ALGUNAS DIFICULTADES QUE ENFRENTAN LOS ESTUDIANTES AL RESOLVER TAREAS DE SECUENCIAS ALGEBRAICAS

Sergio Damián Chalé Can, Claudia Margarita Acuña Soto
schalecan@gmail.com, claudiamargarita_as@hotmail.com
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, IPN
Básico

Resumen

En este reporte presentamos los resultados de una investigación, en la que se buscó identificar las dificultades y errores que enfrentan los estudiantes del Nivel Medio Superior, al resolver tareas de secuencias algebraicas. Se diseñó un conjunto de actividades en donde lo visual jugaba un papel importante para resolver las secuencias algebraicas que se presentaban a los estudiantes. Para el diseño tomamos en cuenta los aportes realizados por Radford al caracterizar y analizar el desarrollo del pensamiento algebraico temprano en los estudiantes y las formas de visualización que Duval ha identificado, cuando los estudiantes analizan figuras. Encontramos que los estudiantes son capaces de explicar los crecimientos de las secuencias, pero tienen dificultades para expresar estos crecimientos algebraicamente, cometiendo errores de sintaxis y semántica algebraica.

Palabras clave: *Generalización, secuencia algebraica, dificultades, errores.*

1. INTRODUCCIÓN

La generalización de patrones es usada frecuentemente como una ruta de aprendizaje hacia al álgebra y la idea principal que subyace a esta aproximación es que cierta experiencia con la exploración numérica y visual de los patrones podría llevar al desarrollo del pensamiento algebraico (Radford, 2008). En el currículum actual mexicano de secundaria y preparatoria, esta ha sido la manera de introducir la notación algebraica, así como la generalización de secuencias numéricas y geométricas (Secretaría de Educación Pública, 2010).

En este tipo de tareas, los estudiantes deben predecir un elemento posterior a uno dado en un conjunto ordenado de figuras. La idea es que se identifique una regla que rige la secuencia. En un principio, el estudiante detecta los elementos gráficos o numéricos que conforman el patrón para terminar descubriendo cuál es la regla que rige el crecimiento de ésta, para expresarla de forma verbal o mediante una fórmula.

En Mason (1996, citado por Kieran, 2006, p. 20), se realiza una revisión de las prácticas establecidas en la escuela que involucran generalización de patrones en el álgebra. En ésta revisión se revela que el estudio de los patrones inicia con figuras o secuencias geométricas, pero durante la solución de las tareas, el énfasis se pone en la construcción de tablas de valores, de las cuales se abstrae una fórmula. Esta aproximación, deja de lado toda la riqueza del proceso de generalización, y limita la forma como los estudiantes pueden llegar a identificar la relación del patrón y su representación algebraica. Mason sugiere que deben promoverse e investigarse aproximaciones que lleven a los estudiantes a la construcción de fórmulas algebraicas, que incluyan la visualización y la manipulación de la figura sobre la cual el proceso de generalización se basa.

En línea con las ideas de Mason, en este trabajo afirmamos que en el tratamiento dado a este tipo de tareas, se hace énfasis en que para establecer la regla que subyace a la secuencia bajo análisis, dos elementos deben detectarse dentro de la secuencia para ser incorporados en las expresiones algebraicas asociadas a ésta: por un lado, la posición que ocupa cada una de las figuras dentro de la secuencia, y por otro, la razón de crecimiento de la secuencia.

El proceso de detección del patrón que subyace a la secuencia a partir del análisis de sucesiones de figuras no es espontáneo. Para el estudiante no experimentado existe una desconexión entre lo que se ve y lo que se está generalizando, lo cual consideramos se debe a que durante el abordaje de este tipo de tareas, no se interpreta de manera organizada los elementos gráficos que se presentan a los estudiantes.

Pero el tratamiento visual de estas representaciones gráficas o figuras no es una actividad que se atienda adecuadamente en las escuelas por lo que suele ser superficial, se da por hecho que el estudiante rápidamente observa cuáles son los cambios en cuanto a la forma de organización y número de dos figuras consecutivas y se ignoran las dificultades que los estudiantes enfrentan al resolver este tipo de tareas.

