

UNA APROXIMACIÓN A LA COMPRESIÓN DE LA FRACCIÓN EN PERÚ A TRAVÉS DE LOS LIBROS DE TEXTO

Wenceslao Quispe Yapo, *Universidad Nacional del Altiplano de Puno, Perú*

Jesús Gallardo Romero, *Universidad de Málaga, España*

RESUMEN

Con objeto de valorar la comprensión de la fracción en Perú desde un enfoque curricular, se lleva a cabo un análisis de libros de texto sobre una muestra de 20 textos escolares peruanos (1963-2005). El análisis realizado se centra en los siguientes elementos caracterizadores de la enseñanza y el aprendizaje de la fracción: significados, representaciones e ilustraciones, fenomenología y orientación metodológica. Atendiendo a estos elementos se llegan a identificar 3 periodos diferentes, en los que, a pesar de las carencias evidenciadas en la comprensión de la fracción, se aprecia una cierta evolución positiva en su tratamiento didáctico.

ABSTRACT

We carry out an analysis of 20 peruvian textbooks (1963-2005). The objective is to assess the understanding of the fraction in Peru with a curricular perspective. The analysis is centred in the following elements of teaching and learning of the fraction: meanings, representations and illustrations, phenomenology and methodological orientation. From these elements, we identify 3 different periods with limitations in the understanding but also with a certain positive evolution in the didactic treatment of the fraction.

Quispe Yapo, W., Gallardo Romero, J. (2009). Una aproximación a la comprensión de la fracción en Perú a través de los libros de texto. En M.J. González, M.T. González & J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 389-401). Santander: SEIEM.

INTRODUCCIÓN

En los últimos años, la Unidad de Medición de la Calidad Educativa del Ministerio de Educación del Perú (UMCE) ha venido poniendo de manifiesto carencias en el aprendizaje y la comprensión matemática del alumnado peruano (UMCE, 2001, 2004). Entre otras conclusiones, encontramos que en tercer grado de secundaria “[...] el 94,0% de estudiantes muestra no haber desarrollado adecuadamente las habilidades matemáticas requeridas para el grado que están culminando.” (UMCE, 2004, p. 219)

El concepto de número racional suele mostrarse entre los más afectados por tales dificultades de aprendizaje. Así por ejemplo, se concluye que la mayoría de estudiantes peruanos de 6° de primaria presentan limitaciones a la hora de representar cantidades y operar con fracciones homogéneas y expresiones decimales (UMCE, 2001).

Resultados desfavorables como éstos reclaman la necesidad de realizar esfuerzos más intensos y sistemáticos que los hasta ahora desplegados para mejorar la enseñanza de la matemática en el Perú. Por nuestra parte, con el análisis de libros de texto que aquí se presenta, aspiramos a proporcionar algunas claves curriculares con las que aproximarnos a las posibles causas de la deficiente comprensión de las fracciones por parte de los escolares peruanos. Partimos del supuesto de que la comprensión del conocimiento matemático está ligado a las experiencias matemáticas que se producen en aquellas situaciones donde interviene como medio de resolución y que el uso intencional del mismo en actividades pertenecientes a su ámbito fenómeno-epistemológico es lo que da cuenta de la comprensión de los estudiantes (Gallardo y González, 2006a). En base a esta idea, pretendemos analizar cómo los libros de texto utilizan en su enseñanza la estructura fenómeno-epistemológica vinculada a la fracción como medio para desarrollar su comprensión.

El análisis de textos desarrollado forma parte de una investigación más amplia que tiene por objeto interpretar aquellas particularidades sobre la comprensión de la fracción relacionadas con las prioridades que surgen en el uso de sus significados (Quispe, 2008). Dicha investigación también incluye un estudio empírico exploratorio realizado con profesores en formación donde se evidencia y caracteriza en términos de comprensión el fenómeno de interferencia entre significados que se produce al utilizar la fracción en distintas situaciones de su esfera epistemológica y fenomenológica (Gallardo, González y Quispe, 2008a).

METODOLOGÍA

Elementos del análisis

Nuestro análisis de libros de texto se apoya en la *dimensión fenómeno-epistemológica* del modelo operativo para la interpretación de la comprensión en matemáticas sobre el que venimos trabajando en los últimos años (Gallardo y González, 2006a, 2006b; Gallardo, González y Quispe, 2008a, 2008b). Para el caso de la fracción, esta dimensión exige la caracterización de las siguientes componentes:

I. Desde una perspectiva epistemológica, centramos la atención en el análisis de los significados y las representaciones más significativos dentro de cada texto.

