CONSTRUCCIONES MENTALES DE LOS ESTUDIANTES RELACIONADAS CON EL CONCEPTO DE CAMPO

Bernarda Jiménez Sandoval, Ofelia Montelongo Aguilar, Lorena Jiménez Sandoval
bjs1304@hotmail.com, omaguilar_m@hotmail.com, lorejim79@gmail.com
Universidad Autónoma de Zacatecas
Superior

Resumen
La siguiente investigación tuvo como objetivo conocer las formas de construcción del conocimiento que tienen los estudiantes al enfrentarse a un problema que involucró la aplicación de una estructura en su totalidad, en este caso la de campo. Para ello se utilizó la teoría APOE como marco teórico y una actividad que permitió conocer las estructuras mentales que los estudiantes tenían del concepto de campo. Arrojando como resultado principal que los estudiantes sólo tenían el concepto a nivel acción, a pesar de haber cursado en su totalidad la materia de álgebra abstracta.

Palabras clave: *Construcción de conocimiento, estructura de campo, APOE.*

1. INTRODUCCIÓN

Los enteros módulo n son útiles a lo largo de un curso de Álgebra Abstracta, porque sirven como ejemplo clave para introducir conceptos que cristalizan el comportamiento de elementos de una estructura algebraica, lo cual no ocurren en las estructuras numéricas usuales como: los números reales, enteros, racionales y complejos, a la vez que ejemplifican comportamientos que sí son comunes a las estructuras numéricas y ocurren en un contexto no necesariamente numérico.

En la materia de Álgebra Abstracta que se imparte en cuarto semestre de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Autónoma de Zacatecas, se aborda el tema de las estructuras algebraicas, de la que se puede dotar al conjunto de los enteros módulo n cuando se definen las operaciones de suma y producto usuales de clases de congruencia.

Desde el inicio del curso se aborda la estructura de grupo $\mathbb{Z}_n$ bajo la suma y la de U_n (subconjunto de $\mathbb{Z}_n$) bajo el producto, resaltando cada una de las particularidades y aspectos que son sujetos de generalización, buscando a través del análisis en clase y solución de ejercicios, que los alumnos realicen procesos de abstracción que hagan más asequible el aprendizaje de las correspondientes generalizaciones. El grupo $\langle \mathbb{Z}_n, + \rangle$ es el ejemplo de grupos cíclicos finitos y se emplea en la clasificación de los grupos cíclicos al igual que el grupo de $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$.

Al introducir el concepto de anillo, $\langle \mathbb{Z}_n, +, \cdot \rangle$ representa el ejemplo clásico de anillo finito, de la misma manera en que $\langle \mathbb{Z}, +, \cdot \rangle$ es el ejemplo de un anillo infinito. Entre las diferencias importantes que tienen estas dos estructuras se pueden resaltar los divisores de cero y los llamados elementos unidades. Posteriormente, se estudia la estructura de anillo de $\mathbb{Z}_n$ como resultado del anillo cociente $\mathbb{Z}/\langle n \rangle$ además de la estructura de campo $\langle \mathbb{Z}_p, +, \cdot \rangle$.

En el área del Álgebra Abstracta o Álgebra Moderna, trabajar con conjuntos o estructuras diferentes a las usuales como los números enteros, racionales o reales, generan dificultades en los estudiantes, sobre todo cuando resuelven problemas que involucran operaciones binarias semejantes a la suma o producto de estos conjuntos numéricos, así como en el empleo de las propiedades que estos cumplen. Los estudiantes suelen confundir las propiedades de las operaciones binarias definidas sobre un conjunto en general, lo que indica que no han logrado coordinar estas operaciones con los elementos del conjunto (Manzanero, 2007).

El interés del tema es porque consideramos que analizar las construcciones mentales de los estudiantes sobre la estructura de campo de $\mathbb{Z}_p$, permite conocer las construcciones mentales sobre los otros conceptos que resultan importantes para la materia de Álgebra Abstracta. Dado que la Teoría APOE (acrónimo de Acción-Proceso-Objeto-Esquema) es una herramienta que sirve para explicar las dificultades de los estudiantes en el aprendizaje de los conceptos matemáticos del álgebra abstracta, álgebra lineal, matemáticas discretas, calculo y teoría de números (Roa & Oktaç, 2010) será esta teoría quien guie nuestra investigación.

