de la cual se *desprende*, la técnica τ correspondiente:

θ: $f'(x) = lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$, si es que ese límite existe.

La técnica τ contenida θ es un procedimiento de cuatro pasos que se desprenden de ella:

τ: Regla de los cuatro pasos:
τ_1: Se incrementa $f(x) \to f(x+\Delta x)$
τ_2: Se establece la diferencia: $f(x+\Delta x) - f(x)$
τ_3: Se dividen ambos miembros por Δx
τ_4: Se aplica $lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

Por su lado, Castela y Romo (2011) han puesto en evidencia que las seis funciones tecnológicas: *describir, facilitar, motivar, evaluar, validar* y *explicar* técnicas que, al centro de la TAD, se relacionan con aquellas de Chevallard (1998 y 2007) como, justificar: *validar* y, esclarecer:

describir, facilitar, motivar, evaluar, y *explicar*. Según las autoras estas funciones son, en los más de los casos, saberes no validados por la tecnología θ de la que se desprenden.

Las seis funciones tecnológicas son enunciadas de la siguiente manera:

> *Describir la técnica:* La producción de un discurso que se esfuerce por caracterizar el tipo de tareas así como describir las acciones que componen una técnica, es considerado como un dominio del saber no identificado en el control de la técnica misma.
>
> *Validar la técnica:* Corresponde a lo que se entiende bajo el término justificar en los documentos que definen la noción de praxeología. Los saberes aquí considerados establecen que la técnica produce adecuadamente aquello que se afirma que produce y que las acciones que la componen permiten atender los objetivos que le son asignados.
>
> *Explicar la técnica:* Son conocimientos que llevan a analizar cómo es que la técnica y sus diferentes acciones pueden lograr los objetivos a que se refiere.
>
> *Facilitar el accionar de la técnica:* Los saberes aquí considerados permiten a los usuarios utilizar con eficacia y con cierto confort la técnica.
>
> *Motivar la técnica:* Estas habilidades son orientadas a la práctica. Participan en la inteligencia: son los objetivos que se justifican racionalmente con acciones y que muestran su razón de ser.
>
> *Evaluar la técnica:* Los saberes incorporados se colocan sobre la extensión, las condiciones y los límites de una técnica relacionada con las tareas del tipo *T*. Pueden de igual manera relacionarse con la ergonomía de la técnica desde el punto de vista de los usuarios.

Entre los saberes que se contemplan en las seis funciones algunos se determinan en el marco de una teoría matemática y otros surgen de la práctica matemática, quien provee su validación en un contexto empírico al centro de la Institución usuaria I_u. Por tal razón, estas últimas funciones deben ser incluidas en una tecnología práctica θ^p que las justifique. Un modelo praxeológico *extendido*, que incluye ambas tecnologías, es propuesto en el Esquema 1.

$$\left[\begin{array}{cccc} T, & \tau, & \theta^{th} & \Theta \\ & & \theta^{p} & \end{array}\right]\begin{array}{l}\leftarrow P(M)\\ \leftarrow I_u\end{array}$$

Esquema 1. Modelo praxeológico *extendido* propuesto por Castela y Romo (2011), en el que se incluye una tecnología práctica θ^p.

El esquema anterior determina lo que las autoras conciben como *épure* praxeológica, es decir, una OM que incorpora ambas tecnologías, siendo la tecnología θ^p de naturaleza *práctica* o empírica.

Sin embargo, la brecha que se abre entre los conocimientos contenidos en θ^p y θ^{th}, en el modelo propuesto en el Esquema 1, hace que la posición de θ^p sea incierta por la teoría matemática que valida a la praxeología. Ante esto último, Castela y Romo (2011) consideran que:

> *P*(*M*) debe encargarse del proceso de limpieza o separación mediante los cuales se eliminan los elementos prácticos, eventualmente incorporados a la praxeología por sus creadores –generalmente por aquellos dedicados a la matemática-. El resultado es una *épure* praxeológica (…) donde el nivel práctico debe ser forjado por la institución usuaria, tomando apoyo sobre la diversidad de temas que en esa institución pondrán en práctica la técnica. (p. 17)

En el modelo praxeológico, la *épure* determina eliminar el contenido práctico y empírico que da validez a las funciones tecnológicas, sujetándolas de la teoría matemática que a su vez sostiene a la praxeología. Este proceso transpositivo tendrá por producto una praxeología matemática más enriquecida por los elementos tecnológicos arrojados por la *épure* misma.

