



ESTRATEGIAS DESARROLLADAS POR ESTUDIANTES DE BACHILLERATO AL RESOLVER PROBLEMAS MATEMÁTICOS DE CANTIDAD DE LA PRUEBA ENLACE

Karen Elizabeth Castillo Villanueva, Edilberto Meza-Fitz, Guadalupe Cabañas-Sánchez
eli.casvilla@gmail.com, mezafitz@hotmail.com, gcabanas.sanchez@gmail.com

Universidad Autónoma de Guerrero

Medio superior

Resumen

Se reportan avances de una investigación que analiza las estrategias empleadas por estudiantes de bachillerato al resolver problemas matemáticos de la prueba ENLACE. Para el estudio se utilizaron seis problemas relativos a los contenidos Espacio y Forma, Cantidad, Cambios y Relaciones de la prueba ENLACE 2012. Se analiza uno referente al contenido de Cantidad. El proceso de solución se sustenta por explicaciones verbales y escritas de los estudiantes. En el análisis de sus explicaciones se encuentra que el éxito en la solución depende de cuatro aspectos fundamentales: a) La *cantidad* de conocimiento que posee; b) la *calidad* de lo que sabe; c) la *diversidad* de los conocimientos previos y d) la *habilidad para utilizar* lo que sabe. Se caracterizaron tres tipos de estrategias: a) Uso de la regla de tres, b) Procedimiento rutinario asociado a un indicador textual (Formales) y c) Lectura de gráficas (Informal).

Palabras clave: *Estrategias, problemas matemáticos, prueba Enlace.*

1. INTRODUCCIÓN

Numerosas investigaciones se han interesado por el estudio de las estrategias desarrolladas por los estudiantes mientras resuelven problemas matemáticos. La importancia de este tipo de estudios radica por un lado, en que ayuda tanto a los profesores de matemáticas como a las investigaciones en nuestra disciplina, la Matemática Educativa, a reconocer las fortalezas y debilidades que el alumno muestra en el proceso de resolución de problemas matemáticos, independientemente del contexto en que se ubiquen y los procesos que se pongan en juego. Este tipo de información a su vez, contribuye a comprender por qué los estudiantes hacen lo que hacen; al rediseño del discurso matemático escolar ya sea mediante libros de texto, apuntes, aseguramiento de condiciones previas o el diseño de situaciones de aprendizaje, son ejemplos.

En los últimos tres años diversas investigaciones clasificaron estrategias, destacan Morales (2010), quien las exploró con estudiantes de preparatoria, usando problemas de tipo algébrico-aritmético. Kospentaris, Spyrou y Lappas (2011), quienes estudiaron estrategias con estudiantes de último grado de bachillerato y de una licenciatura en Matemáticas, mientras comparaban y observaban una medida de área sobre objetos geométricos; mientras que Pastrana (2012) las caracterizó con estudiantes cuyas edades oscilaban entre 15 años tres meses y 16 años dos meses, aplicando problemas matemáticos de la prueba PISA. García, Navarro y Rodríguez (2012) por su parte, estudiaron las estrategias desarrolladas por niños de primaria de una comunidad mixteca al resolver problemas aritméticos. Algunas de las estrategias que se han caracterizado en estos estudios son: a) Conteo directo de un modelo dado o previa modelación, b) Selección de la operación cuyo significado es apropiado al texto, c) Uso de palabras claves, d) Procedimiento rutinario asociado a un indicador textual, e) Tanteo inteligente y no inteligente, f) Operar con los datos/números dados en el texto, g) Razonamiento hacia atrás, h) Formales e i) Informales.

El trabajo que se reporta también abordó el estudio de estrategias. Interesaron las estrategias empleadas por estudiantes de bachillerato mientras resuelven problemas matemáticos de la prueba ENLACE. El artículo reporta las desarrolladas un grupo de estudiantes al resolver problemas de *Cantidad*. Por ello nos preguntamos, ¿Qué estrategias privilegian los estudiantes de bachillerato al resolver problemas matemáticos de *Cantidad* planteados en la prueba ENLACE?

