



## MATEMÁTICA Y LABORATORIO DE FÍSICA: HACIA UNA ENSEÑANZA INTERDISCIPLINARIA

Rogelio Martínez García, Mario Armando Giordano Moreno, Pedro Javier Ubaldo Salinas  
rmartinezga@ipn.mx, mgiordano@ipn.mx, pubaldos@ipn.mx  
Centro de Estudios Científicos y Tecnológicos No 4 “Lázaro Cárdenas”, Cinvestav- IPN  
Medio Superior

### Resumen

Se propone un curso-taller con el objetivo de presentar actividades complementarias a las estrategias de enseñanza tradicionales, mediante la realización de experimentos en el laboratorio de Física: Plano Inclinado, Tiro parabólico y Elongación de un Resorte. Las actividades de aprendizaje se orientan a relacionar esos fenómenos físicos con los conceptos matemáticos implícitos, dándoles sentido a éstos mediante los datos experimentales. La propuesta responde a los programas institucionales del bachillerato tecnológico que establecen 90 horas para cada unidad de aprendizaje de matemáticas, 18 de las cuales se asignan a actividades que se desarrollan en escenarios denominados “extra aula” o bien “aprendizaje en otros ambientes” en los planes y programas de estudio (DEMS, 2008a, 2008b, 2008c). Las actividades se realizan en condiciones de tiempo real de enseñanza dentro del aula de matemáticas y en el laboratorio de Física como escenario “extra aula”.

**Palabras clave:** *Ambientes de aprendizaje, matemática en contexto.*

### 1. PROPÓSITO Y ALCANCE

Este curso-taller tiene el propósito de generar un espacio de discusión y reflexión mediante las experiencias derivadas de la realización de las prácticas en el laboratorio de Física. Particularmente, interesa discutir con los participantes la pertinencia de vincular contenidos matemáticos específicos con la obtención y el tratamiento de los datos que proporciona la realización concreta de los experimentos físicos. Así, se pretende dar sentido a dicha información al vincularla con los contenidos de Área Bajo la Curva, Semejanza de Triángulos y Ecuación de Segundo Grado, contenidos matemáticos que se encuentran en estrecha conexión con la interpretación de los fenómenos físicos experimentados y que simultáneamente requieren del contexto físico para enriquecer sus propios significados matemáticos. El curso-taller está dirigido a profesores o investigadores interesados en la enseñanza y aprendizaje de matemáticas o ciencias en el nivel medio superior. Los resultados obtenidos al llevar a cabo esta propuesta en el bachillerato tecnológico CECyT 4 “Lázaro Cárdenas” a lo largo de los dos últimos semestres, se someterán a la consideración de los docentes de matemáticas participantes en el taller, con el objetivo de reflexionar en relación a la *estrategia de enseñanza* implícita en la propuesta.

### 2. MARCO TEÓRICO O CONCEPTUAL

En su sentido histórico, el señalamiento de Wussing (1998) de que “las matemáticas no son en absoluto un ámbito autónomo, sino una componente integrante de la vida social; es decir, las matemáticas han estado, ahora y siempre, en permanente correlación con la producción y reproducción de los fundamentos materiales e ideales de la vida social” (p. 5), apunta a modelar la Enseñanza del conocimiento matemático en su articulación con las ciencias experimentales, particularmente en el Laboratorio de Física. Así, concebida la matemática como un medio de construir representaciones simbólicas de las experiencias y de los fenómenos que estudian las ciencias, es un aspecto que ha sido fundamental para el desarrollo de éstas. Sin embargo, también

es reconocida la reciprocidad en esta relación; el avance científico es un motor para el desarrollo de la matemática, sin hablar de otras áreas del conocimiento, como las ciencias sociales o el arte.