Si bien el proceso de separación de los elementos prácticos es encargada a aquellos investigadores que producen matemática, también es cierto que, en el caso donde la tecnología práctica se determina a partir de prácticas sociales ajenas a la Institución praxeológica, la brecha entre θ^{p} y θ^{th} es semejante a los procesos de construcción de conocimiento que han ocurrido a lo largo de la historia. Incluso en ciertos casos extremos θ^{th} se puede ver como el límite al que tiende θ^{p}. Como se podrá apreciar en el caso que se plantea más adelante.

Particularmente, Matheron y Noirfalise (2007) tomaron *prestadas* actividades prácticas de la topografía de mediados del siglo XX para incorporarlas en micro-espacios de trabajo en el liceo francés —hojas tamaño carta de papel milimétrico en el que se diseñaron triángulos con distancias inaccesibles— lo que dio pie para legitimar la cantidad de datos que se requieren para *determinar un triángulo*. Lo anterior es justificado de la siguiente manera:

> Nuestro trabajo sigue así una de las direcciones fundadoras de la didáctica de las matemáticas: la concepción de una enseñanza que favorezca en clase una génesis artificial de los saberes matemáticos por estudiar. (p. 6)

Con esta inclusión, los investigadores pretendían que los alumnos contaran con un *mínimo* de la *cuestión generatriz* y la hicieran suya: la cuestión generatriz es la parte del conocimiento, técnicas, instrumentos y procedimientos, contenidos en la práctica social que se tomó de la topografía. En este caso, el mínimo aportado al problema de origen fue la adecuación que los autores hicieron del micro-espacio de trabajo para inducir a los alumnos a las *actividades topográficas* que sirvieron de tránsito para institucionalizar el conocimiento en el salón de clase.

Como se puede ver en la siguiente cita, el mínimo aportado permeó la práctica escolar y además comprendió el uso de instrumentos de observación, métodos para *visar* ángulos a través de dichos instrumentos, medición de distancias inaccesibles en la forma en que lo hicieron los topógrafos durante el siglo pasado, etc. Actividades que, incluso, fueron comentadas en el contexto del aula a los estudiantes, para así dar paso a la transposición instrumental y de saberes en el micro-espacio, sin mediar en justificar su inmersión en este último.

> Los alumnos dispusieron de sus instrumentos de geometría y de «aparatos de observación». La situación tuvo por función simular sobre la hoja de papel un problema efectivo de determinación de una distancia inaccesible, problema que un topógrafo o geómetra pudo haber resuelto. (pp. 8-9)

La cuestión generatriz es la idea que hay detrás del papel que jugó el estudio de los triángulos, es decir, las técnicas utilizadas durante años por los topógrafos, quienes permiten la medición de distancias inaccesibles. La condición fundamental para adoptar las cuestiones generatrices es que hayan sido utilizadas en innumerables ocasiones y a lo largo de muchos años: en esencia, prácticas sociales de amplia aceptación y uso por diferentes comunidades epistémicas.

La transposición de conocimientos, procedimientos e instrumentos, determinados por las técnicas contenidas en la cuestión generatriz, y los elementos de la matemática que le dan respuesta, condicionan a su vez a la tecnología teórica θ^{th} dominante. Por consecuencia, también a las seis funciones tecnológicas, abriendo así una amplia brecha de naturaleza epistemológica entre el contenido de los conocimientos prácticos y teóricos en juego, justificando aún más la inclusión y definición de una tecnología práctica:

> (…) puesto que se rompe con la pertinencia del modelo praxeológico al confrontarlo con la realidad epistemológica de otra ciencia (Castela y Romo, 2011).