2. FUNDAMENTOS TEÓRICOS

El concepto de problema se asume de Campistrous y Rizo (1996) quienes lo conciben como *toda situación en la que hay un planteamiento inicial y una exigencia que obliga a transformarlo. La vía para pasar de la situación o planteamiento inicial a la nueva situación exigida tiene que ser desconocida y la persona debe querer hacer la transformación*. En esta definición se reconoce al problema como una situación inicial que llega a una situación final, que es la exigida, mediante una vía desconocida. Para resolver un problema es necesaria la motivación, este es un componente importante ya que sin él no habría interés de querer resolver la situación.

Respecto del concepto estrategia, se adoptó la postura de Escoriza (2006), quien las concibe como *procedimientos intencionales, deliberados, positivos y cuya ejecución requiere control (regulación y evaluación) sistemático y continuado durante el proceso orientados al logro de los objetivos previstos*. Distingue las siguientes características sustanciales en las estrategias:

- a) Son secuencias organizadas de objetivos, acciones y operaciones cognitivas.
- b) Forman parte del conocimiento procedural o procedimental.
- c) Son procesos deliberados, es decir, controlados y regulados por una cognición intencional.
- d) Son procesos propositivos, su ejecución está orientada al logro intencional de objetivos concretos relacionados con los procesos de aprendizaje.
- e) Son secuencias de operaciones cognitivas mediadas semióticamente (símbolos y signos).

Este investigador resalta además, tres características fundamentales de la lectura de un problema, las que contribuyen a comprender, interpretar y resolver el mismo: **Cantidad** de conocimiento del lector, **Calidad** de lo que sabe y **Diversidad** de los conocimientos previos que posee.

La caracterización de las estrategias en este trabajo, se sustenta en la propuesta de Pastrana (2012), quien las cataloga como sigue:

- *Estrategias Formales*: Es el conjunto de procedimientos orientados hacia la obtención de la solución de problemas en donde se utilizan conceptos sobre objetos, relaciones y operaciones, así como de proposiciones y propiedades matemáticas.
- *Estrategias Informales*: Es el conjunto de procedimientos orientados hacia la obtención de la solución de problemas en donde se realizan transformaciones sobre la base de descomposiciones y recomposiciones de formas geométricas (cortar y pegar), estimaciones visuales y aproximaciones de medidas.

3. MÉTODO

Desde el punto de vista metodológico es una investigación de corte cognitivo-descriptivo, ya que interesa profundizar en las estrategias que emplearon los alumnos al resolver problemas de la prueba ENLACE 2012, se sustenta de las explicaciones escritas y verbales, presentadas por los estudiantes en dos momentos de su participación: a) al resolver problemas matemáticos de la

prueba ENLACE 2012, y; b) durante una entrevista de tipo abierta. Por lo cual adoptamos como metodología el estudio de casos. Los elementos metodológicos contemplados fueron:

a) *El estudio de casos como método de investigación*

El estudio de casos es un método de investigación para estudiar a un individuo o a una institución en un entorno o situación único y de una forma lo más intensa y detallada posible, Castillo (2008). Para la realización de esta investigación dado que se pretende identificar y describir las estrategias que emplean los estudiantes de Nivel Medio Superior al resolver problemas matemáticos de la prueba ENLACE, el estudio de casos es la metodología adecuada porque se quiere estudiar a profundidad las diferentes estrategias, sin embargo como lo menciona Fonte (2003) los resultados no son generalizables, sólo son válidos para el caso o los casos estudiados, y aportan a especialistas y docentes elementos para un rediseño de la teoría y la práctica escolar en el campo de la resolución de problemas.

b) *Participantes y contexto*

Fueron aleatoriamente seleccionados once alumnos que cursaban el sexto semestre de bachillerato de la generación 2010-2013 de la Unidad Académica Preparatoria No. 33 de la Universidad Autónoma de Guerrero. Su selección atendió al criterio de la prueba ENLACE, quien considera a aquellos alumnos que están por concluir su etapa de formación académica en este nivel educativo.