Se reconoce en las ramas de la matemática un origen en problemas planteados desde las ciencias, por mencionar un caso, el desarrollo del Cálculo ante la necesidad de describir el movimiento en la Física de Newton. Esta relación recíproca que impulsa el conocimiento debe reflejarse en la enseñanza y en la formación escolar de los jóvenes, a fin de que desarrollen perspectivas científicas mucho más ricas e integrales. En este sentido, Campanario y Moya (1999) señalan la necesidad de transformar los enfoques tradicionales con los que se lleva a cabo la enseñanza de las ciencias: “los enfoques alternativos a la enseñanza tradicional insisten en la necesidad de que los alumnos desempeñen un papel más activo en clase. Esta actividad puede consistir en tareas diversas, desde realizar experiencias hasta resolver problemas...” (p. 189). Desde nuestra perspectiva, vincular el aula de matemáticas con el laboratorio de Física representa una oportunidad para generar ambientes de aprendizaje enriquecidos y para promover en los estudiantes su comprensión de conceptos y su dotación de sentido a experiencias realizadas en espacios de experimentación científica.

Otros autores orientan sus investigaciones al campo de la psicopedagogía: Moreira y Greca (2003) subrayan “La insatisfacción con el concepto piagetiano de estadio, unida a varios factores psicológicos y didácticos, ha hecho que las investigaciones se hayan ido orientando progresivamente hacia el estudio de las ideas de los alumnos sobre fenómenos científicos específicos” (p. 2). Estos estudios han confirmado con abundantes datos que los alumnos tienen sus teorías personales implícitas (Pozo, 1992) y que tal conocimiento previo es un factor muy relevante para el aprendizaje de las teorías científicas. Con base en esto se confirma lo afirmado por Ausubel: “el conocimiento previo es el factor aislado que más influye en el aprendizaje” (en Moreira y Greca, 2003, p.1).

En una situación de enseñanza formal, la estrategia de conflicto implicaría que el profesor generase una disonancia cognitiva en el alumno suficientemente grande para llevar a una acomodación, pero no tan grande que condujera al abandono de la tarea. El resultado de la acomodación sería un cambio conceptual.

### 3. MÉTODO

La estrategia de enseñanza se fundamenta en la realización de experimentos típicos de la Física newtoniana y en el posterior tratamiento de los datos así obtenidos, para hacer explícitas relaciones y conceptos matemáticos fundamentales. La estrategia de enseñanza se considera parte del desarrollo de las unidades de aprendizaje, tanto de Física como de Matemáticas, toda vez que se han identificado la articulación de los contenidos y los tiempos previstos en los programas. La **modelación** de los fenómenos bajo estudio es una parte importante de la estrategia, ya que permite relacionar registros y tratarlos para avanzar en la explicitación de las relaciones y los conceptos matemáticos que interesa destacar.

Para el tema del *Área Bajo la Curva* la estrategia se centra en descubrir relaciones entre dos funciones asociadas mediante la antiderivada, en los casos de la velocidad de un objeto y su desplazamiento y del alargamiento de un resorte y el trabajo que éste acumula. A continuación, se promueve un proceso de reflexión referido a la relación entre las funciones modeladas, a fin de

dotar de significado a los modelos elaborados, gráficos o algebraicos, e iniciar una aproximación intuitiva al teorema fundamental del cálculo.

Para el caso del *Plano Inclinado*, se pone de manifiesto el concepto de relación de semejanza de triángulos. La realización de la práctica permite, por una parte, el reforzamiento de los fundamentos adquiridos por los alumnos de cuarto semestre y, por la otra, su desarrollo permite a los de segundo semestre la posibilidad de dotar de sentido a la relación de semejanza que se trata en el curso de Geometría y Trigonometría, con el estricto rigor del tiempo real de enseñanza.

El *Tiro Parabólico* representa un problema práctico que requiere de matemática estudiada en la Unidad de Aprendizaje de Álgebra, unidad didáctica IV, por lo que se diseñó una estrategia de enseñanza basada en cuatro problemas que requieren del planteamiento y solución de ecuaciones de segundo grado como modelo matemático, que incluyeron: 1) la caída libre, 2) el tiro parabólico como composición de dos movimientos independientes, uno vertical y otro horizontal, 3) áreas y 4) teorema de Pitágoras. La ecuación de segundo grado modela el tiempo de vuelo de un proyectil; la práctica correspondiente permite al estudiante identificar la aplicación del concepto de ecuación cuadrática. Los estudiantes lograron construir la representación elemental del fenómeno físico, de lo que se establecieron las condiciones para su comprensión, así como un acercamiento al concepto formal, que permitió incorporar a los estudiantes de Álgebra con los de Física I. En síntesis, la Tabla 1 muestra la articulación de los conceptos de matemáticas (M) de área bajo la curva, relación de semejanza y ecuación de segundo grado, con las prácticas del laboratorio de Física (LF), y los semestres respectivos en números romanos.