(i) *Significados*. Identificamos los cinco significados¹ de la fracción usualmente constatados (Behr, Harel, Post y Lesh, 1992; Kieren, 1993; Escolano y Gairín, 2005):

-*Parte-todo*. Es el significado manifestado al considerar la fracción a/b como la relación existente entre dos cantidades específicas: un “todo” o unidad b (continua o discreta), representando un número total de partes iguales, y una “parte” a , destacando un número particular de esas partes iguales tomadas del total.

-*Cociente*. Significado que enfatiza la fracción a/b como operación de dividir un número natural por otro no nulo. En este caso, la fracción es el resultado de una situación de reparto donde se busca conocer el tamaño de cada una de las partes resultantes al distribuir a unidades en b partes iguales.

-*Medida*. Significado que tiene su origen al medir cantidades de magnitudes que, siendo conmensurables, no se corresponden con un múltiplo entero de la unidad de medida. La fracción a/b emerge entonces de la necesidad natural de dividir la unidad de medida en b subunidades iguales y de tomar a de ellas hasta completar la cantidad exacta deseada.

-*Razón*. Este significado muestra a la fracción como índice comparativo entre dos cantidades o conjuntos de unidades. La fracción a/b como razón evidencia la comparación bidireccional entre los valores a y b , siendo esencial el orden en el que se citan las magnitudes comparadas.

-*Operador*. Significado que hace actuar a la fracción como transformador o función de cambio de un determinado estado inicial. Así, la fracción a/b empleada como operador es el número que modifica un valor particular n multiplicándolo por a y dividiéndolo por b .

(ii) *Representaciones*. Se concretan los sistemas de representación más utilizados en el texto escolar, incluidas las *ilustraciones*, y se describen las principales *transformaciones* dentro de cada representación y *conversiones* entre los registros de representación (Duval, 1993, 2006). Nuestro modelo también reconoce la visión representacional de la comprensión al exigir del alumno el dominio de las representaciones de la fracción y las conexiones entre ellas.

II. Desde un punto de vista fenomenológico, se analizan en cada libro (a) el empleo de elementos históricos en su desarrollo didáctico, y (b) la contextualización de la fracción y sus aplicaciones en las tareas propuestas.

El análisis fenómeno-epistemológico se completa con otro de carácter metodológico destinado a: (a) identificar los objetivos didácticos del texto respecto a la enseñanza de la fracción, (b) caracterizar sus orientaciones metodológicas a través de las actividades propuestas, y (c) subrayar posibles errores de concepción en la presentación de los contenidos matemáticos.

Instrumento para la recogida de datos

Para el registro de la información utilizamos el instrumento presentado en la Tabla 1. En esencia, se trata de una parrilla destinada al registro pormenorizado de los elementos del análisis ya descritos. Los interrogantes incluidos en cada celda sirven para orientar la recolección de los datos.

¹ En esta ocasión, el término significado lo empleamos de manera equivalente al de constructo para referirnos a las interpretaciones básicas que organizan los contextos y situaciones donde tiene sentido el empleo de la fracción y forman parte de la propia naturaleza compleja del número racional positivo.

1. Significados y Conceptos	2. Ilustraciones Representativas	3. Análisis Representacional
¿Cuál es la definición de número racional que expone el texto? ¿Qué significados están presentes en la exposición de la fracción?	¿Qué variedad de ilustraciones interpretan los significados de la fracción?	¿Qué representaciones se utilizan para exponer el concepto y significados de fracción? ¿Qué tipo de transformaciones y conversiones se realizan en la exposición del contenido?
4. Análisis Fenomenológico		5. Aspectos Metodológicos
Aplicaciones a la vida cotidiana: ¿Los ejemplos, ejercicios y problemas están contextualizados a la vida cotidiana del estudiante? ¿El desarrollo de la fracción muestra aplicaciones y situaciones que modelan fenómenos de la realidad?		Objetivos e intenciones: ¿Se enuncian las intenciones, objetivos de la unidad o capítulo? Orientaciones metodológicas: ¿Qué orientaciones metodológicas se encuentran en los textos, de forma explícita e implícita?
Elementos históricos: ¿Qué elementos históricos de la matemática se utilizan como auxiliares didácticos? ¿Cómo se utilizan?		Problemas y ejercicios representativos: ¿Qué orientación tiene el enunciado de los ejercicios y problemas? Errores de concepción: ¿Se logra percibir errores en la presentación de los contenidos?