El estudio que se presenta es un ejemplo de la utilidad de esta teoría y permite, a través del conocimiento y análisis de las construcciones mentales de los estudiantes sobre el concepto de campo $\langle \mathbb{Z}_p, +, \cdot \rangle$, entender las dificultades en el aprendizaje de conceptos más generales del Álgebra Abstracta, lo cual a su vez permite el diseño de actividades didácticas que superen dichas dificultades y mejoren su aprendizaje.

La intención es aplicar una actividad propuesta por Aguilar & Oktaç (2004), la cual modificamos de tal manera que nos permitiera conocer las estructuras mentales que los estudiantes tenían del concepto de campo, el análisis de los resultados de esta actividad se llevó a cabo en base a la descomposición genética de grupo propuesta por Brown, DeVries, Dubinsky & Thomas (2000), dado que la teoría APOE parte de la reflexión de los conceptos desde la definición matemática (Trigueros, 2005) se considera la definición de campo en términos de la de grupo, a continuación se presenta dicha definición:

Se dice que $\langle K, +, * \rangle$ es un *campo* si y sólo si cumple:

i. $\langle K, + \rangle$ es un grupo abeliano, con elemento neutro aditivo e.
ii. $\langle k - \{e\}, * \rangle$ es un grupo abeliano.
iii. Distributividad: $\forall x, y, z \in K$ se cumple $x * (y + z) = x * y + x * z$ (Fraleigh, 1998, p. 19).

2. MARCO TEÓRICO

La teoría APOE transpone el concepto de abstracción reflexiva, introducido por Piaget, al contexto de las matemáticas de nivel superior, para describir el desarrollo del pensamiento matemático en los estudiantes. Dubinsky usa la abstracción reflexiva para describir cómo un individuo logra ciertas construcciones mentales sobre un concepto determinado, enfrentándolo a situaciones matemáticas que promueven su reflexión, partiendo de la idea del conocimiento matemático como:

> El conocimiento matemático de un individuo es su “tendencia” a responder a las situaciones matemáticas problemáticas en un contexto social, construyendo acciones, procesos y objetos y organizándolos en esquemas con el fin de manejar las situaciones y resolver los problemas (Dubinsky & McDonald, 2001, p.276).

La comprensión de un concepto matemático comienza con acciones sobre objetos físicos o mentales previamente construidos; al repetir y reflexionar estas acciones, el individuo las interioriza logrando así formar procesos, los cuales son después encapsulados para formar objetos. Los objetos pueden ser desencapsulados en los procesos a partir de los cuales fueron formados. Finalmente, las acciones, procesos y objetos pueden ser organizados en esquemas (Asiala, Brown, DeVries, Dubynski, Mathews & Thomas, 1996).

Una *acción* es una trasformación que el individuo percibe como algo externo, en otras palabras es una trasformación mental o física de objetos para obtener otros objetos. Así pues, un individuo cuyo entendimiento de una transformación está limitado a una concepción de acción puede realizar una transformación únicamente bajo indicaciones externas que le proporcionan detalles precisos sobre qué pasos dar.

Además, una *construcción de acción* resulta de una operación mental o física repetible que transforma de alguna manera un objeto físico o mental; de manera general, algorítmica y con estímulos externos (Parraguez, 2009). De acuerdo a Asiala *et al*, (1996), aunque el concepto de acción sea algo limitado, constituye el principio fundamental de la comprensión de un concepto. Es por esto que una persona con nivel de comprensión profunda de los conceptos matemáticos puede resolver problemas haciendo transformaciones cuando es apropiado, de tal manera que no está limitada a realizar acciones (Manzanero, 2007).

Cuando se repite una acción, y el individuo reflexiona sobre esta, puede ser interiorizada en un proceso. Es decir, una construcción interna que hace y realiza lo mismo que la acción, pero ahora, no necesariamente dirigida por estímulos externos (Asiala *et al*, 1996). Una persona que tiene una concepción proceso de una transformación puede reflexionar, describir, o incluso revertir los pasos de la transformación sin realizar estos.

Así pues, el estudiante puede pensar en términos de un proceso de una operación binaria genérica en la que dos objetos entran, algo se hace, y un objeto nuevo sale. Cuando esto sucede diremos que un estudiante se encuentra en la *etapa de proceso.* En otras palabras, cuando un individuo es consciente del proceso como una totalidad, puede pensar en él como un todo y es capaz de actuar sobre él (Manzanero, 2007).