Tabla 1. Articulación de contenidos.

Matemáticas (M)	Competencia Particular: Contenido	Semestre		Laboratorio de Física (LF) Practicario
		M	LF	
Cálculo Integral	<b>CP3:</b> Teorema fundamental del cálculo.	V	III	Física I (16): 13-Movimiento Rectilíneo Uniforme, 14-Movimiento Rectilíneo Uniformemente Variado
Geometría y Trigonometría	<b>CP2:</b> Método axiomático deductivo y propiedades de las figuras.	II	IV	Física II (17): 4-Plano Inclinado
Álgebra	<b>CP4:</b> Funciones y ecuaciones cuadráticas	I	III	Física I (16): 16-Tiro Parabólico

#### 4. DISEÑOS DIDÁCTICOS

Se describen a continuación los diseños didácticos que se proponen para dar seguimiento a la estrategia de enseñanza referida en el apartado 2.

*Elongación de un resorte.* Los participantes proceden a realizar el experimento que consiste en colgar un resorte y, en su extremo colgante, añadir pesos que se van acumulando, al tiempo que se mide la elongación producida cada vez que se incrementa el peso. El experimento se realiza tres veces a fin de establecer como medidas experimentales de la elongación los promedios de las

mediciones correspondientes en los pesos. Con estos datos se construye una gráfica de peso entendido como fuerza aplicada en el resorte— contra alargamiento y se procede a encontrar una función que modele convenientemente el experimento. Con los modelos obtenidos, tanto gráfico como funcional, se procede a interpolar valores de fuerza aplicada en el resorte o bien de elongación producida y a cuestionar el significado de los elementos presentes en el experimento y en los modelos obtenidos, con el propósito de dotar de sentido al área contenida por la curva trazada en la gráfica de fuerza contra el eje de la elongación. La actividad continúa orientada a calcular el área bajo la curva en diferentes casos de elongación o de fuerza y a hacer explícito el significado físico que esos resultados tienen, así como a proponer una regla general para calcular el área bajo la curva en términos de la elongación del resorte. Finalmente, la actividad se orienta a descubrir relaciones entre la función fuerza aplicada en el resorte y la función trabajo desarrollado por éste (la cual corresponde a la regla para el área bajo la curva), con el propósito de avanzar en la significación del teorema fundamental del cálculo en el sentido de su formulación embrionaria: “la razón de cambio del área bajo una curva es igual a su ordenada” (Edwards, 1979). Se trata de hacer explícita la relación existente entre la razón de cambio instantánea del área bajo la curva y el valor funcional correspondiente en la curva misma. Desde el enfoque de la Física se pretende hacer explícita la relación entre fuerza aplicada y trabajo acumulado o desarrollado por el resorte como funciones asociadas mediante la anti derivada.

*Plano inclinado.* Los participantes proceden a realizar el experimento que consiste en subir un carro de “Hall” en un plano inclinado cierto ángulo, mediante una cuerda de la cual pende un portapesos al que se le van agregando pesas hasta lograr el avance del carro de “Hall” a velocidad constante, tomando dato de este valor. Se construye un diagrama de cuerpo libre que muestra todas las fuerzas que intervienen. Mediante la suma de fuerzas se construyen ecuaciones lineales (álgebra) para la resolución del cálculo del coeficiente de fricción. Para obtener estas ecuaciones es necesario utilizar el concepto de semejanza de triángulos, de la geometría euclidiana. Los conceptos matemáticos se relacionan con fenómenos físicos, lo que constituye una manera de promover que el estudiante utilice sus conocimientos de matemáticas.

