LA RAZÓN DE CAMBIO. NIVELES DE COMPRENSIÓN DEL PROFESOR DE EDUCACIÓN BÁSICA EN MÉXICO

Miguel Díaz Chávez
mdiaz3010@gmail.com
Instituto Superior de Ciencias de la Educación del Estado de México
Universidad Pedagógica Nacional Unidad 15
Básico

Resumen
En este escrito reportamos algunos resultados de una investigación diseñada con la intención por un lado de identificar el nivel de comprensión que alcanza el profesor de educación básica en el Estado de México acerca del concepto de razón de cambio y por otro involucrarlo en un proceso de comprensión guiado por un experto. La exploración la realizamos aplicando un cuestionario dividido en dos secciones: descripción de conceptos y resolución de problemas. Las descripciones descubren la nula comprensión en los profesores de preescolar y primaria, y el nivel poco significativos en el profesor de secundaria. Esto contrasta con la comprensión operatoria presente en las trayectorias de solución exhibidas en la resolución de problemas, la cual evoluciona de lo numérico en los profesores de preescolar y primaria a los acercamientos algebraicos en el profesor de secundaria.

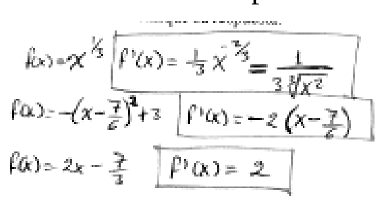
Palabras clave: *Comprensión, profesor de educación básica, razón de cambio.*

1. INTRODUCCIÓN

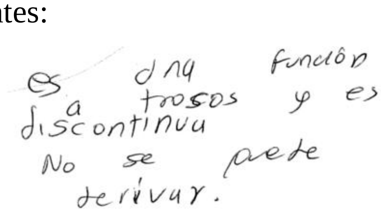
En un cuestionario que aplicamos a profesores de bachillerato que impartían cálculo en el bachillerato con la finalidad de explorar la comprensión que poseían acerca del significado e interpretaciones de la derivada les pedimos obtener la derivada de esta función:

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{x} & 0\le x\le 1\\ -\left(x-\frac{7}{6}\right)^2+3 & 1<x\le\frac{13}{6}\\ 2x-\frac{7}{3} & \frac{13}{6}<x\le 4\end{cases}$$

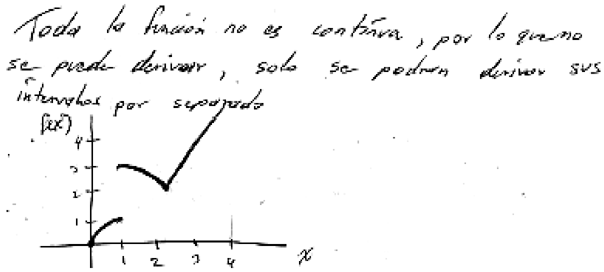
El análisis de las trayectorias de solución exhibidas permitió descubrir que algunos aplican las reglas de derivación mecánicamente a cada una de las expresiones que componen la función:



Otros escribieron algunos conceptos de cálculo de manera encapsulada y establecieron relaciones y conclusiones no coherentes:



Otros más graficaron y a partir de su percepción visual obtuvieron conclusiones falsas (Díaz & Rivera, 2012):



Estos hechos nos revelaron el bajo nivel de comprensión que tiene este profesor sobre uno de los conceptos más importantes que le corresponde enseñar. Indudablemente esto se relaciona con las dificultades que exhiben los estudiantes en la comprensión de los conceptos que subyacen en este curso. Estas dificultades en ocasiones permanecen pasivas en el sujeto; sin embargo, cuando se activan constituyen verdaderos obstáculos epistemológicos en el aprendizaje (Brosseau, 2002). Estos resultados nos llevan a plantear lo siguiente: Si no es tan buena la comprensión de los conceptos en profesores que tienen cierta formación matemática, entonces es probable que la comprensión de los profesores cuya formación no tiene esa especialización sea menos buena.

En relación al concepto de derivada, sabemos que tiene relación con las nociones de razón, cambio, número racional, razón, proporción, fracción, entre otros; cuyos inicios formales se encuentran en el currículum de la educación básica, en este sentido es un concepto que se extiende en todo el currículum desde la escuela elemental hasta el universitario (Lamon, 2007). ¿Qué podemos decir acerca de lo que comprende el profesor de educación básica de los conceptos mencionados? O más precisamente ¿Qué nivel de comprensión tiene este profesor sobre el concepto de razón de cambio?