En este sentido, es complicado pensar cómo eliminar, e incluso justificar al centro de la teoría matemática, la incorporación de argumentos prácticos e instrumentales que Matheron y Noirfalise (2007) incluyeron en las técnicas que destacan para precisar en los datos suficientes para determinar un triángulo. De lo anterior se desprende que las tecnologías prácticas θ^p surgen tanto de la práctica matemática, así como de las actividades contenidas en las prácticas sociales desarrolladas en disciplinas ajenas a toda teoría matemática. El ejemplo que se muestra enseguida atestigua esto último.

3. La praxeología dominante del concepto de gradiente

El modelo praxeológico que domina en el salón de clase para la enseñanza del gradiente es comúnmente adoptado de los libros de texto en uso a través de la aplicación (producto interno) del operador Nabla $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$ sobre una función escalar *f*, cuya definición da por resultado un campo vectorial $\nabla \cdot f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$ (siempre y que las derivadas existan). Después de desarrollar la aplicación se determina el vector gradiente para casos particulares de funciones escalares en un punto (x_0, y_0).La siguiente OM se aproxima a dicho modelo.

T: Calcular el gradiente del campo escalar determinado por la función $f(x,y) = x\vec{i} + y^2\vec{j} + \mathrm{sen}z\,\vec{k}$ en el punto $(1,2,0)$.

τ: La técnica τ contenida en θ es un procedimiento que involucra derivar cada componente del campo en la derivada parcial correspondiente, como:

$$\nabla \cdot f(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial x}(x\vec{i}) + \frac{\partial}{\partial y}(y^2)\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}(\mathrm{sen}z)\,\vec{k}.$$ De lo cual queda:

$$grad(f) = \vec{i} + 2y\vec{j} + \cos z\,\vec{k}.$$

En el punto (1, 2, 0), resta el vector gradiente:

$$grad(f)_{(1,2,0)} = \vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}.$$

θ^{th}: En cálculo vectorial, el gradiente de un campo escalar *f* es un campo vectorial expuesto en la forma: $\nabla \cdot f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$. Donde $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$ es el operador Nabla aplicado sobre *f*.

Θ: (No se contempla la teoría matemática ya que no entra en el análisis del presente estudio).

Después de establecer la definición se busca dar un *sentido* real a la aplicación $\nabla \cdot f$: la situación más útil, entre otras, es considerar los mapas topográficos como campos escalares cuyas vertientes hacen las veces de gradientes en el sentido de la definición. Un ejemplo clásico que se ofrece a los estudiantes para su comprensión es el siguiente:

> Consiste en considerar el mapa de curvas de nivel de una montaña como campo escalar que asigna a cada pareja de coordenadas latitud—longitud un escalar altitud (campo escalar de 2 variables). En este caso el vector gradiente en un punto genérico indicará la dirección de máxima inclinación de la montaña. Nótese que el vector gradiente será perpendicular a las curvas de nivel del mapa.

Sin embargo, el discurso tradicional no aclara con precisión los conceptos fundamentales de las configuraciones de los mapas que pertenecen a las prácticas sociales asociadas a la topografía, es el caso de las nociones de curva de nivel, vertiente, LMP, *crestas,* equidistancia entre curvas, controles horizontal y vertical, escalas, etc. En este sentido la transposición de conocimientos es limitada a una realidad hipotética poco confiable para mejorar el entendimiento del concepto.

4. IRRUPCIÓN TRANSPOSITIVA DE UNA TÉCNICA EXTERNA CONTENIDA EN UNA PRÁCTICA SOCIAL

En este apartado se muestra parte de una práctica social de delineación reconocida históricamente como del *claroscuro,* utilizada para el diseño de plantas topográficas. El claroscuro fue en sí misma una práctica de dibujo topográfico con la que se daba la sensación de profundidad y relieve a los mapas topográficos, método que fue abandonado a principios del siglo XX. La práctica incorpora una técnica que lleva a la determinación de la LMP, que en esencia se refiere a la configuración más abrupta entre las curvas de nivel de porciones de terrenos, es decir: vertientes, arroyos, ríos, etc.