*Tiro Parabólico.* Los participantes proceden a realizar el experimento que consiste en lanzar un proyectil (balón) mediante un cañón, registrando valores de la altura del cañón y de la distancia que alcanza el proyectil. El tiro parabólico está compuesto de dos movimientos independientes, a saber: movimiento rectilíneo uniforme y caída libre, que son representados mediante el álgebra vectorial. Es importante señalar que para los estudiantes de álgebra (primer semestre) estos temas (movimiento rectilíneo uniforme, caída libre y relación aditiva de vectores) aún no han sido tratados por la enseñanza, ya que en el plan de estudios corresponden a la unidad de aprendizaje Física I en el tercer semestre, por lo cual se ha considerado conveniente no abordarlos en esta estrategia de enseñanza. Con los datos obtenidos calculamos el tiempo de vuelo del proyectil modelado por una ecuación cuadrática. La resolución de esta ecuación debe ser realizada por los estudiantes de álgebra como ejercicio de aplicación de una ecuación de segundo grado, mientras que para los de tercer semestre es un refuerzo en sus conocimientos adquiridos en la clase de teoría.

## 5. CONSIDERACIONES FINALES

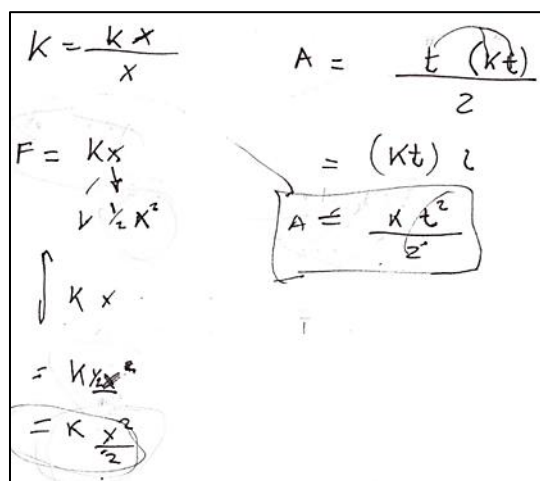
Esta propuesta está enmarcada en el Acuerdo Académico Colegiado entre el Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav del IPN y el CECyT 4 del IPN. El acuerdo establece como objetivo general “Derivado de los procesos de enseñanza y de aprendizaje desarrollados en el

aula: Estudiar las causas posibles de los problemas identificados por los profesores titulares de las unidades de aprendizaje de matemáticas y construir propuestas alternativas a los problemas en cuestión”.

A partir de dicho objetivo, se han planeado y se han llevado a cabo acciones orientadas al fortalecimiento de la docencia e investigación en el aula a lo largo de los últimos tres años, particularmente en el aula de matemáticas, pero, a partir del segundo año de trabajo, también se han realizado acciones en vinculación con el laboratorio de Física. Uno de los resultados del acuerdo referido en el párrafo anterior es la implementación, en condiciones de tiempo real de enseñanza, de la estrategia objeto de este curso-taller.

Entre los resultados observados al poner en marcha esta estrategia con los estudiantes de los autores de esta propuesta, señalamos los siguientes:

1) Para el caso del estudio del área bajo la curva, la utilización en el aula de los datos obtenidos de los experimentos ya referidos permitió generar secuencias didácticas orientadas a analizar la relación entre una función y la función área asociada. Si bien algunos de los estudiantes llegaron a reconocer en la segunda una antiderivada de la primera y a dotar de significado al área misma en términos de la función bajo estudio (la velocidad de un objeto en función del tiempo o la fuerza aplicada a un resorte como función del alargamiento), no se llegó a dotar de significado a la formulación del teorema fundamental del cálculo, en el sentido referido por Edwards (1979). Se analizó el desempeño de un estudiante interactuando con el profesor en una entrevista semi-estructurada (Zazkis y Hazzan, 1999), realizando la tarea de dotar de significado al área bajo la curva en el caso del experimento de la elongación de un resorte. Este análisis lleva a suponer que dichos resultados se confirman. El estudiante llega a reconocer una función área asociada a la función fuerza aplicada sobre el resorte, y a reconocer dicha función área como una función antiderivada de la función fuerza aplicada; sin embargo, no logra asociar convenientemente ambas funciones en el sentido dinámico del teorema fundamental del cálculo, es decir, en términos de la equivalencia entre la variación instantánea del área bajo la curva de una función y el valor funcional de ésta véase la figura 1. Esta experiencia permite reconocer la importancia de la interiorización de conceptos previos, esencialmente el de razón de cambio, como una condición necesaria para avanzar en la formalización del teorema fundamental del cálculo.