2. Antecedentes

La enseñanza y aprendizaje del álgebra ha sido un tema relevante en la investigación dentro de la Educación Matemática, se ha tratado de dar respuesta a la pregunta ¿Cómo se construye el significado de los conceptos algebraicos? Y ¿Cuál es la naturaleza del pensamiento algebraico? Los investigadores han propuesto acercamientos a través del análisis de la construcción de los conceptos y los procedimientos relacionados con ellos, así como la manera en que los estudiantes construyen simbolizaciones de los objetos algebraicos (Kieran, 2006).

La generalización, como central en el desarrollo del pensamiento algebraico llegó a llamar la atención de los investigadores, en el periodo que comprende los años 80's. En ese periodo el uso de la notación algebraica fue visto como una herramienta para expresar pruebas, patrones figurales y para justificar las formas simbólicas equivalentes de las relaciones entre patrones.

En nuestra revisión de la literatura, identificamos que en general las tendencias de investigación tratan de analizar: cuestiones de tipo didáctico que involucran a los profesores (Bell, 2011), experiencias empíricas de los estudiantes que cuentan con material manipulable (Smith, Hellen & Catania, 2007) así como el análisis de los procesos de solución que enfrentan los estudiantes cuando se enfrentan a este tipo de tareas (Lin & Yang, 2004; Stylianou, 2011; Rinvold, 2011 y Noss, Hely & Hoyles, 1997). Nosotros deseamos aportar en esta temática, identificando las dificultades a las que el estudiante se enfrenta al resolver este tipo de tareas y los errores que comenten.

3. Marco Conceptual

Nuestro objetivo, como se ha mencionado anteriormente, es identificar las dificultades y errores que enfrentan los estudiantes cuando resuelven tareas de secuencias geométricas. Para alcanzar nuestra meta planteada, diseñamos un conjunto de actividades que nos permitiera identificar estas dificultades y errores.

Para el diseño de nuestras actividades identificamos las fases por las cuales los estudiantes deben transitar para lograr la generalización, además de contar con elementos teóricos que nos permitieran describir la manera como analizan y organizan las imágenes que les presentamos y al mismo tiempo tomamos una postura respecto a la visualización y el papel que jugó dentro de nuestras actividades diseñadas.

La Teoría de la Objetivación

Dentro de la teoría de la objetivación, el aprendizaje se concibe como una adquisición comunitaria de formas de reflexión del mundo, guiadas por modos epistémicos culturales históricamente formados, es una *praxis cogitans*, esto es una práctica social. De manera más precisa el pensamiento es considerado una reflexión mediatizada del mundo de acuerdo con la forma o modo de la actividad de los individuos. Particularmente el aprendizaje de las matemáticas es tematizado como la adquisición comunitaria de una forma de reflexión del mundo, guiada por modos epistémicos-culturales históricamente formados (Radford, 2006a).

De acuerdo con la ideas desarrolladas por Radford (2000, p. 2), "el pensamiento algebraico es una forma particular de reflexionar matemáticamente y es considerada una práctica cognitiva mediada por signos". La naturaleza del pensamiento algebraico emergente en los estudiantes, es una forma específica en la cual ellos actúan conceptualmente con el propósito de llevar a cabo acciones requeridas para la generalización de tareas (Radford, 2000).

Son tres las características que hacen distintivo al pensamiento algebraico, siendo estas no exhaustivas, la primera se refiere a un sentido de *indeterminación*, la segunda es la *analiticidad* y la tercera es el *modo simbólico* en la cual se designa a los objetos en el álgebra (Radford, 2006b).

La generalización algebraica de patrones

Para realizar la generalización de un patrón, en la etapa inicial del análisis de éste, los estudiantes deben centrarse en una propiedad invariante o relación dentro del patrón, tomar algo en común o una regularidad y llegar a ser conscientes de sus propias acciones en relación con el fenómeno sometido a generalización (Rivera & Rossi, 2008).