c) *Problemas matemáticos de la prueba ENLACE*

Los problemas matemáticos aplicados en la exploración proceden de la prueba ENLACE 2012, en la cual de los 60 problemas correspondientes al campo disciplinar de Matemáticas, 20 pertenecen al contenido matemático de *Cantidad*, 20 al de *Espacio y Forma* y 20 al de *Cambios y Relaciones*; de la prueba fueron seleccionados 6. Para hacer la selección se revisó cuáles de ellos representaban verdaderos problemas que no fueran rutinarios, que incitaran al alumno a razonar y que pudieran arrojar varias estrategias. Con base en ello, fueron seleccionados dos de cada contenido y fueron presentados a los estudiantes en un ambiente de lápiz y papel. Los problemas están planteados a través de un enunciado, algunos acompañados de figuras, gráficas, tablas, etc. Fueron resueltos de manera individual por los participantes, en un tiempo promedio de 160 minutos, en una sola sesión. De acuerdo a los objetivos de la prueba ENLACE (Reyes y Zuñiga, 2012), se espera que en el proceso de resolución, los estudiantes pongan en juego los tres procesos cognitivos siguientes:

Reproducción: Incluye tareas que permiten determinar si el sustentante conoce y aplica la técnica matemática. Implica aplicar conocimientos y procedimientos matemáticos a problemas directos, reconocer equivalencias, utilizar objetos y propiedades matemáticas, así como extraer información de representaciones numéricas, simbólicas y gráficas.

Conexión: Incluye problemas que se presentan a partir del planteamiento de situaciones sencillas, académicas o de la vida cotidiana. Los problemas de este tipo plantean exigencias en su interpretación y requieren que el sustentante reconozca la técnica matemática que hay que utilizar, con el fin de solucionar problemas que impliquen equivalencias, uso de propiedades matemáticas y empleo de representaciones numéricas, simbólicas y gráficas.

Reflexión: Incluye problemas que no son directos y se presentan a partir de situaciones complejas retomadas de la vida real en las que se utilice más de una forma de representación de información (textual, numérica, simbólica y gráfica). Los problemas de este tipo plantean exigencias en su interpretación y requieren que el sustentante reconozca la técnica matemática que hay que utilizar, establezca relaciones, combine e integre información entre distintas formas de representación o entre diferentes aspectos de una situación y utilice más de un paso o proceso, con el fin de solucionar un problema.

Desde la perspectiva de la prueba ENLACE (INEE, 2012) un problema y su resolución pueden involucrar uno o más de estos procesos. No es pertinencia de este estudio caracterizarlos de esta forma, sin embargo se dan a conocer para distinguir si es una situación rutinaria o de mayor complejidad.

d) Entrevistas

La entrevista fue semiestructurada y con ella se profundizó en los procesos que siguieron los estudiantes en la resolución de los problemas. Algunas de las preguntas en las que nos apoyamos son las siguientes: a) ¿Cómo entiendes el problema?, b) ¿Qué harías para resolver el problema?, c) ¿Por qué harías eso? y; d) ¿Qué es lo que se te dificultó para resolver el problema?

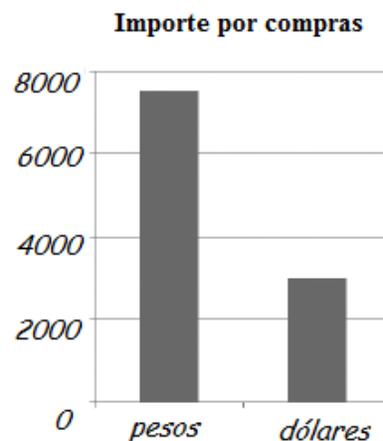
4. ESTUDIO DE LOS CASOS

Presentamos el caso de dos estudiantes que resolvieron un problema de opción múltiple tomado de ENLACE (INEE, 2012), relacionado con porcentajes. El problema es el siguiente:

Alejandra vende en su negocio artículos relacionados con la informática. Algunos de sus productos los compra en pesos y otros más en dólares. El importe de sus compras se muestra en la siguiente gráfica:

Alejandra decide abrir una sucursal de su negocio y planea incrementar sus compras; en pesos se incrementarán 35% y en dólares aumentarán 45%. Considerando el total de compras después del aumento, ¿Cuánto dinero en pesos gastará en total? Considere que 1 dólar = \$13.6.