The image shows handwritten mathematical work. On the left side, it starts with  $k = \frac{kx}{x}$ . Below that, it shows  $F = kx$  with a downward arrow pointing to  $\frac{1}{2} kx^2$ . Then, it shows an integral  $\int kx$  followed by  $= k \frac{x^2}{2}$  and  $= k \frac{x^2}{2}$ . On the right side, it shows  $A = \frac{t(k t)}{2}$  which simplifies to  $= (k t) t$  and finally  $A = \frac{k t^2}{2}$ . There are some scribbles and corrections in the handwriting.

Figura 1. La función área asociada a la fuerza aplicada al resorte.

2) Respecto a la unidad de aprendizaje de Geometría y Trigonometría, se indagó sobre los conocimientos adquiridos acerca de la semejanza de triángulos, al término de la unidad y después de haber efectuado la estrategia de enseñanza basada en diferentes problemas tradicionales que se encuentran en los libros de texto para la Geometría Euclidiana. Se seleccionaron diez alumnos por su comprensión del tema y disposición para participar en el experimento del plano inclinado, el cual se realizó en el laboratorio de Física II, y se utilizó el guión original de la práctica; sin embargo, se vio la necesidad de adecuarlo al objetivo de la actividad. Considerando el tema que se buscaba desarrollar mediante la estrategia de aprendizaje, conjuntamente los docentes de Geometría y Trigonometría y de Física distribuyeron a los diez alumnos de matemáticas en los equipos de trabajo de laboratorio de Física, que se realizaba en su horario habitual sin opción a repetición. Se acordó videogravar la sesión completa y surgió la necesidad de investigar más detalles de los desempeños de los estudiantes, para lo cual se aplicaron entrevistas semiestructuradas individuales (Zazkis y Hazzan, 1999) a dos de ellos con el fin de reconocer su comprensión del fenómeno físico mediante la modelación gráfica y algebraica (véase la Figura 3). Para ello se orientó el interrogatorio hacia la exigencia matemática.



Figura 2. Operación experimental

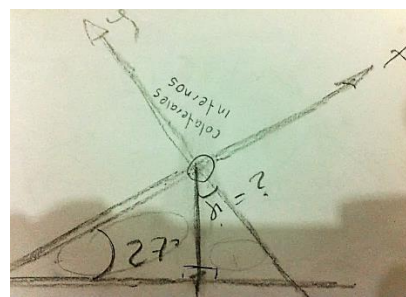


Figura 3. Representación de relaciones de semejanza

3) Experimento *Tiro parabólico*. Del grupo de Álgebra del primer semestre, al término de la Unidad IV “Funciones y Ecuaciones cuadráticas” se seleccionaron 12 estudiantes por su disposición a participar en la realización del experimento para la comprensión al tema, e integrarse con los alumnos del tercer semestre en el horario habitual del laboratorio de Física. Sin opción a repetir la práctica, se le inició con una introducción de los antecedentes de conocimientos matemáticos que requiere la modelación del tiro parabólico. Previamente, los estudiantes buscaron información al respecto y dieron seguimiento a los pasos indicados, orientados a la comprensión del fenómeno físico y al desarrollo de cálculos de los principales parámetros: tiempo de vuelo, alcance o desplazamiento, la altura máxima. En la Figura 4 se ilustra la misma ecuación que se vio en la clase de matemáticas y la que se trató en la clase de Física. El experimento se realizó durante el horario habitual de dos horas y los cálculos matemáticos se registraron en papel, registros que nos permitieron reconocer procedimientos erróneos de los estudiantes en los procesos de la resolución de las ecuaciones de segundo grado (véase la Figura 5).

