EL FENÓMENO DE PERSISTENCIA DE DIFICULTADES EN LA CONSTRUCCION DE CONOCIMIENTO MATEMÁTICO

Martha Jarero Kumul, Isabel Tuyub Sánchez
jarerok@uady.mx, isabel.tuyub@uady.mx
Universidad Autónoma de Yucatán
Medio superior

Resumen
En este avance de investigación, presentamos los resultados derivados de la primera etapa interesados en reconocer la presencia del fenómeno de persistencia de dificultades vinculadas con la construcción de conocimiento matemático en ciertas áreas, para entonces generar explicaciones sistémicas que orienten la siguiente etapa. El análisis se realizó sobre las producciones de 2031, 1677 y 1568 estudiantes inscritos a los semestres segundo, cuarto y sexto, respectivamente, de un bachillerato técnico. Según el semestre se diagnosticó una de las siguientes las áreas de Álgebra, Geometría analítica y Probabilidad y estadística. Los resultados evidencian la presencia del fenómeno de persistencia de dificultades dado que se manifestaron errores como las reportadas en la investigación 30 años atrás.

Palabras clave: *Persistencia, error, dificultad*.

1. INTRODUCCIÓN

Como matemáticos educativos interesados por la construcción de conocimiento matemático escolar, analizamos ciertas dificultades documentadas desde tiempo atrás como las asociadas a errores algebraicos (Booth, 1984; Kieran y Filloy,1989; Rico, 1995; Trigueros, Reyes, Ursini y Quintero, 1996; Panizza, Sadosky y Sessa, 1997; Sierpinska, 2000), y a la comprensión de lugares geométricos estudiados en geometría analítica (Cruz y Mariño, 1999; Cortes y Guerrero, 2007; Santa y Jaramillo, 2011; Molfino y Lezama, 2011). Estas explicaciones en sus inicios centraron la atención en la clasificación de los errores que comenten los estudiantes y de poco se empezó a enfatizar los procesos cognitivos, haciendo alusión a procesos mentales. Sin embargo no se han dado explicaciones en función de la naturaleza misma del área identificada, es decir, de la epistemología de las nociones matemáticas que permiten asociarle un significado o significados al objeto matemático.

A la vuelta de tres décadas, se observa una *persistencia* de las dificultades en la construcción de conocimiento matemático, las cuales se pueden evidenciar en las investigaciones dentro de la Matemática Educativa que las señalan, y a su vez en los exámenes diagnóstico y evaluaciones que se hacen en todos los niveles educativos, lo que lleva a generar un porcentaje de deserción y rezago estudiantil. Por ejemplo, desde los 80´s Kieran y Filloy (1989) exponen la linealidad de pensamiento en los estudiantes al expresar la equivalencia entre las expresiones $(a+b)^2$ y a^2+b^2; situación que se ha repetidodesde entonces.

En las pruebas ENLACE o PISA se reporta que la población de estudiantes mexicanos poseen un dominio matemático insuficiente al encontrarse en las últimos lugares con respecto al área de matemáticas, logrando responder únicamente reactivos que implican contextos familiares, preguntas directas en situaciones explícitas; pero importa determinar en qué áreas prevalecen mayor error y cuáles fueron las causas con respecto a las respuestas incorrectas elegidas (INEE, 2004, 2007, 2010, SEP 2013). Pochulu (2005) plantea que las causas de las persistencias de los errores cometidos por los estudiantes se asocian por un lado a los obstáculos epistemológicos enfrentados por la matemática misma en su desarrollo, a las prácticas de enseñanza centradas en algoritmos descontextualizados y a las actitudes así la falta de dominio sobre antecedentes por parte de los estudiantes.

En este trabajo presentamos los avances de una investigación interesada en la reconceptualización de saberes matemáticos por parte de profesores de un sistema educativo específico que se espera ver traducido en la reformulación de sus prácticas de enseñanza. Entendemos por reconceptualización de saberes matemáticos el cambio de paradigma sobre dichos saberes en tanto objetos matemáticos a enseñar como simples algoritmos, descontextualizados y desprovistos de significado conceptual hacia uno basado en una didáctica de los saberes matemáticos desde una perspectiva múltiple y sistémica del conocimiento, en la que se problematizan dichos saberes.

En la primera etapa de la investigación, lo cual presentamos, interesa reconocer la persistencia de las dificultades reportadas en las áreas de Álgebra, Geometría analítica y Probabilidad y estadística en un sistema de bachillerato técnico; ya bien asociado a la matemática misma o procesos cognitivos del estudiante.