En Radford (2006b) se identifican diferentes niveles de generalización en la resolución de este tipo de tareas, los cuales consisten en grados de manifestación de lo general y son caracterizados por los símbolos a los que los estudiantes recurren para conseguir sus generalizaciones.

Son tres los niveles de generalización que el autor identifica. La *generalización factual*, en la cual el discurso no vas más allá de ejemplos particulares, solo se tiene un grado elemental de generalidad. La *generalización contextual*, es aquella que ocurre cuando aparecen gestos que ayudan a los estudiantes a comprender las relaciones que ocurren dentro del patrón, en combinación con el discurso y la visión. Y por último la *generalización simbólica*, se refiere a expresar la generalización a través de símbolos alfanuméricos, el cual es un proceso complejo en el que se decide acerca del significado de las letras.

La visualización

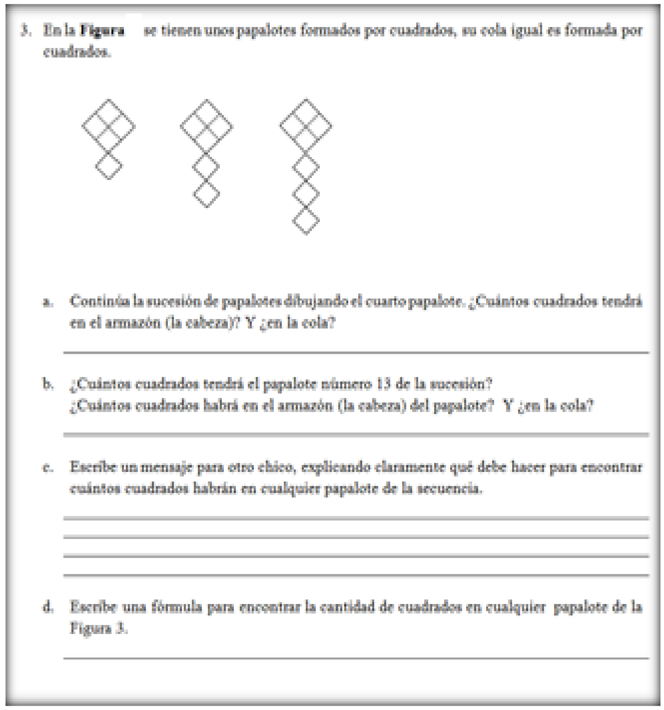
Nuestro interés está centrado en las dificultades que los estudiantes enfrentan cuando analizan las secuencias algebraicas de tipo visual, en las que éste componente juega un papel importante en la resolución de este tipo de tareas.

La visualización que deja al descubierto las propiedades y relaciones matemáticas es aquella que precisamos en la detección de patrones de secuencias, aquella a la que Duval (1999) llama visualización matemática. Este autor propone una serie de operaciones visuales que los estudiantes realizan cuando analizan un conjunto de figuras, que pueden ser distinguidas cuando se modifican las figuras: la *mereológica*, la *óptica* y la *relacionada con el lugar*.

Los elementos teóricos anteriormente mencionados nos proporcionaron fundamentos para la investigación que llevamos a cabo, en la cual distinguimos las dificultades y errores que los estudiantes enfrentan al resolver el tipo de tareas que propusimos.

4. MÉTODO

Diseñamos una investigación cualitativa que llevamos a cabo en una escuela preparatoria de la Ciudad de México. Con base en los elementos teóricos que adoptamos, planteamos a los estudiantes un conjunto de actividades que nos permitieran explorar las formas como ellos resuelven las tareas de secuencias algebraicas, tratando de promover a la visualización como elemento que guiara la resolución de las actividades.



3. En la **Figura** se tienen unos papalotes formados por cuadrados, su cola igual es formada por cuadrados.

a. Continúa la sucesión de papalotes dibujando el cuarto papalote. ¿Cuántos cuadrados tendrá en el armazón (la cabeza)? Y ¿en la cola?

b. ¿Cuántos cuadrados tendrá el papalote número 13 de la sucesión? ¿Cuántos cuadrados habrá en el armazón (la cabeza) del papalote? Y ¿en la cola?

c. Escribe un mensaje para otro chico, explicando claramente qué debe hacer para encontrar cuántos cuadrados habrán en cualquier papalote de la secuencia.

d. Escribe una fórmula para encontrar la cantidad de cuadrados en cualquier papalote de la Figura 3.