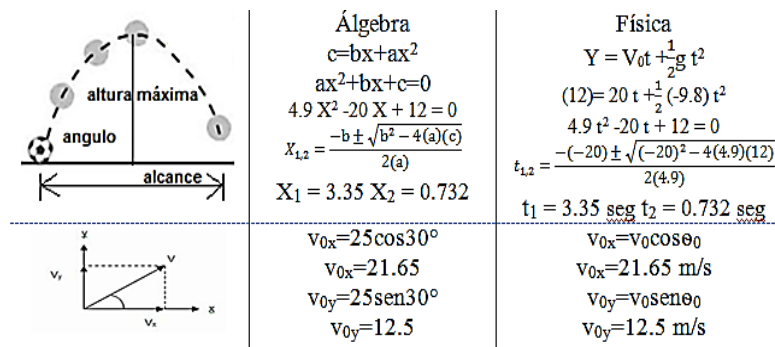


Figura 4

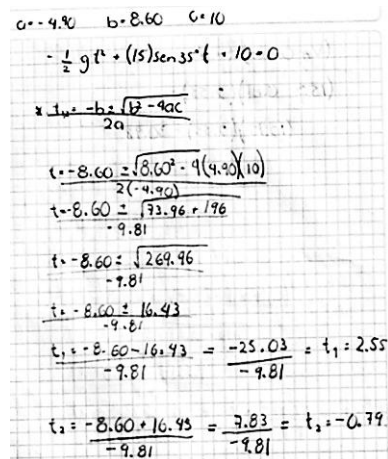


Figura 5

Al finalizar la práctica se utilizó el recurso del simulador “PhET” (2012), que fue operado por cada uno de los alumnos para la comprobación de los resultados que obtuvieron durante el experimento. Este recurso les permitió la confrontación de sus predicciones en la determinación del alcance máximo del objeto lanzado, a la vez que observaron el efecto en dicho alcance, al variar el ángulo de inclinación del cañón, antes de disparar el proyectil. Ante la oportunidad de variar los parámetros, como la altura del cañón, el ángulo de inclinación, marcar el lugar del impacto y medir la distancia o el alcance máximo, así como la altura máxima, que compararon con sus valores iniciales, el medio (PhET) cubrió la función de verificación de sus predicciones.

### Agradecimientos

Al Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, (DME/Cinvestav del IPN) y a los investigadores integrantes del Seminario: Ana María Ojeda S., Ignacio Garnica y Héctor Chávez R.

Al Centro de Estudios Científicos y Tecnológicos “Lázaro Cárdenas” (CECyT No. 4), a sus autoridades y a los Docentes-Investigadores miembros del Seminario.

### 6. REFERENCIAS

- Campanario, J. y Moya, A. (1999). ¿Cómo enseñar ciencias? Principales tendencias y propuestas. *Enseñanza de las Ciencias*, 17(2), 179-192.
- DEMS IPN (2008a). *Programa de Estudios de la Unidad de Aprendizaje Álgebra*. México.
- DEMS IPN (2008b). *Programa de Estudios de la Unidad de Aprendizaje Geometría y Trigonometría*. México.
- DEMS IPN (2008c). *Programa de Estudios de la Unidad de Aprendizaje Cálculo Integral*. México.
- Edwards, C. (1979). *The Historical Development of the Calculus*. EE.UU: Springer-Verlag.
- Moreira, M y Greca, M. (2003). Cambio conceptual: Análisis crítico y propuestas a la luz de la teoría del aprendizaje significativo. *Ciencia e Educacao, Bauru*, 9(2), 301-315.
- PhET (2012). *Interactive Simulations University of Colorado*. Recuperado de: <http://phet.colorado.edu>.



- Pozo, J.I. et al. (1992). Las ideas de los alumnos sobre ciencia como teorías implícitas. *Infancia y Aprendizaje*, 62-63, 187-204.
- Wussing, H. (1998). *Lecciones de Historia de las Matemáticas*. España: Siglo XXI de España Editores, S.A.
- Zazkis, R. & Hazzan, O. (1999). Interviewing in Mathematics Education Research: Choosing the Questions. *Journal of Mathematical Behavior*, 17(4), 429-439.