La LMP y la técnica con la que se construye, anteceden al actual concepto de gradiente que se enseña en los cursos de Cálculo Vectorial del nivel superior de enseñanza. La Figura 1 muestra el diseño en planta de un cerro, colocado en Díaz Covarrubias (1890): obsérvese la sensación de relieve en la misma, así como las vertientes figuradas entre las partes más oscuras de la configuración. El método partía fundamentalmente de graduar el *sombreado* proporcionándolo de acuerdo a los declives del terreno. A partir de esta idea, la teoría para representar los accidentes verticales se sujetaba a las curvas de nivel, de modo que la pendiente entre cada dos curvas fuera: $p = \frac{e}{D}$, donde *e* representa la equidistancia entre curvasyΔ la separación o proyección horizontal entre cada dos de estas.

Figura 1. Diseño de una porción de planta topográfica utilizando la técnica del claroscuro.

La tecnología práctica θ^p que fundamenta a la técnica, y que surge en este caso de la práctica social que tiene como referente a la topografía, consistía en que:

> (...) si en cualquier punto del terreno comprendido entre dos planos secantes, suponemos que se abandona un cuerpo pesado a la acción de la gravedad, este descendería a lo largo de la vertiente siguiendo la línea más corta, que es la perpendicular a las intersecciones del terreno con los planos secantes, llamada *línea de mayor pendiente* puesto que toma el mayor ángulo con el horizonte, respecto a cualquier otra línea que se tomara. (Díaz Covarrubias, 1890, p. 559)

Para establecer en la configuración la LMP, se identificaba ésta última sobre las *crestas* consecutivas entre cada dos curvas, trazándose enseguida una línea punteada continua que en esencia correspondía a la línea de pendientes críticas buscada. Se iniciaba el diseño a partir de dicho trazo con *plumazos* de tinta proporcionados del blanco contra el negro, extendiéndose a lo largo de la planta topográfica, dando así la sensación de profundidad y relieve a los accidentes del terreno.

Utilizando elementos de la técnica del claroscuro, en (Valenzuela, *et. al*, 2013) se estableció un modelo de instrucciones que llevó a sus alumnos de ingeniería a reconocer la LMP entre curvas de nivel, las instrucciones se condensan en el siguiente resumen:

> (…) interesa construir en el salón de clase el concepto de gradiente a través de: 1) Involucrar a los estudiantes en la técnica para la localización, determinación e interpretación geométrica de la LMP representada en mapas topográficos que se pueden obtener de la Web, 2) La determinación e interpretación requiere que los estudiantes tengan el control horizontal y vertical de la LMP, en el sentido de interpretar las escalas correspondientes sobre el mapa topográfico, 3) Los controles hacen necesaria la determinación de las longitudes horizontales entre curvas y las pendientes entre éstas últimas, 4) Como resultado final se espera que los estudiantes dibujen el control vertical de las pendientes a cierta escala, lo cual representará la imagen geométrica del gradiente analizado en el mapa. Lo anterior habrá determinado en los estudiantes un reconocimiento visual y geométrico del gradiente entre curvas de nivel, a partir de su significado asociado o LMP. (pp. 776-777)

Hay que destacar que previamente a las actividades mencionadas, los autores convinieron en explicar a los estudiantes los conceptos, nociones e instrumentos contenidos en la *cuestión generatriz* que se tomó de la práctica del claroscuro.