- A) \$10,000 a \$15,000 C) \$55,000 a \$60,000
 B) \$35,000 a \$40,000 D) \$65,000 a \$70,000



Se trata de un problema no rutinario, cuya respuesta es de opción múltiple, y por los procesos cognitivos que se ponen en juego, está catalogado como de *reflexión*. En el proceso de resolución se debe establecer una relación de proporción entre los datos, así como realizar operaciones aritméticas y puede utilizar la regla de tres para determinar el aumento en las cantidades. De manera que se ponen en juego procedimientos considerados como rutinarios, ya estudiados en etapas previas de su formación escolar. La respuesta de este problema no es rutinaria, en razón de que está dada en intervalos, y no en una cantidad específica.

Caso de Yuridia

Yuridia no resolvió el problema durante la aplicación del cuestionario, sino durante la entrevista.

a) ¿Cómo interpretó el problema?

La primera acción de Yuridia fue leer el problema e identificar que se pide.

Yuridia: []...quiere saber **el total de éste** (total de dinero), del aumento pero en pesos, tanto **de lo que aumenta en dólares, como incrementa en pesos.**

Entrevistador: []... ¿Cómo explicarías tu situación a cualquier persona?

Yuridia: []...**lo que muestra aquí en la gráfica está dando más que nada un aproximado**, más no está dando lo que equivale al porcentaje... []

Entrevistador: []... ¿Qué es lo que te dice la gráfica?

Yuridia: []...**está presentando lo que es el importe en pesos y en dólares**, que es el porcentaje.

En esta parte de la entrevista se puede notar que Yuridia comprende que debe encontrar el total de pesos y dólares, pero no logra interpretar la gráfica. Ella dice que maneja un aproximado con respecto a los porcentajes, más adelante ella indica que se refiere a las compras que se han hecho. Esto indica que no está entendiendo todas las condiciones del problema por lo que lo interpreta a su manera.

A través de cuestionamientos, el entrevistador le hizo reflexionar acerca del porcentaje y la forma en cómo lo puede calcular. En un principio no recordaba cómo calcular el porcentaje de una cantidad.

Entrevistador: ¿Cuál es el total de la compra?

Yuridia: Siete mil quinientos... podría ser

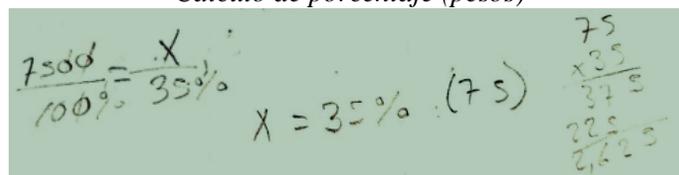
Entrevistador: Pero ahora nos hablan de un porcentaje, que es treinta y cinco por ciento

Yuridia: **Lo que se podría hacer aquí se podría utilizar la regla de tres o la del sándwich... algo así...**

Entrevistador: ¿Cómo planteas una regla de tres?

Yuridia: Creo que **Siete mil quinientos es igual al cien por ciento, y se quiere saber, del 100%, se quiere saber el treinta y cinco por ciento es el aumento y se quiere saber lo de "equis"**.

Cálculo de porcentaje (pesos)



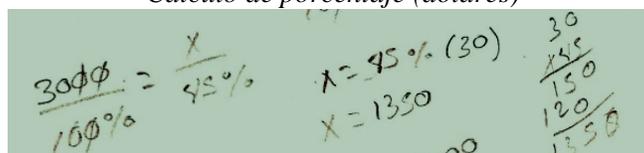
Handwritten calculation for percentage (pesos):

$$\frac{7500}{100\%} = \frac{x}{35\%}$$

$$x = 35\% (75)$$

$$\begin{array}{r} 75 \\ \times 35 \\ \hline 375 \\ 2250 \\ \hline 2625 \end{array}$$

Cálculo de porcentaje (dólares)