Reflexionando acerca de la comprensión en la enseñanza y aprendizaje de la matemática consideramos que debe enfatizarse tanto de las reglas, las técnicas y los conceptos mismos. Esto es muy tomado en cuenta por la NCTM (2000) en sus *Principles and Standards for School Mathematics* en los principios de enseñanza y de aprendizaje respectivamente. La OCDE (2002) en el *Programme for International Student Assesment*, (PISA) también lo hace; sin embargo esto nos lleva a reflexionar acerca de la factibilidad real de llevar este proceso a la práctica en nuestro país. Un aprendizaje con comprensión es necesariamente una variable que depende, entre otras cuestiones de una enseñanza que promueva la comprensión; y esta orientación depende directamente de la comprensión que posea el profesor.

La buena comprensión del profesor no solo le permite tener una aproximación más cercana al conocimiento, también le permite diseñar situaciones didácticas que promueven el aprendizaje con comprensión (Brophy, 1991). En caso contrario, únicamente repetirá lo memorizado, lo cual probablemente provocará en los alumnos un sentimiento de frustración. A propósito, los sentimientos negativos que la gente tiene respecto de las matemáticas lo atribuyen, correcta o incorrectamente, a sus profesores (Boas, 1981).

Al profesor le corresponde además comunicar bien los conceptos a través del lenguaje, proporcionando definiciones o experiencias, ejemplos y contraejemplos para que el estudiante forme su propio sistema conceptual. Ello exige naturalmente del profesor una comprensión clara de los mismos. Sin embargo esta competencia parece no tenerla adecuadamente desarrollada (D'Amore y Martini, 2000).

Partiendo de la necesidad de conducir un aprendizaje con comprensión, lo cual requiere de profesores que cuenten con los conocimientos y por supuesto con una buena comprensión de los conceptos que enseñan, diseñamos esta investigación con la finalidad de explorar el nivel de comprensión que tiene el profesor de educación básica sobre uno de los conceptos matemáticos que desde mi particular punto de vista es de los más interesantes, tanto por su construcción formal a lo largo de todo el currículum desde la educación básica hasta el universitario y en cuya genética encontramos los conceptos de razón y proporción. Además de que este concepto tiene una amplia gama de conexiones y aplicaciones en la misma matemática como con otras disciplinas. El interés ha sido compartido por la comunidad de investigadores; sin embargo la mayoría ha dirigido la atención a explorarlo en la cognición de los estudiantes (Singh, 2000; Lamon, 2007; Teuscher & Reys, 2010) a discutir sus significados y construir propuestas de enseñanza (Behr, 1992). Un único trabajo encontramos orientado a la exploración de la razón de cambio en los profesores (Ellis, 2007) pero en el nivel superior.

2. MARCO TEÓRICO

La preocupación por estudiar la comprensión en el aula de matemáticas ha despertado el interés de diversos investigadores en educación matemática y psicólogos (e.g. Brownell, 1947; Skemp, 1976; Carpenter & Hiebert, 1992). El profesor Skemp (1976) por ejemplo distingue entre la comprensión relacional y la instrumental. Un documento interesante que reporta diversos resultados relacionados con la comprensión es Mathematics Classrooms that Promote Understanding (Fennema & Romberg, 1999).

En la exploración de los niveles de comprensión sobre la razón de cambio nosotros consideramos las formas de actividad mental que enuncian Carpenter and Lehrer (1999): la construcción de relaciones, la extensión y aplicación del conocimiento matemático, la reflexión sobre la experiencia, la articulación de lo que se conoce y la apropiación del conocimiento; las cuales, desde nuestro punto de vista son visibles en lo que hace, comunica, explica y prueba el sujeto. A éstas nosotros añadimos la comunicación del conocimiento, ya que los argumentos y en general la manera en que lo comunica indica su nivel de comprensión.

3. METODOLOGÍA

La investigación la realizamos en el contexto de un taller de actualización de profesores en relación al sentido numérico y pensamiento algebraico, estos profesores fungen como asesores metodológicos en la educación básica. El taller tuvo lugar en cuatro regiones del Estado de México y en él participaron 36 profesoras de preescolar 79 de primaria y 36 de secundaria.

Para el taller diseñamos un cuestionario dividido en dos secciones. En la primera solicitamos datos relacionados con su perfil profesional. En esta misma sección se pidió a los profesores describir entre otros conceptos el de *Razón de cambio.*

La segunda parte del taller consistió en la resolución del siguiente problema tomado y adaptado de PISA (2000):

Un agricultor siembra árboles de manzanas. Para proteger el huerto del viento, siembra coníferas, utilizando un modelo como el que muestra el dibujo.