Tabla 1. Instrumento para la valoración cualitativa de la fracción en los libros de texto

Muestra de libros de texto

La muestra se compone de 20 libros de texto de matemáticas de secundaria, 16 de primero y 4 de segundo grado². Los años de edición están comprendidos entre 1963 y 2005³. Todos los textos fueron publicados por editoriales o filiales peruanas, principalmente de Lima. En el Anexo I se presenta un cuadro resumen con los datos bibliográficos de los libros analizados, incluyéndose un código para cada libro a fin de simplificar su identificación.

RESULTADOS

Significados de la fracción en la construcción del concepto de número racional

Por la forma como se presentan la construcción del número racional y los significados vinculados a la fracción, llegamos a establecer tres periodos diferentes en los libros de texto analizados.

Periodo A (década de los 60)

La ruta de construcción del concepto de número racional en este período se ajusta al diagrama de la Figura 1. En este periodo, representado por los textos L.T.

² Entre 1975 y 1982, el estudio de los números racionales estaba incluido en libros de texto de segundo grado. Esta es la razón que justifica la aparente desproporción en número entre los textos de primero y segundo grado de la muestra.

³ Con la investigación realizada pretendíamos mostrar, entre otras cosas, hasta qué punto el tipo de enseñanza de la fracción que se viene desarrollando en Perú condiciona la comprensión de este conocimiento matemático por parte de los escolares. Para ello, nos interesaba garantizar en lo posible que la mayoría de los profesores en activo y también los escolares hubieran estudiado la fracción a través de alguno de los textos analizados. Por esta razón decidimos iniciar el análisis de libros en los 60 y no extenderlo a décadas anteriores.

1963-A y L.T. 1963-B⁴, se introduce la fracción como resultado de la partición de una unidad en partes iguales (alícuotas), revelándose mayoritariamente los significados parte-todo y medida. No se aprecian evidencias suficientes de que otros significados distintos hayan sido considerados de manera intencional para la enseñanza de la fracción.

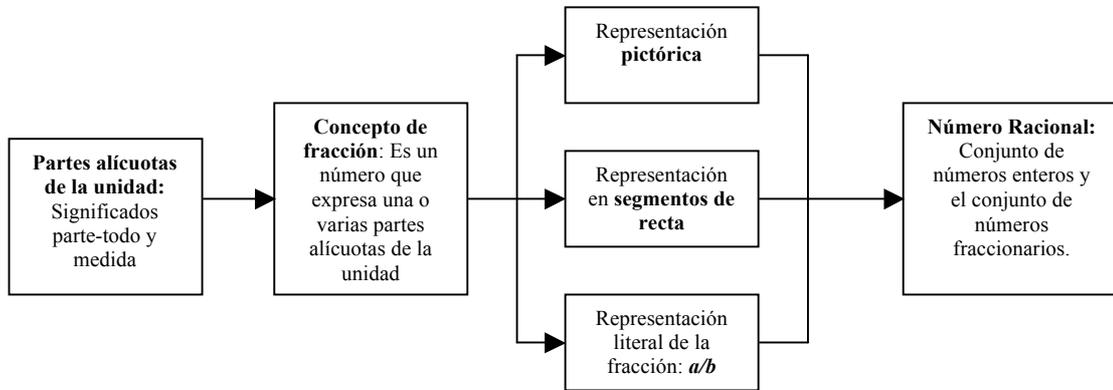


Figura 1. Ruta de construcción del concepto de número racional en el periodo A

Periodo B (desde los 70 hasta mediados de los 90)

Este periodo está representado por los libros de texto editados entre los años 1974 y 1995. Por la necesidad de ampliar el conjunto de los números enteros ante la imposibilidad de realizar divisiones como $5/3$ (L.T. 1990), en este periodo se presenta el concepto de número racional sustentado en el de clase de equivalencia (Figura 2). A diferencia del período anterior, se define el número racional como conjunto de todas las fracciones equivalentes entre sí, representado generalmente por la más simple (L.T. 1976-A, L. T. 1995). Como consecuencia, los significados usados para introducir el concepto de fracción son esencialmente los de cociente y parte-todo. El significado de razón, por su parte, aparece con posterioridad a los significados de cociente y parte-todo en el estudio de las razones y proporciones.

