MAXIMIZANDO EL ÁREA A TRAVÉS DE DIFERENTES REGISTROS DE REPRESENTACIÓN

Bartolo Ponce García, Guadalupe Cabañas Sánchez
ponce.22@hotmail.com, gcabanas.sanchez@gmail.com
CIMATE- Universidad Autónoma de Guerrero
Superior

Resumen
En esta investigación nos interesamos porque un grupo de estudiantes le dieran significado y sentido a la derivada a través de su uso. El estudio se sustenta de un problema contextualizado, en el que se privilegió que los estudiantes transitaran por tres registros de representación (en el sentido de la teoría de representaciones semióticas): tabular, gráfico y analítico. Los resultados evidencian, que mediante los registros de representación tabular y gráfico, los estudiantes reconocieron que los valores determinados, son sólo aproximaciones a la solución del problema, y con el analítico, comprenden que es el que conlleva a la solución óptima, esto es, el valor máximo del área de una región rectangular cuando el perímetro permanece constante.

Palabras clave: *Maximización de áreas, registros de representación, derivada y problemas contextualizados*.

1. INTRODUCCIÓN

El concepto de derivada de una función, junto con el de integral, son claves en el cálculo (Sánchez-Matamoros, García & Llinares, 2008). En el contexto escolar, se introduce en el quinto semestre de la enseñanza de nivel medio superior. Las investigaciones sobre la enseñanza y aprendizaje del Cálculo en general y con la derivada en particular, han reportado problemáticas diversas, entre ellas, dificultades que prevalecen en los estudiantes, algunas, atribuidas al privilegio algorítmico (Dolores, 1998), otras, a obstáculos de tipo epistemológicos asociados a este concepto desde la perspectiva geométrica (Dolores, 1989, citada en Dolores, 2010). Moreno y Cuevas (2004) por ejemplo, evidencian interpretaciones erróneas tanto en estudiantes (de ingeniería y de maestría) como en profesores de matemáticas de nivel medio y superior acerca de los conceptos de máximos y mínimos, mientras resuelven problemas contextualizados que los situaron a localizar un máximo en un punto crítico el cual podía calcularse mediante el criterio de la segunda derivada. Los autores reconocen respuestas que contradicen la solución intuitiva del problema planteado e incluso reflexiones escasas sobre la solución obtenida. En las interpretaciones tanto de los estudiantes como de los profesores, identifican que obviaron considerar información relativa al dominio de la función. Esta problemática la atribuyen entre otras cosas, a una enseñanza de la matemática rutinaria y descontextualizada, contribuyendo con ello, a que los estudiantes no le den sentido ni significado. Artigue (1995) sostiene, que aunque se puede enseñar a los estudiantes a realizar de manera más o menos mecánica algunos cálculos de derivadas y primitivas y a resolver algunos problemas estándar, hay dificultades para hacerlos entrar en el campo del cálculo y para hacerlos alcanzar una comprensión satisfactoria de los conceptos y métodos de pensamiento que son el centro de este campo de las matemáticos.

La literatura especializada, da cuenta de la diversidad de problemáticas asociadas a conceptos fundamentales del cálculo en general y del diferencial en particular. En la que se reconoce además, de la importancia porque los estudiantes le den sentido y significado a la matemática, destacan los problemas contextualizados o de aplicación. Es esta dirección en que se inscribe el estudio que presentamos, el cual se interesó porque un grupo de estudiantes de matemáticas, aplicaran el concepto de derivada al resolver problemas sobre maximización de áreas, a objeto de que le dieran sentido y significado. Las preguntas que guiaron este trabajo, fueron: a) ¿Los estudiantes de matemáticas logran transitar de un registro de representación a otro, en particular en el tabular, el gráfico y el analítico? b) ¿Los estudiantes interpretan de forma adecuada el comportamiento de los datos a través de los registros de representación tabular, gráfico y analítico? c) ¿Reconocen que el área máxima óptima se determina mediante el uso de la derivada?

Para llevar adelante este trabajo, se diseñó una situación de aprendizaje en la que se privilegió que los estudiantes transitaran entre los registros de representación tabular, gráfico y analítico mientras resolvían problemas sobre maximización de áreas. En ese proceso, sus argumentos emergieron del análisis de datos sobre el objeto de estudio. Elegimos como marco teórico a la teoría de representaciones semióticas de Duval (1999), que enfatiza sobre la comprensión de objeto, para que le dieran significado y sentido a la derivada a través de su uso al resolver problemas contextualizados o de aplicación.