Desde el punto de vista de Asiala *et al*, (1996), en álgebra abstracta, una comprensión de los procesos incluye pensar en las operaciones que se realizan en el conjunto aun cuando no es necesario llevarlas a cabo, sólo pensar en ellas y en cómo se realizan, es decir pensar a los elementos de nuestro problema como clases y realizar las operaciones definidas en el conjunto.

Con una concepción objeto, un estudiante reflexiona sobre las acciones aplicadas a un proceso concreto, y llega a ser consciente del proceso como un todo, realizando aquellas transformaciones (ya sean acciones o procesos) que puedan actuar sobre él, y es capaz realmente de construir esas transformaciones, entonces se dice que el proceso se ha convertido en objeto. En el curso de la realización de una acción o un proceso sobre un objeto, suele ser necesario de-encapsular y regresar el objeto al proceso del cual proviene, con el fin de usar sus propiedades al manipularlo (Asiala *et al*, 1996).

Así pues, la *construcción de objeto* resulta de la reflexión sobre operaciones aplicadas al proceso, que es dinámico inicialmente y quien la posee puede actuar sobre el proceso, puede realizar transformaciones y pensarlo como algo estático, como algo involucrado en sí mismo, es decir, encapsulado (Parraguez, 2009). Una vez que se han construido los objetos y los procesos, es posible hacer interconexiones entre ellos de diversas formas, de tal manera que se vinculen de diferentes maneras.

Al igual que en otras teorías que existen en el contexto de la educación matemática, la teoría APOE considera que en el proceso de aprendizaje de las matemáticas, los estudiantes se enfrentan a conceptos complejos, de acuerdo al área en la que se trabaja y que incluso requiere conjuntar conceptos de diferentes disciplinas, de tal modo que en ocasiones es insuficiente para describir lo que son capaces de realizar los estudiantes y cómo lo hacen. La noción de esquema nos permite considerar este tipo de situaciones.

De acuerdo a Manzanero (2007) en la teoría APOE, la definición de esquema tiene un significado preciso, que permite dar una explicación de la manera en la que se desarrollan los conceptos matemáticos a través de los procesos de enseñanza. Un esquema es una colección de acciones, objetos y procesos organizados de forma estructurada. Es decir, cuando un individuo se encuentra frente a un problema específico, evoca un esquema para tratar de resolverlo, el cual depende del área, y para ello, pone en juego aquellos conceptos previos que tiene a la mano, además de las relaciones entre ellos. El tipo de relaciones que cada persona establece y el tipo de construcción del concepto depende de su conocimiento matemático.

Así pues, los esquemas pueden ser tratados como objetos e incluirse en esquemas de “mayor nivel”, y se dice que ha sido tematizado en un objeto. Como menciona Trigueros (2005), los esquemas evolucionan y se pueden distinguir tres fases o niveles que se caracterizan por el grado de construcción de relaciones entre los elementos constitutivos del esquema (los niveles intra-, inter- y trans-, para las construcciones algebraicas)

En la etapa:

- ***Intra-***, se constituyen relaciones internas del objeto o fenómeno. Este nivel es caracterizado por una observación individual en los ítems, aislado de acciones, procesos de naturaleza similar (Parraguez, 2009).
- ***Inter-***, se constituyen relaciones entre los objetos o fenómenos de conocimiento, es decir, se caracteriza por la posibilidad de construcción de interrelaciones entre acciones, procesos y objetos de otros conceptos o de los mismos. Uno es capaz de percibir y utilizar, si es necesario ítems de naturaleza similar (Parraguez, 2009).
- ***trans-***, las relaciones adquieren mayor coherencia y se estructuran las relaciones de nivel *inter*. En este nivel el individuo puede trabajar con el esquema de una forma mucho más estructurada, además se siguen construyendo y enriqueciendo mediante la construcción de nuevas relaciones entre otros objetos y otros esquemas (Trigueros, 2005).

3. DESARROLLO Y EXPERIMENTACIÓN

La teoría APOE propone una metodología con su ciclo de investigación, el cual contempla tres fases: el análisis teórico, el diseño e implementación de estrategias de enseñanza y la observación, análisis y verificación de datos.