5. JUSTIFICACIÓN DE LAS FUNCIONES TECNOLÓGICAS

Las funciones tecnológicas del uso de la técnica se desprenden de la tecnología θ^p de la siguiente manera (los instrumentos utilizados en la práctica se consideran implícitos en la misma):

a) *Validar la técnica:* τ se deduce directamente de la definición θ^p citada:

   > (...) si en cualquier punto del terreno comprendido entre dos planos secantes, suponemos que se abandona un cuerpo pesado a la acción de la gravedad, este descendería a lo largo de la vertiente siguiendo la línea más corta, que es la perpendicular a las intersecciones del terreno con los planos secantes, llamada *línea de mayor pendiente* puesto que toma el mayor ángulo con el horizonte, respecto a cualquier otra línea que se tomara.

b) *Describir la técnica*: La descripción de τ se desprende de la definición anterior y consta del siguiente procedimiento:

   1) Sobre un mapa topográfico que contenga curvas de nivel, identificar la LMP de algún arroyo o vertiente,
   2) Trazar con línea punteada la LMP entre cada dos curvas,

3) Determinar las pendientes entre cada curva,
4) Dibujar a cierta escala la planta vertical de la LMP.

c) *Facilitar el empleo dela técnica*: Se eligen las curvas de nivel que establecen una vertiente, se siguen aquellas que en el mapa se aprecien como *crestas*, las cuales determinan las pendientes más críticas.

d) *Motivar la técnica:* La técnica τ es importante porque permite identificar la LMP, misma que antecede al concepto de gradiente.

e) *Explicar la eficiencia:* La técnica τ lleva a determinar con eficiencia la LMP que representa al gradiente de forma geométrica y sin el compromiso de conocer de principio la definición rigurosa del concepto.

f) *Evaluar la técnica*: La definición de LMP permite establecer un proceso que culmina con la construcción del concepto de gradiente. La parte inicial del proceso es la identificación de la LMP. De esta identificación se siguen otras dos etapas para culminar con la institucionalización del concepto de gradiente —estas dos etapas no se consignan en el presente estudio—.

En el Esquema 2, la tecnología teórica θ^{th} es incorporada como mera referencia de la técnica τ_i que surge de la tecnología práctica θ^{p} del problema citado. El modelo praxeológico es por demás incómodo, pues no solamente incluye la técnica que se recupera de la tecnología práctica, sino, incluso, los procedimientos p_i e instrumentos i_i asociados a la misma. En este caso las funciones tecnológicas se fincaron a partir de los conocimientos técnicos y de procedimiento contenidos en la práctica social que lleva a fijar sobre las curvas de nivel la LMP, alejadas —en extremo— de una teoría matemática y de la práctica matemática misma.

$$\begin{bmatrix} T, & \theta^{th}, & \text{—} \\ \text{—}\ (i_i, p_i, \tau_i), & \theta^{p}, & \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow I_u \\ \leftarrow P \end{matrix}$$

Esquema 2. La tecnología práctica no depende de la praxeología, sino de una Institución externa *P*, en este caso la práctica social asociada a la topografía.

6. ALGUNOS RESULTADOS

Un cuestionamiento de las técnicas, así como de su descripción, arroja los siguientes resultados:

1. La LMP se coloca en un ambiente geométrico elemental en el que se pudieran determinar los vectores gradiente entre curvas de nivel sin necesidad de una aplicación variacional como la contenida en $\nabla \cdot f$.Esta última es una etapa fundamental ante un posible proceso de institucionalización posterior al expuesto por Valenzuela, *et al* (2013).

2. La tecnología θ^{th} justifica la técnica que de ella se desprende, más no justifica la técnica que, a su vez, se desprende de la actividad desarrollada a partir de la LMP. De aquí que la definición que de esta última hace Díaz Covarrubias, se consolide en una tecnología práctica θ^{p} necesaria que justifica las seis funciones tecnológicas antes enunciadas.

3. Ambas técnicas, la que se desprende de θth y las producidas por θp, son complementarias para el desarrollo de actividades en el aula que llevan a la institucionalización del conocimiento, más su unión no establece una tecnología mixta que determine y mejore la estructura de la

praxeología dominante del concepto de gradiente, debido a los niveles de racionalización en que ambas se colocan. Aunque esto último bien merece un cuestionamiento más amplio.

