FORMACIÓN DOCENTE EN ESTOCÁSTICOS PARA LA EDUCACIÓN SECUNDARIA

Alfredo García Delgado, Ana María Ojeda Salazar
ggadda@hotmail.com; amojeda@cinvestav.mx
Escuela Normal de Naucalpan; Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN
Superior

Resumen
Esta investigación, de carácter cualitativo (Eisner, 1998), concierne a la comprensión de ideas fundamentales de estocásticos de docentes de secundaria en formación en el último grado de la licenciatura respectiva. El objetivo es identificar lo que requiere de estocásticos el futuro profesor para posibilitar su enseñanza en el aula de secundaria. Las acciones se orientan, epistemológicamente, hacia las ideas fundamentales de estocásticos (Heitele, 1975) y la interacción entre los vértices del triángulo epistemológico (Steinbring, 1991); y cognitivamente, hacia el rol de la intuición en las ideas de estocásticos (Fischbein, 1975). Se aplicó un cuestionario, de opción múltiple con solicitud de justificación de la elección, a 18 docentes en formación al final del curso *La Predicción y el Azar* (SEP, 2002). Los resultados señalan incomprensión de ideas de estocásticos, predominio del pensamiento determinista, limitación en la expresión para justificar respuestas y la necesidad de fortalecer la formación de los futuros maestros de matemáticas de educación secundaria en estocásticos.

Palabras Clave: *Formación docente, Estocásticos, Secundaria.*

1. INTRODUCCIÓN

El plan y programa de estudio de la educación básica (preescolar, primaria y secundaria) en nuestro país se aplica a nivel nacional. Prescribe las asignaturas, los contenidos y el enfoque pedagógico de la acción educativa; en particular, el de matemáticas indica los propósitos, el enfoque y los alcances de la formación matemática de los alumnos de educación básica (SEP, 2011).

En relación con estocásticos planteamos la pregunta: ¿Qué elementos requiere el docente en formación para posibilitar la enseñanza de estocásticos en el aula de secundaria?

Este informe presenta los resultados de la aplicación de un cuestionario dirigido a identificar las dificultades de comprensión de ideas fundamentales de estocásticos de futuros maestros de matemáticas de secundaria, en la antesala al inicio de sus prácticas de campo, correspondientes a su último año de la licenciatura para la docencia en la educación secundaria y al haber finalizado su curso *La Predicción y el Azar* (SEP, 2002).

2. MARCO DE REFERENCIA

Se considera a la enseñanza en su marco institucional como reveladora de la comprensión de ideas fundamentales implicadas en actividades referentes a estocásticos derivadas de fenómenos aleatorios. Esta investigación se orienta, epistemológicamente, por las ideas fundamentales de estocásticos para el currículum (Heitele, 1975), entendiendo por idea fundamental aquella que "proporciona al individuo, en cada etapa de su desarrollo, modelos explicativos eficientes que se distinguen en los distintos niveles cognoscitivos no de manera estructural, sino en su forma lingüística y en sus niveles de elaboración" (p. 188). Las que Heitele propone son: Medida de la probabilidad; Espacio muestra; Adición de probabilidades; Independencia; Equidistribución y Simetría; Combinatoria; Modelo de urna y Simulación; Variable estocástica; La ley de los grandes números y Muestra. Por otro lado, el triángulo epistemológico propuesto por Steinbring (1991) da cuenta de la constitución del concepto matemático; a saber, el concepto matemático se constituye de la interrelación entre él, el objeto y el signo.

Desde el punto de vista cognitivo, consideramos el rol de la intuición en las ideas de estocásticos (Fischbein, 1975), en particular el de las intuiciones que las favorecen, tales como la de la frecuencia.

En la propuesta del curso *La Predicción y el Azar* de la Licenciatura en Educación Secundaria con especialidad en Matemáticas (SEP, 2002), los contenidos están organizados en cuatro bloques temáticos. El primero trata lo referente al azar, como los juegos de azar y la diferencia entre los fenómenos aleatorios y deterministas. En el segundo bloque se estudian en detalle las técnicas de conteo: permutaciones y combinaciones, sus propiedades y aplicación en el cálculo de probabilidades. El tercero se dedica a los diferentes enfoques de probabilidad, sus propiedades y características, con énfasis en la diferencia entre el enfoque clásico y el frecuencial. Las principales funciones de probabilidad y las variables aleatorias se tratan en el último bloque. Por el contenido especificado, este curso incluye las ideas fundamentales de estocásticos siguientes: medida de probabilidad, espacio muestra, adición de probabilidades, regla del producto, combinatoria, variable estocástica, ley de los grandes números.