Figura 1. Actividad.

Las actividades fueron propuestas a 36 estudiantes del nivel medio superior, a los cuales mediante un conjunto de actividades, trabajo en parejas y posterior discusión frente a grupo, se les pidió analizar los crecimientos de las secuencias algebraicas, que pusieran por escrito el patrón de la secuencia y la expresión en símbolos algebraicos de tal patrón. En el tipo de secuencia que presentamos, lo visual jugaba un rol central y cada vez más importante conforme se avanzaba en la solución de las actividades propuestas.

El objetivo general de la investigación fue encontrar los obstáculos que tienen los estudiantes cuando deben identificar y organizar la información visual de secuencias algebraicas.

El lector podrá encontrar una de las actividades en la Figura 1. Ésta consistió de una secuencia de papalotes cuya "cola" crecía conforme aumentaba su posición en la secuencia. Se pidió al estudiante continuar la sucesión que se mostraba al inicio, calcular la cantidad de cuadros para los elementos siguientes, y explicar con un mensaje escrito el patrón que sigue la secuencia, para posteriormente solicitar la expresión algebraica que modela el crecimiento del patrón.

5. RESULTADOS

A continuación presentaremos el análisis de dos casos de treinta y seis que estudiamos. Nos enfocamos en el proceso de generalización que los estudiantes van realizando y la manera como analizan la figura que se les propone, además de describir las dificultades y errores a los que se enfrentan en este proceso.

En un primer momento para responder los incisos a. y b. de la actividad, los estudiantes no tuvieron problemas con el conteo de los elementos necesarios para construir las figuras siguientes. Identificaron la parte variable de la secuencia (el cambio en la cola) y la parte que no variaba (la cantidad de cuadros en la cabeza del papalote se mantenía constante), como podemos ver en la Figura 2. Los estudiantes fueron capaces de distinguir la propiedad que es invariante a la secuencia (Rivera & Rossi, 2008) a través de la figura, tomar esto como común, en el caso presentado el aumento en la cantidad de cuadros en la "cola", y hacerlo extensivo a otros elementos de la secuencia, como se muestra en la Figura 3.

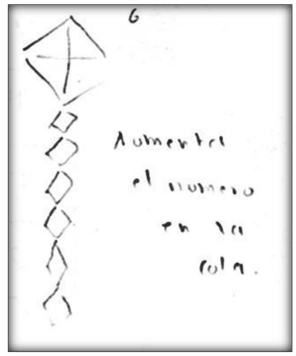


Figura 2. Parte del análisis realizado por los estudiantes. Actividad I.3.

Estas primeras acciones de los estudiantes quedan enmarcadas dentro del primer nivel de generalización algebraico, *el factual*, debido a que en este momento son capaces de dar ejemplos particulares de elementos que siguen en la secuencia presentada y continuar con el desarrollo de la secuencia.

a. Continúa la sucesión de papalotes dibujando el cuarto papalote. ¿Cuántos cuadrados tendrá en el armazón (la cabeza)? Y ¿en la cola?

Cabeza = 4 Cola = 4

b. ¿Cuántos cuadrados tendrá el papalote número 13 de la sucesión?
¿Cuántos cuadrados habrá en el armazón (la cabeza) del papalote? Y ¿en la cola?

tendia en la cabeza 4 y en la cola 13

Figura 3. Respuestas a los incisos a. y b.