El propósito del análisis teórico es dar un modelo de cognición para un concepto, es decir, una descripción de las construcciones mentales específicas que un estudiante puede hacer para desarrollar su entendimiento del concepto. A dicho entendimiento lo llama descomposición genética del concepto (Manzanero, 2007). En esta etapa del ciclo de investigación, nosotros consideraremos la descomposición genética de grupo propuesta por Brown, DeVries, Dubinsky & Thomas (2000), en donde se explica que el concepto de grupo es un esquema integrado a su vez por tres esquemas: el de conjunto, el de operación binaria y el esquema de axioma. Los esquemas de operación binaria y de conjunto están tematizados para formar objetos y son coordinados a través del esquema de axioma.

El esquema de axioma incluye la noción general de que una operación binaria definida en un conjunto puede o no satisfacer una propiedad, que es esencialmente el proceso de comprobación del cumplimiento de la propiedad. Se incluyen cuatro objetos específicos obtenidos mediante la encapsulación de los cuatro procesos correspondientes a los cuatro axiomas de grupo (cerradura, asociatividad, existencia del elemento neutro y existencia del elemento inverso). La comprobación de un axioma consiste en coordinar la noción general de satisfacer una propiedad con el proceso específico para el axioma (de-encapsulando el objeto) y su aplicación a una operación binaria y un conjunto en particular (Asiala *et al*, 2000), en nuestro caso esta idea aplica para cada una de las operaciones binarias definidas en el campo $\mathbb{Z}_{29}$ y el conjunto $\mathbb{Z}_{29}$ o $\mathbb{Z}_{29} - \{\bar{0}\}$ según corresponda con cada operación.

De este modo, la operación binaria y el conjunto son de-encapsulados a su concepción proceso y los tres procesos (axioma, operación binaria y conjunto) están coordinados para establecer si el axioma se satisface o no. Los cuatro axiomas de esta operación se coordinan en el proceso total de la satisfacción de cada una de las cuatro propiedades descritas por el axioma de grupo correspondiente.

El ciclo de investigación considera que la descomposición genética de un concepto puede evolucionar de tal manera que la información que arroje sea lo mejor de las observaciones recolectadas en la investigación, en relación a lo que el estudiante puede hacer para comprender un concepto. Dicha evolución puede realizarse después de llevar a cabo la recolección y análisis de los datos, y encaminarse a una nueva investigación (Manzanero, 2007).

En la segunda fase el ciclo de investigación que contempla el diseño e implementación de los instrumentos, se aplicó un cuestionario que consistía de una actividad didáctica propuesta por Aguilar & Oktaç (2004). Dicha actividad se aplicó a un grupo de estudiantes del cuarto semestre de la licenciatura en Matemáticas de la Universidad Autónoma de Zacatecas. La entrevista fue diseñada para conducir la discusión en clase. Al final, se pidió a los estudiantes que concluyeran la actividad de manera individual.

A continuación describimos con más detalle la actividad didáctica: se utiliza para crear un conflicto cognitivo en un ambiente de aprendizaje cooperativo organizando a los estudiantes en tres equipos (dos de dos alumnos y uno de tres) para que juntos eligieran una palabra que codificarían e intercambiarían con otro equipo, el problema central de la actividad es la decodificación de la palabra intercambiada.

Para el código se emplea el campo $\mathbb{Z}_{29}$ de acuerdo a la siguiente tabla:

A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*	*I*	*J*	*K*	*L*	*M*	*N*
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**

Ñ	*O*	*P*	*Q*	*R*	*S*	*T*	*U*	*V*	*W*	*X*	*Y*	*Z*	*.*	*-*
15	***16***	***17***	***18***	***19***	***20***	***21***	***22***	***23***	***24***	***25***	***26***	***27***	***28***	***0***

Los estudiantes debían realizar lo siguiente:

Paso 1. Una vez elegido el texto que se va a codificar hay que agrupar las letras por parejas, de izquierda a derecha. En caso de que la cantidad de letras de la palabra sea impar, convencionalmente colocamos guion al final de la palabra.

Paso 2. Sustituir cada letra por el número correspondiente, de acuerdo a la tabla, los que constituirán los valores de $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{y}$ para calcular los valores de $\boldsymbol{x}'$ y $\boldsymbol{y}'$ usando el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{3x + 2y} &= \boldsymbol{x'} \\ \boldsymbol{5x + \quad y} &= \boldsymbol{y} \end{aligned}$$

Paso 3. Asociar a los valores obtenidos para $\boldsymbol{x}'$ y $\boldsymbol{y}'$ las letras que corresponden de acuerdo a la tabla para conformar la palabra cifrada.