2. MARCO TEÓRICO

Este trabajo se apoya en la teoría socioepistemológica en tanto que interesa explicar de forma sistémica el fenómeno de difusión y construcción conocimiento matemático escolar. Para ello se asume de importancia las cuatro dimensiones que incorpora esta teoría: el estudio de la epistemología del conocimiento, su dimensión sociocultural, los procesos cognitivos asociados y los mecanismos de institucionalización vía la enseñanza (Cantoral y Farfán, 2003). La primera cuestiona la naturaleza del contenido matemático. La segunda reconoce que la construcción se da al seno de prácticas socialmente compartida con cierto carácter normativo. La tercera considera al fenómeno de aprendizaje como un proceso de resignificación del conocimiento matemático por medio del uso y de la funcionalidad de la matemática. Y la cuarta determinada por la intencionalidad de difundir el conocimiento de manera integral.

Particularmente, la primera etapa de la investigación centra su atención en la dimensión epistemológica y cognitiva, de modo que presentamos sintéticamente algunos resultados relacionados con los errores que cometen los estudiantes tanto en Álgebra como en Geometría analítica.

Parte de los errores que cometen los estudiantes en Álgebra se remonta a obstáculos epistemológicos (Malisani, 1999). Aun cuando el desarrollo del simbolismo algebraico facilitó un cambio de una perspectiva procedimental a una estructural en álgebra. Un análisis histórico destaca el uso de las literales, con una pérdida gradual de significado al pasar de descripciones en lenguaje ordinario hacia representaciones simbólicas y procedimientos.

Desde una perspectiva cognitiva, Sfard (1991) en Kieran y Filloy (1989) sugiere que las nociones matemáticas abstractas pueden concebirse estructuralmente (como objetos) y operacionalmente (como procesos) asegurando que esta última es el primer paso para su adquisición. Sin embargo, el proceso de simplificación de expresiones simples puede realizarse por analogía a un proceso numérico. Pero, para expresiones más complejas se requiere desarrollar un sentido de las operaciones sobre expresiones algebraicas como objetos que tienen existencia propia, es decir un sentido estructural donde se aplican propiedades sobre expresiones más que sobre números. Por su parte Hoch y Dreyfus, citados en Vega-Castro, Castro y Molina (2011);

han realizado un esfuerzo por precisarla noción de sentido estructural señalando algunas de las habilidades que engloba en el contexto del álgebra escolar como son ver una expresión o una sentencia algebraica como una entidad, reconocer una expresión o sentencia algebraica como una estructura conocida, dividir una entidad en subestructuras, apreciar las conexiones mutuas entre estructuras y reconocer qué transformaciones es posible realizar y cuáles de éstas son de utilidad.

Por otro lado, los estudiantes no solo deben aprender a trabajar con símbolos literales, sino de que se espera puedan manejar su carácter multifacético, es decir reconocer que un símbolo literal puede asumir más de un papel: como incógnita, como número generalizado o como variable. Se espera que los estudiantes universitarios tengan un manejo sólido y flexible de la variable; siendo esta última interpretación.

Las principales dificultades que presentan los estudiantes del bachillerato en el área de Geometría analítica se encuentran: reconocer las cónicas como lugares geométricos, identificar y describir sus elementos característicos, establecer la relación entre los parámetros de la ecuación y la representación gráfica (cómo la variación de los parámetros determina la transformación de la gráfica de la curva), y apreciar sus potencialidades para modelar fenómenos de la realidad.

Por su parte Cruz y Mariño (1999) refieren que los estudiantes que ingresan a la educación superior presentan dificultades en la comprensión de los contenidos relativos a las secciones cónicas y argumentan que:

> los conocimientos de los estudiantes se limitan al aprendizaje de memoria de las ecuaciones que caracterizan a cada una de las cónicas, a la identificación de sus elementos y a su búsqueda algorítmica empleando fórmulas, sin demostrar haber interiorizado la relación existente entre los diferentes parámetros que intervienen en las ecuaciones de las cónicas y su representación gráfica ni el porqué de su definición como lugar geométrico, lo cual limita la comprensión del alcance de las posibilidades de que disponen (p. 15).

Es entonces que planteamos que existe una desarticulación entre conceptos y procedimientos en el trabajo con secciones cónicas, puesto que muchos estudiantes de bachillerato tienen dificultades para comprender los conceptos de las secciones cónicas como lugares geométricos, mientras que se les facilita la búsqueda algorítmica de sus ecuaciones.

En Cortes y Guerrero (2007) se exponen algunas dificultades asociadas a la visualización, determinante en los cursos de Geometría, dichos autores refieren que la actividad cognitiva asociada al entendimiento de las variables visuales en un tipo de representación causa un conflicto que no es trivial, siendo de mayor dificultad el paso de una representación gráfica a una algebraica; inclusive muchos estudiantes tienen dificultad en establecer conexiones entre datos gráficos y numéricos.