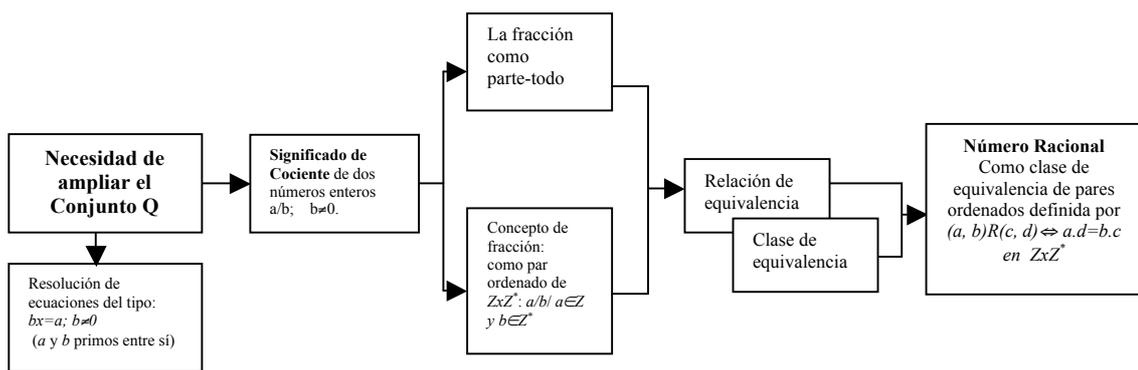


Figura 2. Ruta de construcción del concepto de número racional en el período B

⁴ A diferencia de lo que sucede en la actualidad, en la década de los 60 no era tanta la variedad de editoriales y ediciones diferentes publicadas. Este hecho y la dificultad que hemos tenido para acceder de manera efectiva a libros de texto de esta época justifican el que hayamos analizado tan sólo dos volúmenes en este periodo A.

Periodo C (desde mediados de los 90 hasta mediados de 2000)

Este período coincide con los años en que irrumpe el constructivismo en las aulas escolares en el Perú y con el inicio de la reforma de la educación secundaria. Los libros de texto analizados se sitúan en los años comprendidos entre 1997 y 2005. En este periodo se mantiene la prioridad por el significado parte-todo. En menor medida, también se contempla el significado de cociente indicado como consecuencia de la necesidad de ampliar y extender el conjunto de los números enteros. Es importante resaltar que en esta época se opta por definiciones menos formales del tipo: “Fracción es cada una de las partes en las que se ha dividido un todo” (L. T. 2000-B).

El resto de significados son subsidiarios en este periodo. Sólo dos textos, L. T. 1997 y L. T. 2000-A, realizan una revisión ordenada de los significados de la fracción: (a) como parte de la unidad, (b) como resultado de una medida, (c) como cociente y (c) como operador. Asimismo, desarrollan a posteriori el significado de razón a través del estudio de la proporcionalidad numérica: “La comparación de un número con otro mediante el cociente indicado de dichos números se llama razón” (L. T. 2000-A).