3. MÉTODO Y DISEÑO DEL INSTRUMENTO

En esta investigación, de carácter cualitativo (Eisner, 1998), participaron 18 estudiantes de la Licenciatura en Educación Secundaria con especialidad en Matemáticas. En una sesión de 60 minutos, se les aplicó un cuestionario al finalizar el curso *La Predicción y el Azar* (SEP, 2002). Los datos se registraron con la escritura en las hojas que presentaron al instrumento impreso.

El cuestionario. Se plantearon seis reactivos, inspirados en la obra de Bressan (2008), de los cuales cinco fueron de opción múltiple (cuatro o cinco opciones, sólo una correcta) con petición de justificación de la elección, y el último planteó una pregunta abierta. La Tabla 1 muestra la caracterización del instrumento.

Tabla 1. Ideas fundamentales implícitas en los reactivos.

Reactivos / **Ideas Fundamentales**	**R_1**	**R_2**	**R_3**	**R_4**	**R_5**	**R_6**
Medida de probabilidad	■	■	■	■	■	■
Espacio Muestra	■	■	■	■	■	■
Adición de probabilidades			■			■
Regla del producto e Independencia	■	■	■	■		■
Equidistribución y Simetría			■			
Combinatoria	■		■	■		■
Modelo de Urna y Simulación						
Variable estocástica			■			■
La ley de los grandes números					■	
Muestra					■	

El tipo de reactivos corresponde al nivel secundaria (véanse en la sección siguiente), para cuya docencia se preparaban los participantes en esta investigación.

A cada respuesta se aplicó la célula de análisis (Ojeda, 2006); se consideraron la opción seleccionada y el tipo de justificación proporcionada respecto a las ideas fundamentales de estocásticos, a los otros conceptos matemáticos requeridos para justificar la elección, a los recursos semióticos utilizados en la justificación y a los términos referentes a estocásticos empleados en la respuesta.

Justificación del instrumento. Si bien el instrumento permitió una aproximación de carácter descriptivo a la información obtenida, nos interesó en particular, de forma cualitativa, la justificación del estudiante de la opción elegida.

i. *Objetivo general del instrumento.* Obtener información del conocimiento de estocásticos adquirido de los estudiantes de la Licenciatura en Educación con Especialidad en Matemáticas al finalizar el curso *La predicción y el Azar* (SEP, 2002).

4. RESULTADOS DEL ANÁLISIS DE LAS RESPUESTAS

La Tabla 2 resume la cantidad de elecciones de opción correcta por reactivo del cuestionario.

Tabla 2. Cantidad de elecciones de opción correcta en el cuestionario.

R_1	Correctas	14	78 %
R_2	Correctas	13	72 %
R_3	Correctas	9	50 %
R_4	Correctas	3	17 %
R_5	Correctas	16	89 %
R_6	Correctas	1	5 %

En R_1 y en R_2 los docentes en formación tuvieron errores semejantes. El objetivo de R_1 fue que el estudiante determinara el espacio muestra mediante la aplicación del principio fundamental del conteo e identificara la equiprobabilidad en la situación presentada. No obstante que el reactivo planteó un tipo de problema común en la escuela primaria y en la secundaria, los estudiantes no aplicaron el principio multiplicativo del conteo y en lugar de ello sumaron, evidenciando así un razonamiento aditivo (Inhelder y Piaget, 1955).

R_1 Isabel tiene 5 blusas y 6 pantalones todos diferentes. Si en la oscuridad elige una blusa y un pantalón, ¿cuál es la probabilidad de que elija justo lo que ella quería ponerse?

a) $\frac{1}{30}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{11}$ d) $\frac{1}{15}$

¿Por qué?

El tipo de justificaciones fue como la que presenta la Figura 1.

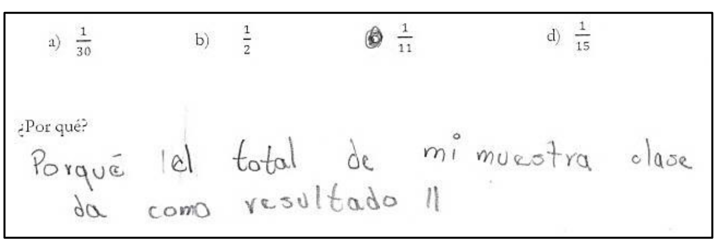


Figura 1. Respuesta dada a R_1.