Con base a la descomposición genética, se analizaron las construcciones mentales de los estudiantes sobre el concepto del campo Z_{29}. La recolección de datos empíricos se realizó a través de la grabación de la puesta en escena de la actividad didáctica, la recolección de las hojas de respuesta que elaboraron los estudiantes durante la realización de la actividad y la recolección del ejercicio que realizaron de manera individual una vez concluida la discusión en clase.

Los estudiantes transitaron por tres fases al realizar la actividad, la primera que llamaremos Codificación de la palabra y que corresponde al paso 1 de la actividad, la segunda De-codificación (paso 2 y 3 de la actividad) y finalmente la tercera que fue la entrevista. Debido a que los estudiantes no tuvieron dificultades al codificar la palabra que les correspondía, mostraremos solo los resultados más importantes que se dieron en la fase 2 correspondiente a la decodificación de la palabra que les tocó.

Fase 2: De-codificación (estrategias que utilizaron al momento de resolver el problema de forma satisfactoria).

En esta fase los tres equipos presentaron problema al tratar de decodificar la palabra que les correspondía, dado que ello implicaba resolver un sistema de ecuaciones, al resolver el sistema, mezclan clases con números, y utilizan algunas de las propiedades de $\mathbb{Z}_{29}$ en la resolución. Sin embargo, no identifican las propiedades de inverso aditivo e inverso multiplicativo, y al percatarse de que una de las variables era una fracción (ver Imagen 1) les presentó un conflicto pues esta fracción no tenía sentido en la estructura de campo de $\mathbb{Z}_{29}$.

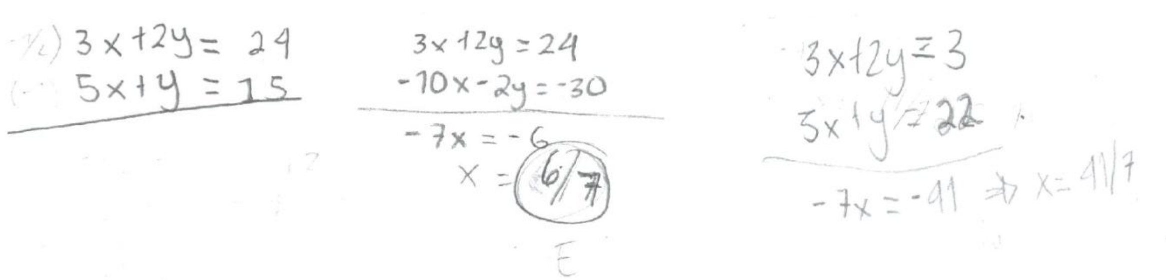

Imagen 1

Fase 3: Entrevista

La entrevista se realizó con la intención de profundizar más sobre lo que realizaron cada uno de los equipos en las hojas de respuestas. Por equipo uno de los integrantes explica sus procedimientos en el pizarrón, guiados por la entrevista previamente estructurada.

Los miembros de cada equipo se etiquetan con los siguientes renombres: Equipo 3 (A1, A2); Equipo 2 (B1, B2, B3) y Equipo 1 (C1, C2, C3)

Presentamos parte de la transcripción correspondiente al equipo 2:

> **B3:** Bueno, para el sistema, en los primeros dos, para resolver no tuvimos ningún problema, en el primero, porque sin nos daban números enteros, y en las últimas dos letras también nos daban números enteros, pero entonces cuando intentábamos resolver las dos parejas de en medio, ahí fue donde nos salían fracciones, entonces hay, este… y en las últimas dos letras también. . .
>
> **Prof.**: ¿En qué momento les salían fracciones? ¿Cómo hicieron ese proceso?
>
> **B3:** Al tiempo de plantear el original, cuando solo estábamos tomando en cuenta que solo había hecho un recorrido nos quedaba este sistema. Entonces ya lo resolvíamos y nos fijamos siempre que al tiempo de resolverlo, nos quedaban fracciones
>
> **B3:** Entonces aquí fue donde ya nosotros comenzamos a sumar vueltas para que nuestro sistema tuviera solución, primero asumimos que daba nada más una vuelta, entonces ya nada más le sumábamos 29, pero en el original, y ya a partir de aquí hacíamos otro sistema
>
> **Prof.:** ¿Lo hicieron para evitar las fracciones?
>
> **B3:** Y ya otra vez este de nuevo lo multiplicábamos por menos 2, entonces ya lo resolvíamos, ya nos fijábamos que nuestro sistema tenía solución en los enteros.