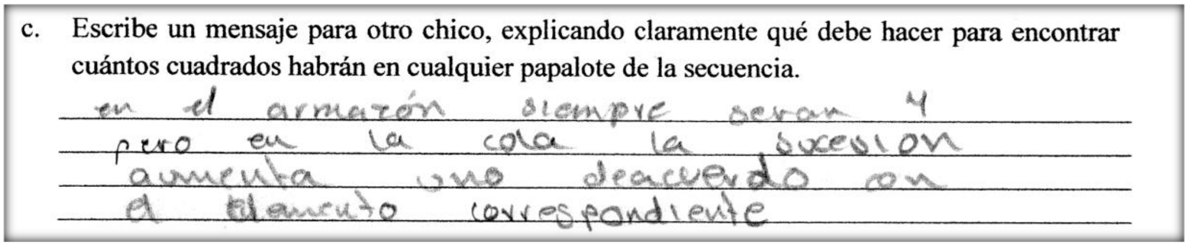
En un segundo momento, en el nivel de generalización factual (Radford, 2006b), se les pidió a los estudiantes expresar en palabras la regla que sigue el crecimiento del patrón. Lo anterior evidenció, la dificultad de algunos alumnos para expresar sus ideas por medio de palabras, como podemos ver en la Figura 4. Consideramos que esto se debe a una desconexión entre lo que se mira en la figura y lo que se está generalizando, y por otro lado las relaciones que ocurren dentro del patrón no pueden ser expresadas, por parte de los estudiantes, por medio del discurso y la escritura.

c. Escribe un mensaje para otro chico, explicando claramente qué debe hacer para encontrar cuántos cuadrados habrán en cualquier papalote de la secuencia.

una formula o una regla

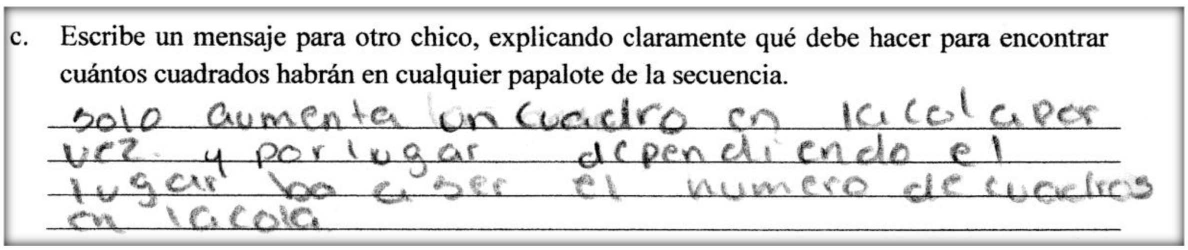
Figura 4. Una respuesta de un estudiante al inciso c.

Sin embargo, en la Figura 5 y 6, tenemos dos respuestas, en las cuales podemos notar, como los estudiantes relacionan el crecimiento de la "cola" con la posición del elemento de la secuencia; y como el segundo estudiante nota que el aumento es uno a la vez y que coincide con el lugar, además que existe una estrecha relación entre la posición y la cantidad de cuadros en la "cola". Hemos de hacer notar que la gran mayoría de los estudiantes no pudieron realizar la conexión entre el lugar y el crecimiento de la cola, quedando sus explicaciones en el primer nivel de generalización, la generalización factual.


c. Escribe un mensaje para otro chico, explicando claramente qué debe hacer para encontrar cuántos cuadrados habrán en cualquier papalote de la secuencia.

en el armazón siempre serán 4 pero en la cola la sucesion aumenta uno deacuerdo con el elemento correspondiente

Figura 5. Respuesta a la Actividad.

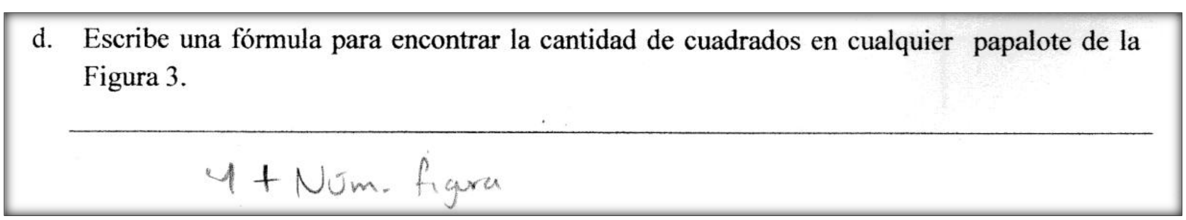

c. Escribe un mensaje para otro chico, explicando claramente qué debe hacer para encontrar cuántos cuadrados habrán en cualquier papalote de la secuencia.

solo aumenta un cuadro en la cola por vez y por lugar dependiendo el lugar ba a ser el numero de cuadros en la cola

Figura 6. Respuesta a la Actividad.