2. Fundamentos teóricos

Los fundamentos teóricos se sustentan de la teoría de representaciones semióticas de Duval (1999). Dado que una de las particularidades del aprendizaje de las matemáticas es privilegiar el análisis cognitivo, y para eso se requieren de la utilización de diferentes sistemas de expresión y de representación, distinto a los del lenguaje natural. Duval puntualiza que no se debe de confundir el objeto matemático, en nuestro caso la derivada, con su representación ya que tal desconcierto desencadenará, a mediano o largo plazo, una pérdida de comprensión y los conocimientos adquiridos pronto llegarán a ser inútiles fuera de su contexto de aprendizaje. Para la comprensión en matemáticas, Duval (1999) enfatiza en la importancia por distinguir entre un objeto y su representación, ya que constituye un punto estratégico para el aprendizaje de la matemática. Uno de los argumentos esenciales que reconoce este investigador para el uso de varios registros de representaciones, se basa en la existencia de representaciones mentales, es decir, todo aquel conjunto de imágenes y de concepciones que un individuo puede tener sobre un objeto, sobre una situación y sobre aquello que les está asociado.

Las representaciones semióticas a decir de Duval (1999), son aquellas producciones constituidas por el empleo de signos (enunciado en lenguaje natural, fórmula algebraica, gráfico, figura geométrica...) que no parecen ser más que el medio del cual dispone un individuo para exteriorizar sus representaciones mentales, es decir, para hacerlas visibles o accesibles a los otros. Sostiene, que parecería que la *semiosis* (aprehensión o producción de una representación semiótica) y la *noesis* (aprehensión conceptual de un objeto) son independientes, sin embargo, dada la necesidad de las representaciones semióticas para algunas funciones cognitivas fundamentales y la implicación recíproca de las representaciones mentales y de las representaciones semióticas, parece también legítimo decir, que no hay noesis sin *semiosis*; es la *semiosis* la que determina las condiciones de posibilidad y de ejercicio de la *noesis*.

Desde la perspectiva teórica de representaciones semióticas (Duval, 1999). La coordinación de varios registros de representación semiótica resulta fundamental para una asimilación de un objeto, además es necesario que el objeto no se confunda con sus representaciones, pero debe ser reconocido en cada una de ellas. De acuerdo con esta teoría, los sistemas semióticos, deben permitir el cumplimiento de las tres actividades cognitivas inherentes a toda representación.

1. Constituir una marca o un conjunto de marcas perceptibles que sean identificables como *una representación de alguna cosa* en un sistema determinado.
2. Transformar las representaciones de acuerdo con las únicas reglas propias al sistema, de modo que se obtengan otras representaciones que puedan constituir una ganancia de conocimiento en comparación con las representaciones iniciales.
3. Convertir las representaciones producidas en un sistema de representaciones en otro sistema, de manera tal que éstas últimas permitan explicitar otras significaciones relativas a aquello que es representado.

La conexión desde este trabajo entre comprensión, significado y sentido, apoyados desde la teoría de representaciones semióticas, se establece, cuando el estudiante: a) es capaz de representar un objeto en un sistema sin confundirlo con su representación, b) transforma las representaciones de acuerdo con las únicas reglas propias al sistema, de modo que tiene otras representaciones, y; c) convierte las representaciones producidas en un sistema de representaciones en otro sistema, de manera tal que éstas últimas permitan explicitar otras significaciones relativas a aquello que es representado.

Con base en ello, se contribuye además, a que los estudiantes no solamente comparen las representaciones iniciales y conviertan las representaciones producidas en un sistema de representación en otro sistema, también, que en el proceso, expliciten otras significaciones relativas a aquello que es representado, como es el caso de la maximización de áreas mediante la derivada.

3. MÉTODO

a) Participantes

En la investigación participaron 5 estudiantes (22-25 años de edad) que cursaban el octavo semestre de una licenciatura en matemáticas. Su participación, se dio por invitación expresa al profesor de la unidad de aprendizaje *Seminario de Investigación*. Los antecedentes académicos de los estudiantes consistieron del concepto de derivada y sus aplicaciones en el contexto propio de la matemática y del concepto de máximo, considerados como básicos a fin de que los estudiantes estuviesen en condiciones de intervenir en las actividades, al menos hipotéticamente.

b) La situación de aprendizaje

La situación de aprendizaje se constituyó de un problema contextualizado, planteado por etapas, en forma de actividades, los cuáles son las siguientes:

b.1) Actividad 1: Maximizar el área del terreno rectangular (Parte 1)

> Don Jorge cuenta con 240 metros de malla para encerrar una parte de un terreno de 25000 m^2, que ocupará como huerto el cual tendrá forma rectangular. El quiere saber las medidas que deberán tener los lados del huerto que desea cercar para tener el área más grande posible. Para resolver su problema, Don Jorge elaboró la siguiente tabla, en la que registró datos de tres posibles casos de terrenos con medidas de largo y ancho, así como del área. Ayuda a Don Jorge a determinar qué medida deberán tener los lados del huerto, para que el área sea máxima.