Handwritten calculation for percentage (dollars):

$$\frac{3000}{100\%} = \frac{x}{45\%}$$

$$x = 45\% (30)$$

$$x = 1350$$

$$\begin{array}{r} 30 \\ \times 45 \\ \hline 150 \\ 1200 \\ \hline 1350 \end{array}$$

En esta parte de la entrevista se evidencia que los cuestionamientos del investigador contribuyen a que Yuridia identifique el procedimiento a realizar para calcular el porcentaje de las dos cantidades (regla de tres). Ya que obtiene los porcentajes los suma con los importes iniciales (pesos con pesos y dólares con dólares) y convierte los dólares a pesos. Una vez hecho lo anterior, sumó los resultados (el importe en pesos con el importe de dólares a pesos) para obtener la respuesta. No obstante, se detectó que la alumna tuvo problemas para obtener la respuesta en la parte de la suma final.

Sus primeras acciones fueron las siguientes: a) Trata de interpretar el problema, b) relaciona el porcentaje con las gráficas, c) calculó los porcentajes usando la regla de tres, e) sumó los

porcentajes con su respectivo importe de compra, f) convirtió de dólares a pesos y g) sumó las cantidades obtenidas.

b) Control y valoración del proceso de resolución

No hubo control y valoración de sus estrategias, en la aplicación no resolvió el problema, pero durante la entrevista lo resolvió apoyada en las preguntas del entrevistador, a modo de impulsos heurísticos.

c) Estrategias

Las estrategias empleadas por esta alumna fueron: a) la regla de tres (formal) y la b) lectura de gráficas (informal), pero debido a la falta de cantidad y calidad de conocimiento cayó repetidamente en errores, sin embargo éstos se corrigieron por una parte debido a la intervención del entrevistador.

Caso de Azucena

Azucena resolvió sólo una parte del problema durante la aplicación y durante la entrevista lo concluyó.

a) ¿Cómo interpretó el problema?

De la lectura que hace al problema, Azucena identifica las cantidades en la gráfica dada, y reconoce que debe calcular el porcentaje, como lo dice durante la entrevista.

Azucena: []... **me basé gráficamente**, viendo los intervalos que había de aquí a acá, determiné por dónde quedaba lo que era la parte de en medio y pues vi que era cada mil... []... pues yo dije que aquí era siete mil quinientos que era la otra parte que faltaba, fue gráficamente como lo vi.

Entrevistador: []... después para resolver el problema de Alejandra ¿qué hiciste?

Azucena: Obtuve el treinta y cinco por ciento en pesos, solamente me dejé lo que eran pesos, no tomé en cuenta lo que eran dólares, primeramente.

Azucena calcula el porcentaje del importe de gastos de la gráfica y convierte a pesos los dólares, explica su forma de proceder en la entrevista.

Azucena: []... para obtener lo que era el porcentaje del treinta y cinco por ciento convertí mi número a lo que era decimal... punto treinta y cinco... y de ahí yo obtuve esta cantidad que era dos mil setecientos cincuenta y dos.

A diferencia de Yuridia que utilizó la regla de tres, Azucena convierte los respectivos porcentajes a número decimal.

Sabe cómo calcular el porcentaje, pero al hacer la multiplicación se equivoca y obtiene un resultado erróneo. El entrevistador le pide corroborar su operación, y ya que obtiene el resultado correcto hace la suma del importe (pesos) con el porcentaje obtenido de éste (10,125) y se hace el cálculo del importe que falta (dólares).

Azucena: []... **yo quería ver si en cuanto a dólares, que me aumentaba era más, 45%, también me salía un resultado parecido a éste (10,125), que me diera una equivalencia de diez mil a quince mil ... []**.

Azucena interpreta que las cantidades obtenidas deben estar dentro de uno de los intervalos de los incisos dados, pero no en unidad si no separadas (debido a que en la gráfica son dos barras del



importe), pero con ayuda de las interrogantes del investigador se da cuenta de que lo que tiene que hacer es sumarlas para llegar a la respuesta.

Entrevistador: Tienes entonces los pesos más el treinta y cinco por ciento, los dólares más el 45% y su conversión a pesos, ¿qué te falta?... []... ¿Qué te piden en el problema?