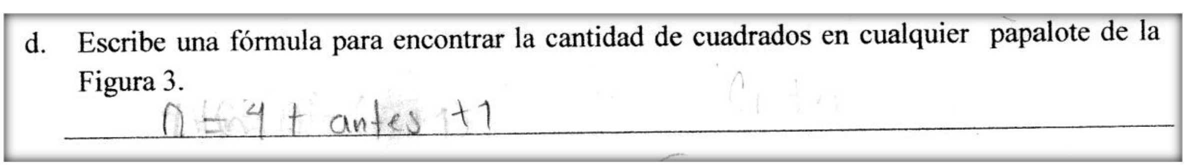
Posteriormente, en un tercer momento, a los estudiantes se les pidió escribir la expresión algebraica que modela el patrón de crecimiento de la secuencia. En este momento, estamos en el tercer nivel de generalización algebraica, la generalización simbólica, que es la más profunda y avanzada de las generalizaciones propuestas por Radford. En las cuales la analiticidad y la indeterminación se hacen presentes.

Para la resolución de este inciso, los estudiantes enfrentaron ciertas dificultades, puesto que expresar la variación entre los elementos de la sucesión no fue asunto sencillo. Un estudiante relacionó adecuadamente la variable con la posición del elemento dentro de la secuencia (Figura 7), y otro estudiante construyó una fórmula recursiva (Figura 8).


d. Escribe una fórmula para encontrar la cantidad de cuadrados en cualquier papalote de la Figura 3.

4 + Núm. figura

Figura 7


d. Escribe una fórmula para encontrar la cantidad de cuadrados en cualquier papalote de la Figura 3.

n = 4 + antes +1

Figura 8

El estudiante que escribió la respuesta mostrada que se muestra en la Figura 8, explica su fórmula de la siguiente manera:

Estudiante: n es igual al número del elemento que estamos buscando (se refiere al número de su posición), entonces n es igual a 4, que es el que nunca va a cambiar, más el número antes de la sucesión, más uno.

Hay que hacer notar que la sintaxis y la notación utilizada por los estudiantes no es la adecuada, en términos de la terminología matemática, pero para ellos es claro el significado que dan a sus símbolos y palabras. Lograron describir la variación notada en la secuencia, con palabras como "aumenta uno de acuerdo con…"; sin embargo, esto fue muy complicado de expresar en símbolos, se requirió de tiempo para que esto sucediera.

Por otro lado, el uso de las imágenes y su análisis mereológico ayudó a la obtención de diversas expresiones de la variación dentro de la secuencia, esto lo podemos notar en la naturaleza de las expresiones escritas por los estudiantes. En la respuesta de la Figura 7, el estudiante relaciona claramente la posición de la figura con su cantidad de elementos; en cambio, en la respuesta de la Figura 8, el estudiante ve la figura como un todo al que se le agrega y quita partes. Las distintas maneras de analizar las figuras, lleva a los estudiantes a desarrollar fórmulas distintas.

6. Conclusiones

La visualización jugó un rol importante en la resolución de las actividades. Analizar solamente las cantidades que pueden ser abstraídas de las figuras, no permitió a los estudiantes desarrollar explicaciones respecto a la regla que modela el crecimiento del patrón. Dejar a un lado las imágenes y enfocarse solamente en un análisis numérico ocasionó que los estudiantes no fueran capaces de conectar los elementos necesarios para obtener la regla que modela el crecimiento de la secuencia. Esta es la primera dificultad a la que se enfrentaron los estudiantes, el aprender a utilizar las imágenes como elementos que pueden argumentar y justificar sus acciones.