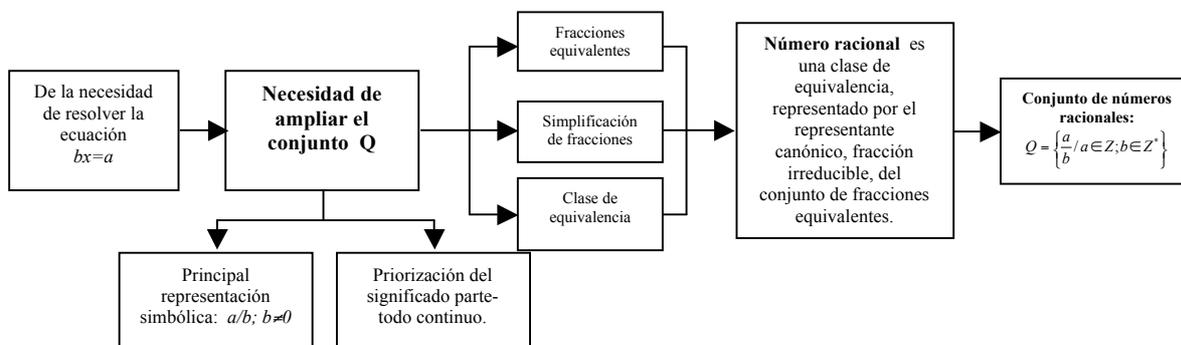


Figura 3. Ruta de construcción del concepto de número racional en el período C

Representaciones e ilustraciones

Sobre las *representaciones*, los tres periodos identificados en el análisis de los significados de la fracción coinciden en emplear mayoritariamente los sistemas de representación simbólico (numérico y algebraico) y verbal. Éste último se emplea esencialmente para hacer lecturas de fracciones representadas en forma simbólica. Sólo se aprecia un uso considerable del lenguaje conjuntista en el periodo B, a través de registros del tipo $Q = \{Q \cup 0 \cup Q^+\}$ (L. T. 1995, L. T. 1982) o mediante explicaciones acompañadas de diagramas de Venn.

Las representaciones gráficas vinculadas a la fracción (*ilustraciones*) destacan más por su variedad de registro que por su uso dilatado. De todas, la más común en la mayoría de los textos es la de carácter pictórico (p.e., diagramas de sectores), que tiene por objeto primordial transmitir el significado parte-todo. Por otra parte, se aprecian diferencias sustanciales en la naturaleza del resto de ilustraciones empleadas a lo largo de los periodos (Tabla 2).

Periodo A

Predominan (a) el *segmento de recta*, para transmitir el significado parte-todo como resultado de dividir un segmento en partes congruentes y asignar una fracción a cada parte; y (b) los *organizadores visuales*, como los cuadros sinópticos que explicitan la inclusión de los números enteros y fraccionarios en el conjunto de los racionales (L. T. 1963-B).

Periodo B

Son característicos de este periodo (a) los *diagramas conjuntistas*, para puntualizar la inclusión de conjuntos numéricos (**Error! Objects cannot be created from editing field codes.**) (L. T. 1975, L. T. 1992) o indicar que el conjunto de los racionales está conformado por los racionales positivos, el cero y los negativos (L. T. 1990); (b) las *representaciones gráficas en la recta numérica*, para vincular fracciones con puntos de la recta (L. T. 1976-A, L. T. 1993); (c) las *tablas*, para explicar la generación de clases de equivalencia como resultado de multiplicar un par ordenado por un número entero no nulo (L. T. 1982); y (d) las *viñetas*, para facilitar el nexo entre la noción de clase de equivalencia y el significado parte-todo (L. T., 1976-A).

Periodo C

Es en este periodo donde se percibe una intención más clara por aprovechar el potencial didáctico de las ilustraciones. Se mantiene el uso de segmentos de recta (L. T. 2000-A), organizadores visuales como mapas conceptuales (L.T. 2003-A) o gráficos relacionales (L.T. 2003-B), diagramas conjuntistas (L.T. 2003-B), representaciones gráficas en la recta numérica (L. T. 2003-D) y viñetas (L.T. 2003-B, L.T. 2003-D y L.T. 2005). Pero además, se introducen otros registros, como son: (a) el *sistema de ejes coordenados* (L.T. 2003-B), utilizado para introducir la noción de fracciones equivalentes; (b) el *diagrama sagital* para el estudio del significado de operador del número racional (L.T. 2000-A); y (c) las *figuras geométricas* (L. T. 2000-A), para explicar razones iguales.

Transformaciones y conversiones

Las *transformaciones* en el sistema de representación simbólico son las de mayor incidencia en los tres periodos. Ejemplos de ellas son: la simplificación para encontrar el representante canónico, la reducción de fracciones heterogéneas a mínimo común denominador, la generación de fracciones equivalentes, la realización del cociente indicado (periodos B y C), la construcción de clases de equivalencia o la aplicación ocasional de la fracción como operador (periodo C), entre otras (L. T. 1963-A, L. T. 1994, L. T. 1997).

Respecto a las *conversiones*, en los periodos A y B se utilizan con cierta regularidad, siendo mayoritaria la conversión entre el registro simbólico numérico y el gráfico en la recta numérica o pictórico (Tabla 3). Otras conversiones en estos periodos son las que se dan entre la representación algebraica y la numérica, entre el gráfico pictórico y el registro tabular o entre el diagrama conjuntista y la forma extensiva del conjunto de los racionales, entre otras (L. T. 1976-B). En comparación, la conversión en el periodo C es una actividad poco trabajada. No obstante, se llega a identificar algún ejemplo, sobre todo desde la representación numérica a la verbal, a la algebraica y a la gráfica en la recta numérica.