3. MÉTODO

En la primera etapa de la investigación se desarrolló un diagnóstico de conocimiento matemático a estudiantes de un sistema educativo técnico medio superior. Para ello se diseñaron tres instrumentos específico que incorporada 15 reactivos cada uno enfocados a los principales errores reportados en las áreas de Álgebra, Geometría analítica y Probabilidad y Estadística; y cuyos contenidos sean parte del programa de curso estudiado.

La población participante fueron estudiantes de tres semestres diferentes de un sistema educativo técnico en el estado de Yucatán pertenecientes a seis planteles distintos (ver Tabla 1). El instrumento fue aplicado por sus profesores de matemáticas durante una sesión de clase, al inicio del siguiente semestre; es decir una vez concluido el curso anterior, lo que garantizó se estudiaron todos los temas propuestos en el programa.

***Tabla 1*. Población participante**

Grado	Cantidad	% hombres	% mujeres
1°	2031	55.24	44.76
3°	1677	52.36	47.64
5°	1568	49.43	50.57

Edad promedio: 17 años

Aun cuando la intensión del diagnóstico no fue determinar el nivel de aprovechamiento académico, resulta interesante la similitud de los resultados con las pruebas ENLACE. Por ejemplo en la Tabla 2 se presentan los porcentajes de estudiante de cada semestre para cada nivel de aprovechamiento, según si el porcentaje de respuestas correctas se encuentra entre 0-25% será insuficiente, entre 26-50% será elemental, entre 51-75% será aceptable y entre 76-100% sobresaliente.

***Tabla 2*. Porcentaje de estudiantes por nivel de aprovechamiento académico por semestre**

Semestre	Insuficiente	Elemental	Aceptable	Sobresaliente
SEM 1	37.1%	59.4%	3.5%	0.0%
SEM 3	59.3%	39.4%	1.3%	0.1%
SEM 5	30.9%	56.6%	11.7%	0.8%
Total	**42.3%**	**52.2%**	**5.2%**	**0.3%**

Se analizaron cada uno de los reactivos donde se obtiene un nivel de aprovechamiento insuficiente, es decir, donde menos del 25% de los participantes responden correctamente a un reactivo. Por cuestiones de extensión nos limitaremos en este documento a presentar información relacionada con las dos primeras áreas diagnosticadas.

Dificultades en Álgebra

La mayoría de los estudiantes presenta dificultades para aplicar leyes de los exponentes principalmente cuando éstos son negativos, tienden a ignorar el signo del exponente y/o extrapolar leyes y propiedades a otros contextos, como en el siguiente ejemplo se eleva al cuadrado una potencia. Ejemplo del error: $\left(\frac{x^{-5}y^4}{z^3}\right)^2 = \frac{x^{25}y^{16}}{z^9}$.

Como se ha reportado en diferentes trabajos, se hizo presenta la dificultad de desarrollar y simplificar expresiones que involucran productos notables y distribuyen un exponente sobre un polinomio de forma lineal. Tal es el caso del siguiente error $(a+b)^2 = a^2 + b^2$.

Otra dificultad fue reconocer expresiones algebraicas como entidades en particular como aquellas correspondientes a diferencias de cuadrados, tal parece que es necesaria la presencia del exponente cuadrático para considerar que se trata de la naturaleza indicada; por ejemplo las siguientes expresiones no fueron aceptadas como diferencias de cuadrados $36 - 81x^2$ y $49x^2y^4 - 25z^2$. Inclusive aún en expresiones con exponente cuadrático como es el caso de la diferencia de dos binomios al cuadrado no se reconoce como tal, por ejemplo $(x+1)^2-(y-1)^2$.

También presentaron dificultades al momento de evaluar en un polinomio pues operan números con signo de forma inadecuada, en particular ante operaciones de potenciación. Por ejemplo al solicitar evaluar $x=-1$ en la expresión algebraica x^2-3x+1, para unos el resultado es -3 y para otros es -1.

Aún persiste el tratamiento a los radicales como una división entre el índice, por ejemplo al solicitar simplificar $\sqrt{32a^3b^2}$ obtiene $16ab\sqrt{a}$.

Se manifestó la dificultad para reconocer las características de un polinomio que determinan su factorización, tal es el caso de: $x^2(2x+1)^3-4(2x+1)^2$ es $2(2x+1)^2x(x+2)(x-2)$.