Esto muestra cómo los estudiantes se dan cuenta que están trabajando en el conjunto de los enteros modelo 29, sin embargo para resolver el sistema no hacen uso de los inversos aditivos y multiplicativos, es decir no consideran la estructura que tiene el conjunto.

4. CONCLUSIONES

Las conclusiones obtenidas del análisis de los instrumentos se enuncian a continuación:

- La evidencia analizada deja claro que los estudiantes no muestran el concepto de campo en la etapa esquema a pesar de que habían estudiado esta estructura.
- Los estudiantes tiene dificultades para asociar la estructura del campo a las propiedades de las operaciones binarias definidas en él, en particular los inversos aditivo y multiplicativo.
- A pesar de haber visto la estructura de los enteros modulo $\boldsymbol{n}$, durante el curso, no son capaces de coordinar las operaciones binarias de los elementos del campo, en el momento de resolver un problema en un contexto diferente.
- Los estudiantes prefieren utilizar métodos analíticos-aritméticos que reflexionar sobre sus conocimientos previos.
- En términos de la construcción de los enteros como campo, se observa a partir del análisis, que predomina en ellos la concepción acción de operación binaria.
- La evidencia de los resultados del ejercicio que ya resolvieron de manera individual deja claro que sólo tienen el concepto de campo en la etapa acción, pues una vez que se hizo el

análisis al final de la actividad sólo con la ayuda de la maestra asumieron la estructura de $\mathbb{Z}_{29}$ como la estructura en la cual estaban realizando, o debían realizar las operaciones, y sólo así fue que pudieron concluir la actividad sin ningún problema, es decir, tuvieron que recibir instrucción directa sobre la aplicación de la definición de las operaciones y la estructura de campo para concluir la actividad.

- Otra conclusión importante que se desprende de este estudio en relación con la investigación en educación matemática es la importancia de hacer investigación sobre la manera en cómo los estudiantes aprenden conceptos que hacen referencia directa a las operaciones usuales de suma y producto en contextos numéricos para entender hasta donde se comprenden conceptos más generales que dependen de procesos de abstracción.
- El estudio de los esquemas de los estudiantes dentro del marco de la teoría APOE ha mostrado ser una herramienta útil y versátil. La información que se obtiene utilizándolos sobre el fenómeno estudiado es muy rica y, a nivel de didáctica, proporciona mucha información al poner de relieve dificultades de los estudiantes que pasan inadvertidas en otro tipo de estudios y en el trabajo en el aula. Los estudios apoyados en la noción de esquema señalan, además, aquellas relaciones en las que hay que hacer mayor énfasis en la docencia y proporcionan indicadores de la manera de hacerlo.

5. Referencias

Aguilar, P., y Oktac, A. (2004). Generación del Conflicto Cognitivo a través de una actividad de Criptografía que involucra Operaciones Binarias. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 7(2),117-144.

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D., Dubinsky, E., Mathews, D. y Thomas, K. (1996). A Framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education. En J. Kaput, Shoenfeld, A. y Dubinsky, E. (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education (Vol. II*, pp. 1-32). U.S.A.: American Mathematical Society.

Brown, A., DeVries, D. J., Dubinsky, E., & Thomas, K. (2000). Learning Binary Operations, Groups, and Subgroups. *Journal of Mathematical Behavior*, 16(3), 187-239.

Dubinsky, E. & McDonald, M. (2001). APOS: A Constructivist Theory of Learning in Undergraduate Mathematics Education Research. En Holton, D. (Eds.). *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study* (Vol. *7*, pp. 273-280). Kluwer Academic Publishers.

Frailegh, J. (1998). *Algebra Abstracta*. México, D. F.: Addison-Wesly Iberoamericana.

Manzanero, L. (2007). Sistemas de Ecuaciones Lineales: Una Perspectiva desde la Teoría APOE. (Tesis de maestría no publicada), Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN. México.

Parraguez, M. (2009). *Evolución Cognitiva del Concepto Espacio Vectorial*. (Tesis de maestría no publicada), CICATA-IPN. México

Roa, S. y Oktac, A. (2010). Construcción de una descomposición genética: Análisis teórico del concepto transformación lineal. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 13(1), 89-112.

Trigueros, M. (2005). La Noción de Esquema en la Investigación en Matemática Educativa a Nivel Superior. *Educación Matemática*, 17(1), 5-31.