Efectivamente, los estudiantes transitan por los niveles de generalización que Radford (2006b) identifica, y es en este proceso que identificamos ciertas dificultades que los estudiantes enfrentan.

En el nivel de generalización factual, los estudiantes no tiene problemas al trabajar con los números que pueden obtener del análisis de la secuencia, incluso pueden encontrar elementos lejanos al conjunto que se les dio. En el nivel de generalización contextual, los estudiantes: enfrentan dificultades para hacer explícitos sus análisis a través del lenguaje escrito, tienen dificultades para relacionar lo que ven en la figura y lo que se está generalizando, además de enfrentar dificultades para conectar la numerabilidad de los elementos de la secuencia con su posición. En el tercer nivel, los estudiantes, enfrentan dificultades para expresar por medio de símbolos algebraicos la variación entre los elementos de la secuencia. Cometen errores de sintaxis y no utilizan adecuadamente el sistema alfanumérico del álgebra.

7. Referencias

Bell, C. (2011). Lining up Arithmetic Sequences. *Mathematics Teaching in the Middle School, 17(1)*, 34-39.

Duval, R. (1999). Representation, Vision and Visualization: Cognitive Functions in Mathematical Thinking. Basic Issues for Learning. En F. Hitt & M. Santos (Eds.), *Proceedings of the 21st Annual Meeting of the North America Chapter of the International Group of PME* (pp. 3-26). Cuernavaca, Morelos, Mexico: PMENA.

Kieran, C. (2006). Research on the learning and the teaching of algebra. A Broadening of sources of meaning. A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future* (pp. 11-49). Rotterdam: Sense Publishers.

Lin, F. & Yang, K. (2004) Differentiation on student's reasoning on linear and quadratic geometric number patterns. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* 4 (pp. 457-464). Berguen, Norway.

Noss, R., Healy, L. & Hoyles, C. (1997). The construction of mathematical meanings: connecting the visual with the symbolic. *Educational Studies in Mathematics 33,* 203-233.

Radford, L. (2000). Signs and meanings in students' emergent algebraic thinking: a semiotic analysis. *Educational Studies in Mathematics, 42,* 237-268.

Radford, L. (2006a). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática educativa, 9(Número especial)* ,103-129.

Radford, L. (2006b). Algebraic thinking and the generalization of patterns: a semiotic perspective. Alatorre, S., Cortina, J.L., Sáiz, M. and Méndez, A. (Eds.)*Proceedings of the 28th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp.2-21). Mérida, México: Universidad Pedagógica Nacional.

Radford, L. (2008). Iconicity and contraction. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik - The International Journal on Mathematics Education, 40(1),* 83-96.

Rinvoold, R. (2011). *Multimodal derivation and proof in algebra.* Recuperado el 20 de octubre del 2012 de: http://www.cerme7.univ.rzeszow.pl/WG/1/CERME7-WG1-Rinvold-Lorange.pdf

Rivera, F. & Rossi, J. (2005). Figural and Numerical Modes of Generalizing. *Mathematics Teaching in the Middle School, 11(4),* 198-203.

Rivera, F. & Rossi, J. (2008). Middle school children's cognitive perceptions of constructive and deconstructive generalizations involving linear figural patterns. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik - The International Journal on Mathematics Education, 40(1), 65-82*.

Secretaría de Educación Pública (2010). *Serie: Programas de Estudio. Dirección General de Bachillerato.* México: SEP. Recuperado el 21 de marzo del 2013 de: http://www.dgb.sep.gob.mx/informacion_academica/programasdeestudio/cfb_1ersem/MATEMATICAS_I.pdf

Smith, M., Hillen, A. & Catania, C. (2007). Using Pattern Tasks to Develop Mathematical Understanding and Set Classroom Norms. *Mathematics Teaching in the Middle School, 13(1),* 38-44.

Stylianou, D. (2011). The Process of Abstracting in Students' Representations. *Mathematics Teaching in the Middle School, 17(1),* 8-12.