X=conífera; ●= manzana
X X X ***X ● X*** ***X X X***
X X X X X ***X ● ● X*** ***X X*** ***X ● ● X*** ***X X X X X***
X X X X X X X ***X ● ● ●X*** ***X X*** ***X ● ● ●X*** ***X X*** ***X ● ● ●X*** ***X X X X X X X***
X X X X X X X X X ***X ● ● ● ●X*** ***X X*** ***X● ● ● ● X*** ***X X*** ***X ● ● ● ●X*** ***X X*** ***X● ● ● ● X*** ***X X X X X X X X X***

a) ¿En algún momento el número de coníferas es igual al número de árboles de manzana? Escribe tus argumentos.

b) Supóngase que este agricultor quiere hacer más grande el huerto con más filas de árboles. ¿Qué aumentará más rápidamente, el número de árboles de manzana o el de coníferas? Argumenta tu respuesta.

c) ¿Cuántos árboles de coníferas se requerirán para rodear k árboles de manzana? Escribe tus argumentos.

La resolución se dividió en cuatro etapas. En la primera los profesores lo resolvieron individualmente. En la segunda etapa, agrupados en equipos discutieron las trayectorias de solución de cada uno y colaboraron en el diseño de una colectiva. En la tercera etapa cada uno de los equipos comunicó al pleno la trayectoria consensada. Finalmente la sesión concluyó con explicaciones científicas y didácticas que articularon los conceptos emergentes, con la intención de involucrar al profesor en un proceso de comprensión autónomo en una ambiente de colaboración de pares y experto.

La información la concentrando en mapas conceptuales, los cuales nos han auxiliado en la identificación, interpretación y jerarquización de sus niveles de comprensión de la razón de cambio. El análisis de los resultados lo estamos hacemos primero a nivel individual, luego transitaremos a las comunidades de enseñanza (preescolar, primaria y secundaria), para finalmente identificar afinidades entre estas comunidades e individuos.

4. Algunos resultados y discusión

Lo que percibimos en esta parte es que el nivel de comprensión de los profesores específicamente sobre este concepto va en orden ascendente. Desde una comprensión casi nula de los profesores de preescolar:

- Razón de cambio. - Construir, para transformar. Resolución de problemas

5 Razón de cambio. - un motivo intrínseco para o que posibilita la transformación de pensamiento o de comportamiento

Este tipo de respuestas, generalizadas en estas profesoras muestran una nula comprensión del concepto. Las definiciones y las explicaciones están más bien asociadas a la valoración social como *razón para el cambio*. Sin embargo los conceptos aislados de *razón* y *cambio* son conceptos que los niños comprenden y utilizan de alguna manera en distintas actividades. Estos conceptos además están implícitos en los contenidos correspondientes al pensamiento matemático a desarrollar en preescolar.

En el caso de los profesores que laboran en la escuela primaria las respuestas no varían mucho, el nivel de comprensión es muy semejante al que exhiben las profesoras de preescolar. Algunos prefieren omitir dar respuesta alguna.

5) RAZON DE CAMBIO →

Otros lo definen de manera semejante a las de los profesores de preescolar.

razón de cambio - tener expectativos de actualizar y mejorar

En la Escuela Primaria se profundiza en la construcción de los conceptos de fracción, razón y proporción; estos están explícitos o implícitos en los tres ejes en que está organizada la enseñanza de la matemática este nivel.

El nivel de comprensión se modifica un poco y en casos aislados en los profesores de educación secundaria como lo ilustra la siguiente descripción

5- RAZON DE CAMBIO: COMPARACION DE DOS CANTIDADES

No obstante la aparente precisión de estas respuestas, resulta, con un análisis pertinente del contexto, en un bajo nivel de comprensión. Finalmente los términos utilizados carecen de significado y relación con el verdadero concepto de razón de cambio.

Sin embargo, si bien es cierto ese nulo bajo nivel de comprensión que manifiestan los profesores en sus explicaciones y definiciones es totalmente distinto al que muestran en la resolución del problema en cuya solución subyace el concepto de razón de cambio.

En la resolución del problema de manzanos y coníferas todos los profesores utilizan el concepto en distintos niveles, operan de manera ágil con el mismo, esto contrasta con las deficiencias en su explicaciones. El profesor del nivel básico no sabe cómo explicarlo pero si sabe cómo utilizarlo.

En el caso de las profesoras de preescolar se manifiesta una clara inclinación a la ejecución con una tendencia a la percepción de formas y figuras para después transitar al hacer aritmético donde combinan de manera indistinta símbolos, notaciones y relaciones; sin ninguna preocupación por las reglas sintácticas como se puede ver en la siguiente trayectoria.