7. CONCLUSIONES

En la situación donde la tecnología práctica θ^p surge de actividades ajenas a una teoría matemática y a la práctica matemática misma, la inmersión de conocimientos deja a esta última completamente alejada de la tecnología teórica límite θ^{th} que le sirve de referencia. En ese punto, las seis funciones tecnológicas se fincan como meras descripciones que se presentan como definiciones provisorias y que se ubican en cierta etapa de construcción del conocimiento. En el mejor de los casos, estas últimas tenderán a teorizarse gradualmente en el marco de la teoría matemática, conforme el conocimiento aproximado contenido en las prácticas sociales incorporadas tanto en la OM como en la OD, avance racionalmente hacia el grado de matematización en el que se encuentra la tecnología teórica.

Ante ello, la extensión del modelo praxeológico dominante —en el que se incluye a θ^p— es inevitable, además de teóricamente disfuncional, debido a que la tecnología θ^{th} queda *flotando* en la OM ya que deja de *justificar* y *esclarecer* las técnicas que se desprenden de θ^p. Se finca de esa manera una *épure* praxeológica que dará lugar a una investigación más profunda de la inmersión externa de saberes provocados desde la práctica social. No obstante, la cuestión más importante que debe cuidarse durante la modelación, es el encadenamiento entre los niveles de racionalización Institucional, de manera que el grado de matematización en los conocimientos contenidos en la OD y en los saberes externos que arroja la inmersión, queden sujetos de la teoría matemática que soporta la praxeología matemática dominante.

Algunas cuestiones quedan pendientes ¿Qué garantiza que las técnicas contenidas en las prácticas sociales que llevan a dinamizar las propias técnicas dominantes en las OD y OM, sean para ello suficientes? (la técnica contenida para la construcción de la LMP, no es suficiente para llegar a la institucionalización del gradiente). Si las técnicas no fueran suficientes y se contara con aquellos tramos faltantes, la modelación de la OD tendería a convertirse en segmentos de *procesos* de enseñanza, secuenciados a partir de ir concatenando los embriones de conocimiento para fincar en el aula sus propios niveles históricos de institucionalización. Esos procesos serían necesariamente contenidos en un modelo socioepistemológico, más que praxeológico.

7. REFERENCIAS

Artigue, M., Bosch, M. y Gascón, J. (2010). *Contributions of the anthropologic theory of the didactic*. Barcelona: Centre de Recerca Matemàtica Campus de Bellaterra.

Castela, C. y Romo, A. (2011). Des mathématiques a l´Automatique: Etude des effets de transposition sur la transformée de Laplace dans la formation des ingénieurs. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, (*31*), 1, 79-130.

Chevallard, Y. (1998). *Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques: L´approché anthropologique.*IUFM d'Aix-Marseille. Recuperado el 21 de marzo de 2013 en: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf.

Chevallard, Y. (2007). Passé et présent de la Théorie Anthropologique du Didactique. En Ruíz-Higueras, L. Estepa, A García, F. J (Eds.). *Sociedad, Escuela y Matemáticas. Aportaciones a la Teoría Antropológica de lo Didáctico* (pp. 705-746). Servicio de Publicaciones de la Universidad de Jaén. Impreso en España.

Diaz Covarrubias, F. (1890). *Manual de Topografía*. México: Imprenta del Gobierno en Palacio.

Matheron, Y., y Noirfalise, R. (2007). *Dynamiser l´étude des mathématiques dans l´enseignement secondaire (collège et lycée) par la mise en place d´AER et de PER*. Une recherche de la Commission inter-IREM (CII) didactique soutenu par l´INRP. Recuperado el 13 de marzo de 2013, de: http://educmath.inrp.fr/Educamath/ressources/cdamperes/testes-foundateurs.

Valenzuela, V., Camacho, A. y Cuevas, J. H. (2013). Gradiente. Línea de mayor pendiente. *Congreso Internacional de Investigación.* Juárez, Chihuahua, México: Academia Journals. Recuperado el 11 de junio de 2013 de: http://juarez.academiajournals.com/memorias2013.html.