Cuatro estudiantes dieron justificaciones correctas a su elección, pues aludieron al principio multiplicativo del conteo. Sólo un estudiante expresó en su justificación el principio aditivo y otro no justificó su respuesta. Este reactivo únicamente requiere números naturales, fracciones y sus operaciones; las que efectuaron los estudiantes fueron correctas independientemente de que procedieran en la justificación. De entre los términos utilizados en estas últimas encontramos el de "muestra", con lo que se evidencia una confusión, al menos nominal, entre muestra y espacio muestra.

Seis estudiantes utilizaron el término "combinaciones", lo que exhibió tanto una falta de familiaridad con las técnicas de conteo como una posible dificultad con la determinación del espacio muestra. Otra confusión concernió a "posibilidad" y "probabilidad", utilizados por cuatro estudiantes como sinónimos y que revela la dificultad en distinguir entre las ideas de espacio muestra y medida de probabilidad.

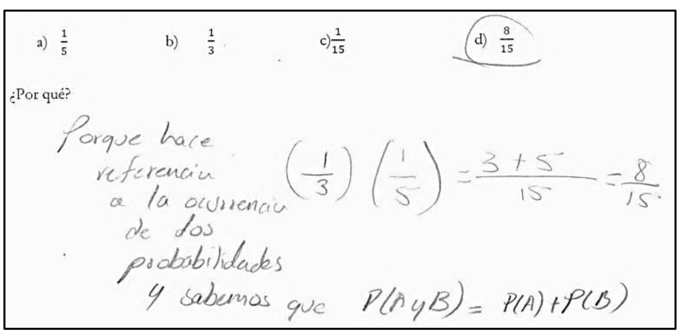
El objetivo de R_2 fue que los estudiantes aplicaran la regla del producto e identificaran los eventos independientes implicados en la situación propuesta:

R_2En un zoológico se hace una revisión veterinaria detallada a una pareja de chimpancés y como consecuencia se determina que el macho tiene una probabilidad igual a $\frac{1}{5}$ de vivir 10 años más, mientras que la hembra tiene una probabilidad igual a $\frac{1}{3}$ de vivir también 10 años más. ¿Cuál es la probabilidad de que los dos vivan 10 años más?

a) $\frac{1}{5}$ b) $\frac{1}{3}$ **c)$\frac{1}{15}$** d) $\frac{8}{15}$

¿Por qué?

De las 13 elecciones de opción correcta realizadas, sólo cuatro justificaciones se refirieron a la independencia de los eventos, siete estudiantes justificaron sin más con el producto de las probabilidades, otro no dio justificación y uno más justificó al tiempo con la suma y con el producto de probabilidades. Las cinco elecciones incorrectas (inciso d)) justificaron con la suma de las probabilidades; una de ellas exhibió también la confusión entre posibilidad y probabilidad; otra, la confusión de la expresión de la probabilidad de la conjunción de eventos independientes con la de la disyunción de eventos mutuamente excluyentes, es decir, la confusión entre las ideas de adición de probabilidades y la regla del producto e independencia, como se muestra en la Figura 2.


a) $\frac{1}{5}$ b) $\frac{1}{3}$ c)$\frac{1}{15}$ d) $\frac{8}{15}$

¿Por qué?

Porque hace referencia a la ocurrencia de dos probabilidades y sabemos que $P(A y B) = P(A)+P(B)$

$\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{3+5}{15} = \frac{8}{15}$

Figura 2. Respuesta dada a R_2.

Los otros conceptos matemáticos requeridos por el reactivo son números naturales, fracciones y sus operaciones, los cuales se aplicaron incorrectamente por dos estudiantes. En sus justificaciones, nueve participantes utilizaron la lengua natural para justificar sus respuestas, mientras que ocho emplearon los símbolos numéricos para la suma de fracciones. De entre las expresiones usadas por los estudiantes, tres utilizaron en su justificación la de "sumas" – de posibilidades (uno), de probabilidades (dos) – también evidenciando con ello su indistinción entre espacio muestra y medida de probabilidad (el primero) y entre exclusividad mutua e independencia (los tres).

En las respuestas incorrectas a R_3 (50%) los estudiantes aplicaron la regla de la adición.