Tipos de gráfico	Significado /noción	Transformaciones	Conversiones
	<p>Se enfatiza el significado parte-todo y medida.</p>	<p>La unidad como unión de dos mitades.</p>	<p>De pictórica a numérica.</p>
	<p>El gráfico utiliza el significado medida.</p>	<p>Se muestra el producto y la división del denominador de una fracción por un número en los sistemas de representación simbólica y gráfica.</p>	<p>De numérica a pictórica.</p>

Tabla 3. Ejemplos de transformaciones y conversiones en el periodo A (L. T. 1963-A)

Fenomenología de la fracción

Presencia de elementos históricos

La presentación de la fracción en los textos analizados refleja un claro divorcio con la componente histórica de este conocimiento matemático, especialmente durante el periodo B. De manera específica, tan sólo 4 libros (L. T. 1974, L. T. 1982, L. T. 1997, L. T. 2005) hacen alusión a hechos históricos relacionados con la fracción continua, los decimales, la división de fracciones o el origen etimológico de la palabra ‘*quotiente*’, aunque siempre de forma tangencial y sin hacer un uso explícito de ello como recurso didáctico. En el resto de textos escolares no se aprecia rastro alguno de elementos históricos relacionados con el número racional o la fracción.

Contextualización y aplicaciones

En el período A, las aplicaciones de la fracción a la vida cotidiana se restringen a presentar situaciones con objetos físicos, como las que involucran partes alícuotas de una naranja tomada como unidad (L. T. 1963-A).

En el período B, el tratamiento es totalmente descontextualizado. Tan sólo en algún caso se apela a situaciones de tipo “dividir 5 panes entre 6 personas” (L. T. 1990) para justificar la necesidad de ampliar el conjunto de los enteros a los racionales.

En el período C, se percibe un cierto progreso al considerarse situaciones reales cotidianas del tipo “comprar medio kilogramo de azúcar” o “son las ocho y cuarto de la mañana” (L. T. 2005). En algunos libros se incluyen incluso secciones completas como “Las matemáticas... de todos los días” (L. T. 2003-B) o “Matemáticas en la práctica” (L. T. 1997).

Elementos metodológicos

En el periodo A, los textos desarrollan una enseñanza basada en el enunciado de conceptos, en la formulación de ejemplos y en la proposición de ejercicios reiterativos

que incluyen interrogantes abiertas como “¿qué es una fracción?” (L. T. 1963-A) o “¿qué indica el numerador y el denominador de una fracción?” (L. T. 1963-B). Llama la atención que se propongan cuestiones de esta naturaleza cuando en los textos analizados no se encuentran los elementos teóricos ni los significados necesarios para elaborar una conceptualización completa del número racional.

En el periodo B, se enfatiza en los conceptos recurriendo al razonamiento lógico y a la ejemplificación. La proposición de múltiples ejercicios resueltos y propuestos revela la intención de adiestrar al estudiante en el cálculo operativo. En algunos textos, se recomienda al alumno enfatizar en la necesidad de “practicar” con lápiz y papel ejercicios que lo llevarán a “aprender haciendo” (L. T. 1975, L. T. 1976-B).

En el periodo C, los textos se ven en la necesidad de adecuarse a dos enfoques curriculares distintos. De un lado, un programa de objetivos conductuales, y de otro, una propuesta de diseño curricular por competencias y capacidades. Algunos libros de este periodo también pretenden satisfacer las demandas de una instrucción preuniversitaria basada en la automatización de algoritmos y la memorización de fórmulas (L. T. 2003-A). En términos genéricos, la enseñanza en este periodo está organizada de acuerdo con las siguientes fases: (a) entrada y motivación, (b) sección de conocimientos previos, (c) momento básico de ejercicios resueltos y propuestos, (d) momento de repaso y extensión, y (e) momento de evaluación (L. T. 2000-A, L. T. 2003-B).

CONCLUSIONES

Del análisis realizado extraemos las siguientes conclusiones fundamentales:

I. En los tres periodos, el significado predominante para conceptualizar la fracción en los textos es el de parte-todo continuo. De alguna forma, esta circunstancia respalda lo subrayado por Escolano y Gairín (2007) en relación con el origen didáctico de este significado: se trata más bien de un recurso generado por el sistema didáctico para abreviar el periodo de instrucción de la fracción. Es destacable también que el significado parte-todo comparta protagonismo con el de medida en el periodo A y con el de cociente en el periodo B. Estos dos significados, junto con los de operador y razón, son retomados con posterioridad para recibir un reconocimiento didáctico más directo a partir del periodo C.