Falta dominio sobre las propiedades de la igualdad para distinguir la ecuación de primer grado equivalente a una dada. Expresan que la ecuación $4-\frac{5x}{3}=7$ es equivalente con $5x=-17$.

Dificultades en Geometría analítica

En los siguientes párrafos presentamos las dificultades en el área de Geometría analítica identificadas en este trabajo.

La mayoría de los estudiantes tienen problemas para relacionar los sistemas de coordenadas rectangulares y polares pues no logran determinar los elementos que determinan las coordenadas de un punto para cada sistema. Por ejemplo proponen que el punto $P(-2,2)$ en el sistema coordenado rectangular se corresponde con el punto $(2,45°)$ en el sistema coordenado polar.

Tienen problemas para determinar un elemento de la parábola dados ciertos elementos de la misma pues no distinguen la orientación de la parábola. Proponen que las coordenadas del foco de la parábola con vértice en el origen, eje focal sobre el eje X y directriz $x=-4$, son $(0,-4)$.

Determinar entre un conjunto de ecuaciones aquella que corresponde a la ecuación de una recta perpendicular a una dada. Tal parece que extrapolan la idea de "Si las pendientes de dos rectas perpendiculares tienen signo contrario entonces los coeficientes de la ecuación general también tienen signos contrarios". Por ejemplo proponen que la ecuación de una recta perpendicular a la recta $2x-3y+6=0$ es: $-2x+3y-6=0$.

Presentan dificultades para calcular la excentricidad de una elipse dada su ecuación. Por ejemplo, expresan que $\frac{5}{3}$ es la excentricidad de la elipse cuya ecuación es $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$.

No reconocen los elementos necesarios para determinar la ecuación de una elipse. Por ejemplo expresan que la ecuación de la elipse con focos en los puntos $(0,3)$ y $(0,-3)$ y la longitud de su eje menor 8, es $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$.

Manifiestan dificultad para reconocer que un problema demanda determinar el extremo de un segmento y no el punto medio entre dos puntos dados. Por ejemplo: Sea $P(-1,-1)$ uno de los extremos del segmento PQ y el $R(2,1)$ el punto medio del segmento. Las coordenadas del punto Q son $(1,0)$.

Tienen problemas para determinar la tangente de un ángulo de inclinación. Cometen el error de expresar que la pendiente de una recta cuyo ángulo de inclinación es de $45°$, es $\frac{1}{2}$.

Dificultades asociadas al área de Álgebra impactan en Geometría analítica, tal es el caso de la falta de dominio sobre las propiedades de la igualdad cuando se solicita transformar la ecuación de una recta dada en forma explícita a su forma general. Un ejemplo es el error que se manifiesta cuando expresan que la ecuación de la recta $y = -\frac{5}{2}x + 5$ en su forma general es $5x - 2y + 5 = 0$.

4. REFLEXIONES

Los errores cometidos por los estudiantes se interpretan como conocimientos que no resultan válidos en cierto contexto, es decir, los estudiantes tienen cierto conocimiento que pudo ser funcional en algunos momentos y situaciones, ello se hace su reafirmación; pero al cambiar a otro contexto, muchas veces requiere ajustarse o demanda rupturas de los conocimientos previos. Tal es el caso del aprendizaje de la potenciación, la cual en la secundaria su tratamiento didáctico se presenta como una multiplicación reiterada al trabajar con exponentes naturales pero en el bachillerato esta idea no tiene significado al considerar exponentes negativos, el cero o exponentes fraccionarios.

Con respecto a las dificultades en las áreas que se analizaron en párrafos anteriores, se puede inferir que la persistencia de las dificultades está en interpretar a un número como un resultado y no poder apreciarlo como una equivalencia a un procedimiento, por ejemplo el número 25 como $(5)^2$, esto de igual manera se refleja con los números negativos; la linealidad de los procedimiento algebraicos, todos ellos en relación frecuente con operaciones relacionadas con los exponentes. Cuando los estudiantes del área de geometría analítica presentar problemas en relacionar equivalencias entre diferentes sistemas de coordenadas, parece que la persistencia está en la orientación de ciertos elementos, llámense ubicación del punto o de un vector con respecto al ángulo, de una parábola, ecuaciones de lugares geométricos como rectas perpendiculares, todo ello con relación al signo o valores de ciertos elementos que se expresan en las ecuaciones de dichos lugares geométricos, como pendientes, excentricidades, puntos medios, entre otros; así como persistencia de errores algebraicos que apoyan a un resultado erróneo en el área de Geometría Analítica.

Una vez identificado el tipo de persistencia, se desea buscar explicaciones al reconocer la existencia de dificultades de diferentes naturaleza como pueden ser propias de la matemática, derivadas de la enseñanza o de las demandas cognitivas en el estudiante.