R_3Alfredo y Jesús juegan con dos dados. Si al tirar los dados la suma es 5, 6, 7 u 8, gana Alfredo y si la suma es 2, 3, 4, 9, 10, 11 ó 12, gana Jesús. ¿Cuál es la probabilidad de que gane Alfredo?

a) $\frac{1}{36}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{4}{11}$ **d)** $\frac{5}{9}$

¿Por qué?

La Figura 3 presenta un ejemplo de la justificación que los estudiantes dieron a este reactivo.

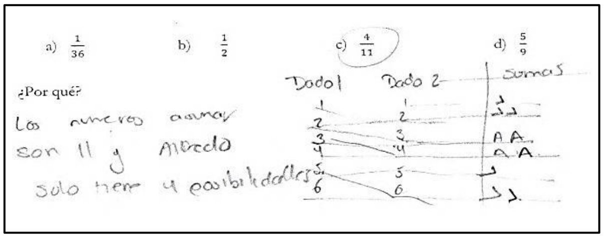


Figura 3. Respuesta dada a R_3.

O sea que un 50% de los estudiantes no se percató de que, aproximadamente, por cada nueve veces que se lanzaran los dos dados, cinco veces ganaría Alfredo y sólo cuatro veces Jesús. La aplicación de los otros conceptos matemáticos requeridos (números naturales, fracciones y su adición) fue correcta. Dos estudiantes justificaron su elección en lengua natural, siete la utilizaron junto con símbolos numéricos; cuatro utilizaron sólo símbolos numéricos y cinco más no dieron justificación. En este reactivo nuevamente se presentó la indistinción entre posibilidad y probabilidad.

El objetivo de R_4fue determinar el espacio muestra e identificar el evento condicionante.

R_4En una urna hay 3 bolas rojas, 3 azules y 3 blancas. Se saca una bola blanca en el segundo intento. ¿Cuál es la probabilidad de que la bola que se sacó en el primer intento no haya sido roja? Las bolas que se sacan se quedan afuera.

a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{3}{6}$ **d)** $\frac{5}{8}$

¿Por qué?

Diez estudiantes asumieron que no se incluyó la opción numérica para el reactivo, pues no se percataron de que dado que en el primer intento no se extrajo la bola blanca resultante en el segundo, sólo había ocho bolas disponibles para el primero, cinco de las cuales no eran rojas, por lo que la probabilidad de que la bola que se sacó en el primer intento no hubiera sido roja era de $\frac{5}{8}$. La Figura 4 presenta una justificación tal de la elección d) para R_4.

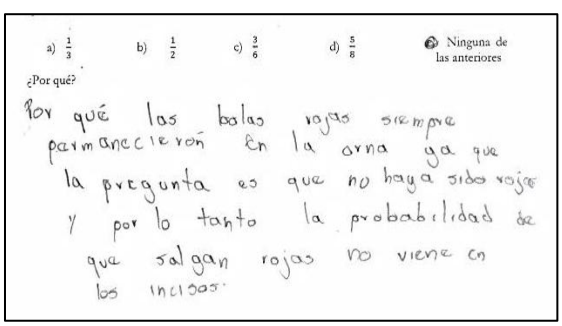


Figura 4. Respuesta dada al R_4.

Otros conceptos matemáticos requeridos por este reactivo son: números naturales, cardinalidad y razón de cardinalidades, para los cuales 16 estudiantes evidenciaron dificultad. Cuatro estudiantes utilizaron la lengua natural para justificar su respuesta, tres trazaron figuras de urna para ilustrar la situación planteada, dos justificaron su respuesta utilizando símbolos y lengua natural, cinco más sólo utilizaron símbolos matemáticos y los tres restantes no dieron justificación alguna.

Únicamente dos de los 18 estudiantes no eligieron el inciso correcto para R_5, reactivo que evocó al enfoque frecuencial y no revistió mayor dificultad para ellos. En acuerdo con el señalamiento por Fischbein (1975), hay una intuición de la frecuencia favorable al razonamiento probabilístico. El objetivo de este reactivo fue que el estudiante determinara la probabilidad con base en la frecuencia relativa dada.

R_5 Los informes de un laboratorio indican que cuando a 25 conejos se les administraron dosis iguales de un fármaco, las lenguas de 20 de ellos adquirieron un color verde claro. Si se replicara la prueba en condiciones idénticas con 1000 conejos, ¿en qué proporción de ellos se esperaría el mismo resultado?

a) En cuatro de cada cinco b) En la mitad c) $\frac{200}{1000}$ d) $\frac{250}{1000}$ e) Ninguna de las anteriores

¿Por qué?