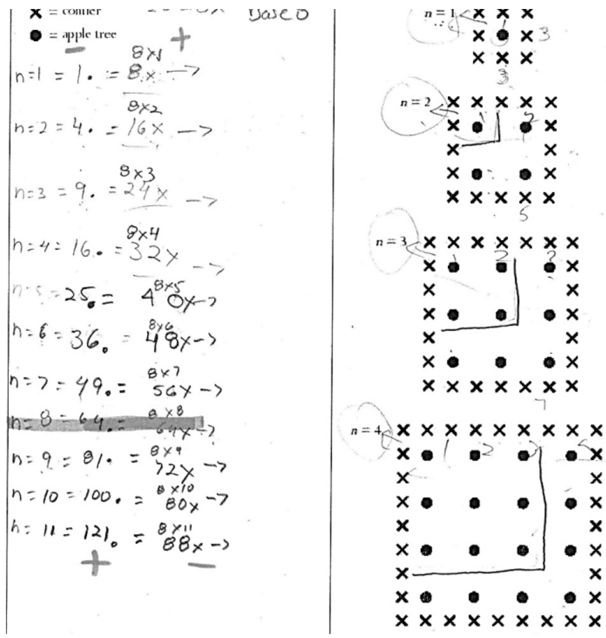


Figura 1. Trayectoria de solución de una profesora de preescolar.

Esta trayectoria permitió descubrir la suma de los primeros *n* números impares.

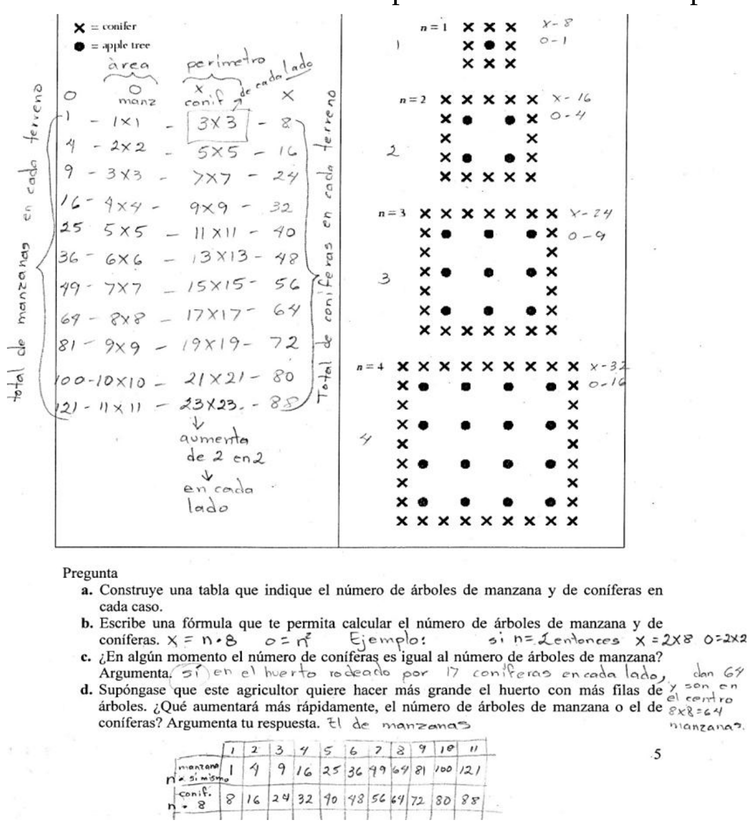


Figura 2. Trayectoria de solución de un profesor de secundaria.

En los otros niveles percibimos un respeto por la sintaxis y la semántica (figura 2), ahí percibimos claramente como la comprensión evoluciona de lo operatorio a lo simbólico. Observándose el tránsito de la comprensión aritmética a la comprensión simbólica, de los arreglos numéricos a la traducción de las expresiones algebraicas, donde se puede ver la razón de cambio pero que sin embargo el profesor aún no distingue este significado, aún en el caso sencillo de la variación directamente proporcional.

Aquí se puede observar el uso de las literales, y de las mismas variables; sin embargo aún con esta evolución hacia el Álgebra en el tratamiento de la información, su manejo, traducción y arribo a generalidades importantes sobre el problema y su solución el nivel de comprensión de la razón de cambio no muestra una evolución significativa. En este punto el experto, a través de explicaciones científicas y didácticas articuladoras involucramos al profesor, en un ambiente de trabajo colaborativo, en un proceso de comprensión autónomo.