II. La decisión de mostrar el conjunto de los números racionales como una entidad formalizada obliga a la mayoría de textos analizados a enfatizar en la representación simbólica (algebraica y numérica). Por el contrario, el registro gráfico (ilustraciones) se subordina al simbólico, fundamentalmente con propósitos explicativos y de ejemplificación. El uso de transformaciones y conversiones tiene por objeto principal adiestrar al estudiante en la manipulación simbólica de las fracciones y no profundizar en la complejidad epistemológica de este conocimiento como vía para su comprensión.

III. El periodo C revela una mayor conciencia acerca de la importancia de contextualizar los contenidos matemáticos para lograr una mejor comprensión. No obstante, la realidad fenomenológica descrita en los libros aún demanda una mayor atención sobre el carácter histórico y contextualizado de las fracciones. Ello exigirá, entre otras cosas, trabajar aspectos de modelización de los fenómenos y de matematización de la realidad cotidiana, características que no se encuentran en los textos analizados.

IV. La visible reducción de formalización apreciada en la metodología, desde el periodo A hasta el C, no elimina el carácter ‘tradicional’ con el que se presenta la fracción en los textos revisados. En líneas generales, aún se mantiene la estrategia de una exposición teórica limitada en significados seguida de la resolución mayoritaria de ejercicios descontextualizados en los que interviene un número reducido de representaciones.

En síntesis, el tratamiento dado a la fracción en los textos escolares analizados pone de manifiesto una situación en la que hay que reconocer aspectos positivos para la comprensión de la fracción, como son: la progresiva consideración de un mayor número de significados, el uso variado de ilustraciones, la creciente introducción de situaciones contextualizadas o la incipiente disminución del formalismo en la presentación de la fracción. Ahora bien, a pesar de estos avances, las carencias manifestadas por estos libros todavía resultan evidentes, sobre todo a nivel epistemológico y fenomenológico, poniéndose de relieve una situación curricular sustancialmente mejorable en lo que respecta a la enseñanza para la comprensión de la fracción en el Perú.

Agradecimientos: Agradecemos las sugerencias de mejora recibidas de los revisores anónimos de la versión preliminar de esta comunicación.

BIBLIOGRAFÍA

- Behr, M., Harel, G., Post, T., Lesh, R. (1992). Rational number, ratio and proportion. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp.233-296). New York: MacMillan Publishing Company.
- Duval, R. (1993). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivos del pensamiento. *Anales de Didáctica y de Ciencias Cognitivas, IREM de Strasbourg*, 5, 37-65.
- Duval, R. (2006). A cognitive análisis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61, 103-131.
- Escolano, R., Gairín, J. M. (2005). Modelos de medida para la enseñanza de números racionales en educación primaria. *UNIÓN Revista Latinoamericana de Educación Matemática*, 1, 17-35.
- Escolano, R., Gairín, J. M. (2007). Enseñanza del número racional positivo en Educación Primaria: propuesta didáctica con modelos de medida. En E. Castro y J. L. Lupiañez (Eds.) *Investigaciones en Educación Matemática: Pensamiento Numérico* (pp. 185-212). Granada: Editorial Universidad de Granada.
- Kieren, T. (1993). Rational and Fractional Numbers: From Quotient Fields to Recursive Understanding. En T. P. Carpenter, E. Fennema y T. A. Romberg (Eds.), *Rational Numbers: An Integration of Research* (pp. 49-84). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
- Gallardo, J., González, J. L. (2006a). Assessing understanding in mathematics: steps towards an operative model. *For the Learning of Mathematics*, 26(2), 10-15.
- Gallardo, J., González, J. L. (2006b). Una aproximación operativa al diagnóstico y la evaluación de la comprensión del conocimiento matemático. *PNA*, 1(1), 21-31.