No obstante, los otros conceptos matemáticos requeridos por R_5 – proporción y números naturales – fueron utilizados correctamente por 16 estudiantes sin suministrar evidencia alguna de haber advertido el enfoque de probabilidad tratado en este reactivo. Tres estudiantes utilizaron en su justificación las expresiones: “proporción”, “según una regla de tres”, “porque la razón es de $\frac{1}{5}$”, mostrando con ello el predominio del pensamiento aritmético. Diez estudiantes utilizaron símbolos numéricos para justificar su respuesta, cinco más la lengua natural y dos de ellos la combinación de simbología aritmética y lengua natural.

El objetivo de R_6 fue que el estudiante representara gráficamente la densidad de probabilidad de una variable aleatoria discreta:

R_6 Se lanzan dos dados y se toma el producto del resultado de los dos dados. ¿Cuál es la gráfica de barras de la probabilidad del producto? (Dibuje la gráfica).

17 estudiantes no lograron construir correctamente la gráfica solicitada. Su falta de comprensión de la pregunta planteada provocó desempeños difusos que no articularon en particular las ideas de medida de probabilidad, espacio muestra y variable aleatoria. Únicamente en seis cuestionarios se reveló una aproximación a medida de probabilidad y, de ellos, sólo uno proporcionó la gráfica solicitada correctamente. Solamente dos estudiantes dieron evidencia de haberse percatado de la constitución del espacio muestra compuesto, sin establecerlo por completo (véase la Figura 5), pero en su respuesta se refirieron a las cardinalidades de los eventos compuestos correspondientes a los productos posibles y no a su probabilidad; el resto de los participantes lo subsumieron a los valores de la variable aleatoria.

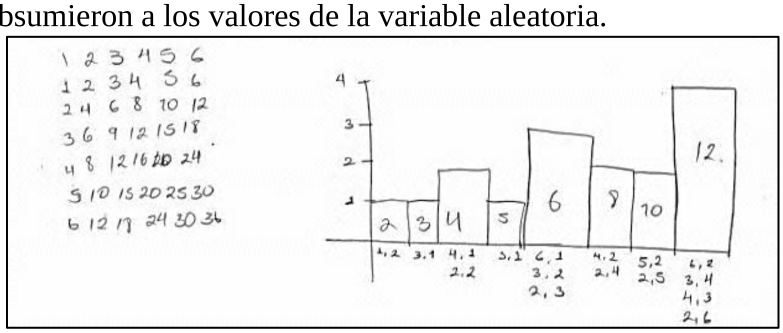


Figura 5. Ejemplo de respuesta a R_6.

Otros conceptos matemáticos implícitos en R_6 son números naturales, su producto y adición, y plano cartesiano. Los tres primeros no revistieron dificultad alguna para los estudiantes, pero presentaron confusión respecto a qué ubicar en cada uno de los ejes como consecuencia de la incomprensión de las ideas fundamentales implicadas en la situación.

Los recursos semióticos utilizados fueron en general la gráfica solicitada; 15 estudiantes utilizaron un arreglo numérico rectangular y gráfica de barras, entre los cuales está el estudiante que contestó correctamente el reactivo; dos estudiantes sólo utilizaron arreglo rectangular y uno más trazó seis diagramas de árbol de un solo orden y su gráfica de barras. Dos estudiantes hicieron explícita la vinculación con la situación propuesta anotando en el eje de las ordenadas las probabilidades y en el eje de las abscisas los productos delos resultados de los dados; sin embargo, uno de ellos asignó la probabilidad $\frac{1}{36}$ al producto 2. Dos estudiantes colocaron en el eje de las ordenadas de su gráfica el término "frecuencia", con lo que testimoniaron su falta de comprensión del enfoque al que se acoge la situación planteada, además de la confusión entre cardinalidad de un evento y valor de variable aleatoria (frecuencia).

Los resultados obtenidos con este reactivo revelaron la falta de comprensión de las ideas de medida de probabilidad, espacio muestra y variable aleatoria meramente con la solicitud de una expresión gráfica asignada a una situación planteada en lengua natural. Es decir, no se logró la interrelación entre objeto, signo y concepto, como lo señala (Steinbring, 1991).