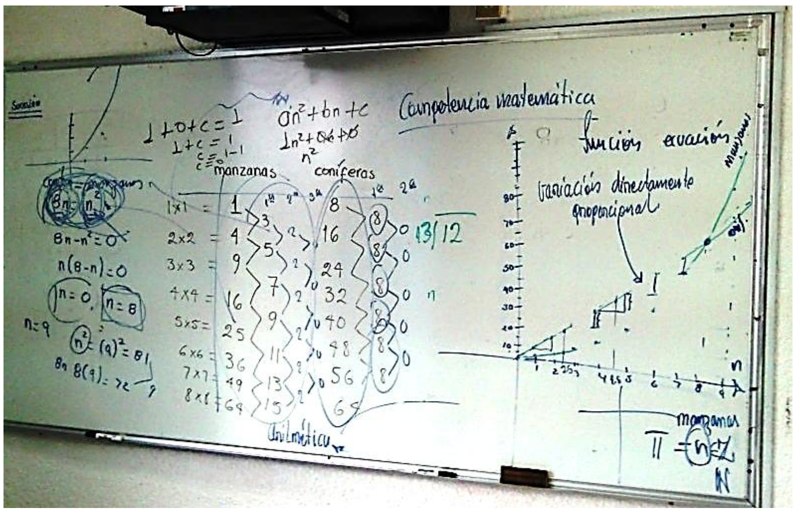


Figura 3. Conceptos emergentes y su articulación en el proceso de comprensión.

5. CONCLUSIONES

En un primer nivel de análisis los casos discutidos exhiben la nula comprensión del concepto y por otro la encapsulación del mismo, esto tiene que ver de alguna manera con las dificultades que tienen los estudiantes con la comprensión que posteriormente tienen con conceptos relacionados con el cálculo, tales como límite, el infinito, la idea de función y la demostración. La investigación mostró además que es posible involucrar al profesor en un renovado y significativo proceso de comprensión a partir de la resolución de problemas no rutinarios y el trabajo colaborativo entre los elementos de distintas comunidades de aprendizaje.

6. REFERENCIAS

Behr, M., Guershon, H.; Post, T. & Lesh, R. (1992).Rational Number, Ratio and Proportion.In Grouws, D. (1992).*Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 296-333). Toronto: Macmillan Publishing Co.

Boas, R. (1981). Can We Make Mathematics Intelligible? *The American Mathematical Monthly*, 88(10), 727-731.

Brophy, J. (Ed.) (1991). *Advances in Research on Teaching: Teachers Subject-matter Knowledge and Classroom Instruction* V.2. Grenwich CT. JAI Press.

Brosseau, G. (2002). *Theory of Didactical Situations in Mathematics*. New York. Kluwer Academic Publishers.

Brownell, W. A. (1947). The Place of Meaning in the Teaching of Arithmetic. *Elementary School Journal*, 47(5), 256-265.

Carpenter, T. & Hiebert, J. (1992). Learning and Teaching with Understanding. In Grows, A.D. (Ed.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 65-97). New York: Macmillan Publishing Co.

Carpenter, T. & Lehrer, R. (1999).Teaching and Learning Mathematics with Understanding. En

D'Amore, B. y Martini, B. (2000). Sobre la Preparación teórica de los Maestros de Matemáticas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 3(1), 33-46.

Díaz, M. & Rivera, A. (2012).Understanding of the Derivative and its Meanings. The Case of Calculus Professors. *In Proceedings of The 12th International Congress on Mathematical Education (ICME 12).* Seoul. Korea. 2862-2870.

Ellis, E. (2007). *Modelling Teachers' Ways of Thinking about Rate of Change.* Doctoral Tesis. Arizona State University.

Fennema, E. & Romberg, T. (Eds.). (1999). *Mathematics Classrooms that Promote Understanding*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Lamon, S. (2007). Rational Numbers and Proportional Rasoning: Toward a Theoretical Framework. In Lester, F. (2007). *Second Handbook of Research on Mathematics, Teaching and Learning* (pp. 629-668). NCTM.

NCTM. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics.NCTM. USA.

OCDE. (2002). *Programme for International Students Assesment*. *Sample Task from the PISA 2000 Assesment of Reading, Mathematical and Scientific Literacy*. OECD.

Singh, P. (2000). Understanding the Concepts of Proportion and Ratio Constructed by two Grade Six Students. *Educational Studies in Mathematics*, 43(3), 271-292.

Skemp, R. (1976). Relational Understanding and Instrumental Understanding. *Mathematics Teaching*, 77, 20-26.

Teuscher, D. & Reys, R. (2010). Slope, Rate of Change and Steepness: Do students Understand these Concepts? *Mathematics Teacher*, 103(7), 529-524.