Azucena: Dice la pregunta ¿Cuánto dinero en pesos gastan en total?... mmm **me parece que sumarlos.**

Las acciones que Azucena siguió para resolver el problema fueron las siguientes: a) Leer e interpretar el problema, b) Identificar el importe de los gastos a través de la gráfica, c) Calcular los porcentajes, d) sumar importe de gastos con el porcentaje obtenido, e) convertir los dólares a pesos, f) sumar las cantidades obtenidas y obtener la respuesta.

b) Control y valoración del proceso de resolución

Se observa que Azucena controla sus procesos de resolución, sus acciones están mediadas por: a) El conocimiento que tiene acerca de porcentaje y la interpretación de gráficas.

c) Estrategias

De acuerdo a las acciones que Azucena realizó en la resolución del problema, ella desarrolla las siguientes estrategias: a) Lectura de gráficas, b) Procedimiento rutinario asociado a un indicador textual.

5. CONCLUSIONES

Hasta esta fase del trabajo de investigación se ha encontrado que dos estudiantes usaron estrategias diferentes pero una en común, Yuridia, la *regla de tres (estrategia formal)* y Azucena *procedimiento rutinario asociado a un indicador textual(estrategia formal)*, ambas usaron *lectura de gráficas (estrategia informal)*. Sostenemos la hipótesis de Pastrana (2012) quien afirma que *dependen en gran medida de lo que saben, de la calidad de lo que saben y de su experiencia con la resolución de problemas de diferentes tipos*. De ahí que se observe en el problema analizado que las estudiantes no están familiarizadas con resolver problemas con intervalos de cantidades, como es el caso de Azucena, que a pesar de haber realizado todo el proceso de resolución, no llegó al resultado en el primer intento, sino que en la entrevista notó que tenía que sumar las cantidades y no verlas por separado. Por otro lado, Yuridia carece de las características establecidas por Escoriza (2006).

6. REFERENCIAS

- Campistrous, L.; Rizo, C. (1996). *Aprende a Resolver problemas aritméticos*. La Habana: Pueblo y Educación.
- Castillo, M. (2008). *Proyectos de Investigación. Metodología de investigación científica USN. Método de estudio de caso*. Recuperado de: www.itescham.com/Syllabus/Doctos/r1614.DOC
- Escoriza, J. (2006). *Estrategias de comprensión del discurso escrito expositivo* (pp. 15-17). España: Edicions Universitat.
- Fonte, A. (2003). Estrategias que utilizan los alumnos de Secundaria Básica para resolver problemas. Un estudio de Casos (Tesis inédita de maestría). Comisión de Grados



Científicos del Instituto Superior Pedagógico Enrique José Varona. Ciudad de La Habana
Cuba

García, J.; Navarro, C.; Rodríguez, F. (2012). El caso de los alumnos *tee savi* en la resolución de problemas. En L. Sosa, E. Aparicio y F. Rodríguez (Eds.), *Memoria de la XV Escuela de Invierno de matemática Educativa* (pp. 214-220). México: Red de Centros de Investigación en Matemática Educativa.

INEE (2012). INEE: *Una década de evaluación 2002-2012. Instituto Nacional de Evaluación de la Educación*. México: INEE.

Pastrana, F. (2012). *Estrategias desarrolladas por estudiantes de nivel medio superior al resolver problemas matemáticos de la prueba PISA*. Tesis de maestría no publicada. Universidad Autónoma de Guerrero. México.

Kospentaris, G.; Spyrou, P.; Lappas, D. (2012). Exploring students' strategies in area conservation geometrical tasks. *Educational Studies in Mathematics* 77(1), 105-127.

Morales, R. (2010). *Estrategias de resolución de problemas matemáticos en el Nivel Medio Superior de la Universidad Autónoma de Guerrero*. Tesis de maestría no publicada. Universidad Autónoma de Guerrero. México.

Reyes, S.; Zuñiga, A. (2012). *Manual para Docentes y Directivos Enlace Media Superior 2012*. México: Ceneval.