5. CONCLUSIONES Y COMENTARIOS

Los resultados mostrados señalan la necesidad de fortalecer la formación de los futuros maestros de matemáticas de educación secundaria en estocásticos, quienes con el cuestionario aplicado, que planteó reactivos pertenecientes al nivel secundaria, exhibieron dificultades de comprensión de las ideas fundamentales de estocásticos, tales como las confusiones entre medida de probabilidad y espacio muestra, espacio muestra y valores de la variable aleatoria, adición de probabilidades y regla del producto e independencia. Aunque con un número muy reducido de reactivos, la solicitud de justificación en el instrumento permitió identificar dificultades particulares más allá de considerar simplemente los atributos "correcto" o "incorrecto" a las respuestas, las cuales evidenciaron incomprensión de medida de probabilidad, espacio muestra, independencia, combinatoria, variable estocástica, exclusividad mutua e independencia, no identificaron la diferencia entre el enfoque clásico y el frecuencial y exhibieron el predominio del pensamiento determinista.

No obstante, por los resultados aquí encontrados, conviene la solicitud de la expresión en distintos sustentos semióticos, pues: "En términos generales para el desarrollo y comunicación de una actividad matemática, un sistema de signos y el soporte de un registro semiótico, es necesario" (Ojeda, 1999; p. 92). La lengua natural fue el recurso semiótico más utilizado en las justificaciones proporcionadas y la simbología aritmética; sólo en R6 los estudiantes hicieron uso del arreglo rectangular y de la gráfica, mientras que en R4 tres respuestas incluyeron figuras.

Con los resultados de esta investigación es de esperar una práctica docente que por lo menos reproduzca las mismas dificultades e incomprensiones en las aulas de educación secundaria, así como las mismas limitaciones en la argumentación de una respuesta. Esto indica que no se ha satisfecho la necesidad de contar con profesores que conozcan lo que es realmente fundamental en estocásticos, requisito señalado por Heitele (1975) hace casi cuarenta años, para la enseñanza de Probabilidad y Estadística en toda la educación del individuo.

En síntesis, se requiere fortalecer los contenidos de estocásticos en la Licenciatura en Educación Secundaria con Especialidad en Matemáticas, al menos los señalados aquí, mediante la implementación del enfoque frecuencial, con actividades concretas efectivas tanto de juegos de azar como de otro tipo de situaciones, en ambos casos susceptibles de examen mediante técnicas de conteo, con el fin de contrastar el comportamiento de las frecuencias relativas con la probabilidad determinada a priori; tales actividades requerirían el despliegue de recursos semióticos para registrar posibilidades, sus frecuencias, organizarlas e identificar su comportamiento. Las ideas de estocásticos se irían constituyendo como resultado de un repertorio tal de actividades de su enseñanza, de las que se dotara de sentido al tratamiento de los fenómenos aleatorios. Entonces, se habría proporcionado una base para la mejora de la práctica docente en la escuela secundaria.

6. Referencias

Bressan, A. (2008). *Probabilidad y estadística: cómo trabajar con niños y jóvenes. Construyendo paso a paso herramientas y conceptos*. Buenos Aires, Argentina: Noveduc.

DGDC (2011). Plan de estudios 2011. Educación Básica. México: SEP.

Eisner E. (1998). *El ojo ilustrado. Indagación cualitativa y mejora de la práctica educativa*. España: Paidós.

Fischbein, E. (1975). The intuitive Sources of Probabilistic Thinking in Children. Dordrech Holland: Reidel Publishing Company.

Heitele, D. (1975). An epistemological view on stochastic fundamental ideas. *Educational Studies in Mathematics*, 6, pp. 187 – 205.

Inhelder, B. & Piaget, J. (1955). De la logique de l'enfant à la logique de l'adolescent. Essaissur la construction des structures opératoires formelles. Paris: PUF.

Ojeda, A. M. (1999). Concept and representation in the research on probability education. En Hitt, F. y Santos, M. (Eds.). *Proceedings of the 21st. Annual Meeting of PME-NA*. México, 1, 83-96.

Ojeda, A. M. (2006). Estrategia para un perfil nuevo de docencia: un ensayo en la enseñanza de estocásticos. En Filloy (Ed.). *Matemática Educativa, treinta años* (pp. 257-281). México: Santillana-Cinvestav.

SEP (2002). Programa y bibliografía sugerida. La Predicción y el Azar. Licenciatura en Educación Secundaria Especialidad: Matemáticas, Sexto semestre. Programa para la Transformación y el Fortalecimiento Académicos de las Escuelas Normales. México.

Steinbring, H. (1991). The concept of Chance in Everyday Teaching: Aspects of a Social Epistemology of Mathematical Knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 503-522.