Si la presencia del fenómeno de persistencia del error se ha reportado en resultados presentados 30 años atrás aún están presentes en las producciones de los estudiantes, como se apreció por medio del diagnóstico, entonces ¿Qué conocimientos tienen los profesores sobre la presencia de tales errores? Inclusive ¿Cómo es interpretada la noción de error por los profesores? ¿Qué tratamiento le es dado en las aulas de matemáticas? Por otro lado ¿Cómo son interpretadas las nociones matemáticas asociadas a los errores que comenten los estudiantes? ¿Qué tratamiento didáctico se le otorga en las aulas? ¿Cuáles son los procesos de construcción de conocimiento asociados a las nociones matemáticas asociadas a la persistencia del error? Estas serán las preguntas que guiarán la siguiente etapa de la investigación.

5. REFERENCIAS

Booth, L. (1984). *Algebra: Children´s Strategies and errors. A report of the strategies and errors in secondary mathematics Project*. Berkshire, England: NFER-Nelson Publishing Co.

Cantoral, R. y Farfán, R. (2003). Matemática educativa: Una visión de su evolución. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *6*(1), 27-40.

Cortes, J. y Guerrero, L. (2007). Actividades de aprendizaje para Geometría analítica en el ambiente interactivo RecCon. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 9, 101-118.

Cruz, L., y Mariño, M. (1999). Sistema computarizado para la enseñanza de las secciones cónicas. *Revista Educación*, 97, 14 – 21.

Kieran, C. y Filloy, E. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las Ciencias 7*(3), 229-240.

INEE (2004). *Resultados de las pruebas PISA 2000 y 2003 en México.* Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación. Consultado en agosto de 2013 de: http://www.inee.edu.mx/images/stories/Publicaciones/Estudios_internacionales/PISA2000_2003/Completo/informepisa2003.pdf.

INEE. (2007). *PISA 2006 en México*. Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación. Consultado en agosto de 2013 de: http://www.inee.edu.mx/images/stories/Publicaciones/Estudios_internacionales/PISA2006/Completo/pisa2006completo.pdf.

INEE. (2010). *México en PISA 2009*. Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación. Consultado en agosto de 2013 de: http://www.inee.edu.mx/images/stories/Publicaciones/Estudios_internacionales/PISA_2009/Completo/pisa2009.pdf.

Malisani, E. (1999). Los obstáculos epistemológicos en el desarrollo del pensamiento algebraico. *Revista IRICE*, 13.

Molfino, V. y Lezama, J. (2011). Lugares geométricos: su papel en el aprendizaje de la demostración en geometría. *Educación Matemática*, *23*(1), 37-61.

Panizza, M Sadosky, P. Sessa, C. (1997). *Los Primeros Aprendizajes Algebraicos: El Fracaso del Éxito*. Argentina: Facultad de Ciencias Exactas y Naturales Universidad de Buenos Aires.

Pochulu, M. (2005). Análisis y categorización de errores en el aprendizaje de la matemática en alumnos que ingresan a la universidad. *Revista Iberoamericana de Educación, 35(4),* 1-15.

Rico, L. (1995). Errores en el aprendizaje de la Matemática. En J. Kilpatrick, P. Gómez y L. Rico (Eds.) *Educación Matemática* (pp. 69 – 108). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Santa, Z. y Jaramillo, C. (2011). *Comprensión del concepto de elipse como lugar geométrico.*
Consultado en julio de 2013 de: http://www.cimm.ucr.ac.cr/ocs/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/viewFile/2279/996.

SEP (2013). Resultados históricos 2006-2013. ENLACE 2013. Secretaría de Educación Pública. Consultado en agosto de 2013 de: http://www.enlace.sep.gob.mx/content/gr/docs/2013/historico/31_EB_2013.pdf.

Sierpinska, a. (2000). On some aspects of students´thinking in Linear Algebra. In. J. Dorier (Ed.) *On the Theaching of Linear Algebra* (pp. 209-246). Dordrecht: Kluwer.

Trigueros, M.; Reyes, A.; Ursini, S. y Quintero, R. (1996). Diseño de un cuestionario de diagnóstico acerca del manejo del concepto de variable en el Álgebra. *Enseñanza de las Ciencias*, *14*(3), 351-363.

Vega-Castro, D, Castro, E., Molina, M. (2011). Sentido estructural manifestado por alumnos de 1º de bachillerato en tareas que involucran igualdades notables. En M.M. Moreno, N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática*. *Comunicaciones de los Grupos de Investigación de la SEIEM* (pp. 453-464). Lleida.