- Gallardo, J., González, J. L., Quispe, W. (2008a). Interpretando la comprensión matemática en escenarios básicos de valoración. Un estudio sobre las interferencias en el uso de los significados de la fracción. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa RELIME*, 11(3), 355-382.
- Gallardo, J., González, J. L., Quispe, W. (2008b). Rastros de comprensión en la acción matemática. La dimensión hermenéutica de un modelo operativo para la interpretación en matemáticas. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho y L. J. Blanco (Eds.), *Actas del XII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)* (pp. 283-293). Badajoz: Sociedad Extremeña de Educación Matemática- SEIEM.
- Quispe, W. (2008). *Interferencias en la comprensión de los significados del número racional*. Tesis de Maestría. Cusco, Perú: Universidad Nacional de San Antonio Abad del Cusco-CUES.
- Unidad de Medición de la Calidad Educativa del Ministerio de Educación del Perú (2001). *Como rinden los estudiantes peruanos en Comunicación y Matemática. Resultados de la evaluación nacional 2001. Informe pedagógico: sexto grado de primaria*. Lima, Perú: Autor.
- Unidad de Medición de la Calidad Educativa del Ministerio de Educación del Perú (2004). *Evaluación nacional del rendimiento estudiantil 2004. Informe pedagógico de resultados. Formación matemática: tercer grado de secundaria y quinto grado de secundaria*. Lima, Perú: Autor.

ANEXO I. Cuadro de Identificación y Codificación de los Textos Escolares

N°	Año	Nombre del Autor	Código	Título del Texto Escolar	Lugar de Edición	Editorial	Periodo de Estudio
1	2004	Vera Gutiérrez, Carlos Estuardo	L.T. 2005	Matemática Primer grado	Lima	El Nosedal	Periodo C
2	2003	Coveñas Naquiche, Manuel	L.T. 2003-A	Matemática 1 Educación Secundaria	Lima	Bruño	
3	2003*	Rojas Poémape, Alfonso	L.T. 2003-B	Matemática 1 Educación Secundaria	Lima	San Marcos	
4	2003*	Bustamante Montealegre, Pedro.	L.T. 2003-C	Matemática 1 Texto Integrado	Arequipa	Independencia	
5	2003	Quijano Hiyo, Jorge y Carretero Mendoza, Gustavo	L.T.2003-D	Matemática 1	Lima	Kano	
6	2000	Obra Colectiva. Dir. Lohmann Catalina	L. T. 2000-A	Símbolo 1. Matemática Secundaria	Lima	Santillana	
7	2000	Valencia, Parisaca, Victor H. y Candia Quenta, Hermelinda.	L.T. 2000-B	Matemática I	Puno	Cadena del Sur Ñaupá's	
8	1997	Obra Colectiva. Dir. Ibarra Morelli, Carmen	L.T. 1997	Matemática 1 Secundaria	Lima	Santillana	
9	1995	Romero Mendez, Rubén	L.T. 1995	Matemática 1	Lima	Magisterio	Periodo B
10	1993	Gutierrez M. Virgilio	L.T. 1993	Matemática Primer Grado de Secundaria	Lima	Omega	
11	1992	Rojas Gasco, Gustavo	L.T. 1992	Matemática 1 Teoría y Practica.	Lima	Ambers	
12	1991	Vasquez Urday, Carlos Emilio	L.T. 1991	El Mundo de la Matemática 1	Lima	Stella	
13	1990*	Romero Mendez, Rubén	L.T. 1990	Matemática 1 La Nueva Estructura de la Matemática	Lima		
14	1982	Cruz Solórzano, Máximo de la	L.T. 1982	Matemática 2do. Grado de Educación Secundaria	Lima	Brasa	
15	1976	Vega Villanueva, Flavio	L.T.1976-A	Matemática Moderna 2	Callao	Colegio Militar Leoncio Prado	
16	1976	Romero Mendez, Rubén	L.T.1976-B	Matemática Moderna 2	Lima	Universal	
17	1975	Cruz Solórzano, Máximo de la	L.T. 1975	Matemática Moderna 2	Lima	Labrusa	
18	1974	Cruz Solórzano, Máximo de la	L.T. 1974	Matemática Moderna 1	Lima	Arica	
19	1963	Vega Villanueva, Flavio	L.T.1963-A	Matemática 1er. Año de Educación Secundaria	Callao	Colegio Militar Leoncio Prado	Periodo A
20	1963	Romero Mendez, Rubén	L.T.1963-B	Matemática Primer año	Callao	Colegio Militar Leoncio Prado	

* En ocasiones, las editoriales no suelen consignar el año de edición del libro por razones comerciales. En estos casos se ha estimado el año.