Casos	Ancho del terreno (*a*)	Largo del terreno (*l*)	P=2*a*+2*l*	Área del terreno (m^2)
1	55 m	65 m	240 m	
2	70 m	50 m		
3	80 m	40 m		

Con base en los datos de la tabla, realiza un análisis, apoyándote de las preguntas siguientes: ¿Qué datos cambian? ¿Qué datos se mantienen constantes? ¿Cómo lo determinaste? ¿En qué caso, se obtuvo un área mayor del terreno? ¿Por qué ninguno de los tres casos anteriores, cumple con ser el área máxima buscada? Argumenta en cada caso tu respuesta.

El **registro de representación** movilizado por los estudiantes en esta actividad fue el tabular. A través de la interacción con este registro (al completar datos y luego analizarlos), se esperaba que reconocieran qué permanece constante y qué cambia. Con base en ello, debían reconocer y argumentar, en qué casos el área obtenida es máxima y comprender además, por qué ninguno de los casos registrados cumple con la exigencia del problema, la solución óptima.

Actividad 2: Maximizar el área del terreno rectangular (Parte 2).

Don Jorge le pidió al hijo Luis, quien estudia matemáticas, que lo ayude a determinar las medidas que deben tener los lados del huerto rectangular para tener el área máxima, considerando que debe utilizar 240 metros de malla para cercarlo. La función que modela la situación es: $f(x) = -x^2 + 120x$. Apóyate de la tabla y de las preguntas para ayudar al hijo de Don Jorge a resolver el problema y completa los datos faltantes.

Ancho del terreno (x)	Largo del terreno $(120 - x)$	Perímetro=240 m	Área del terreno en m^2 $f(x) = -x^2 + 120x$
5 m		240 m	
	105 m		
40 m			3200 m^2
	60 m		
85 m			
100 m			
110 m			

¿Cuál es la variable independiente y la variable dependiente? ¿Qué valores pueden tomar las variables independientes? Argumenta tu respuesta. En seguida, realiza una gráfica de la función que modela el problema planteado.

Ahora analiza el comportamiento gráfico, basándote en las siguientes preguntas: ¿En qué valor o valores de la variable independiente, la función alcanza un valor máximo? En términos del problema, ¿Qué significa un valor máximo de la función? Argumenta ampliamente tu respuesta.

Los **registros de representación** que movilizaron los estudiantes en esta actividad fueron el tabular y el gráfico. En la tabla completaron datos relacionados con la medida de los lados del terreno, su perímetro y medida del área. Estos datos también se usaron para elaborar una gráfica, a objeto de que analizaran cómo se comportan desde este registro, que reconocieron visualmente el valor máximo de la gráfica de la función que modela el problema planteado, en este caso, el vértice de una parábola y como fin último, qué significa un valor máximo de la función.

Actividad 3: Maximizar el área del terreno rectangular (Parte 3).

> Retomando el problema planteado en la actividad 1 y la función que modela el problema, ayuda al hijo de Don Jorge a resolver el problema, apoyándote de lo siguiente:
>
> Determina $f'(x)$ y construye su gráfica en el mismo plano donde se construyó $f(x)$. ¿Qué relación observas entre la gráfica de $f(x)$ y $f'(x)$? ¿Qué significa $f'(x) = 0$? Determina el valor máximo de la función apoyándote de las representaciones gráficas y de sus expresiones algebraicas. ¿En qué valor de la variable independiente se alcanza el máximo en la función $f(x)$? Y Con base en el análisis anterior, ¿cuáles son las medidas de los lados del terreno rectangular, para que su área sea máxima?

Los **registros de representación** que movilizaron los estudiantes en esta actividad fueron: el tabular, el gráfico y el analítico. El registro tabular, se usó para realizar la gráfica. El analítico, para determinar la solución óptima del problema. El registro gráfico, para relacionar los resultados obtenidos mediante los registros analíticos $f(x)$ y $f'(x)$, con sus respectivas gráficas. Con base en ello, reconocer la solución óptima del área máxima.

c) Contexto de aplicación de la situación de aprendizaje

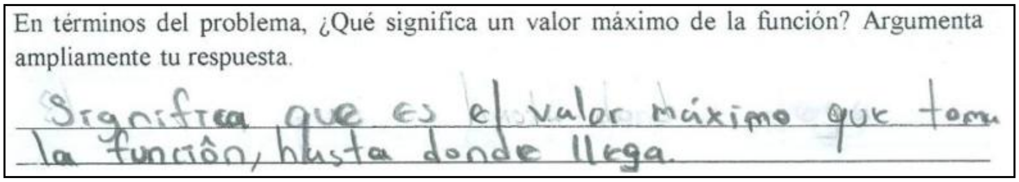
Las actividades se resolvieron individualmente en una sesión, en un ambiente de lápiz y papel. El tiempo promedio que usaron en este proceso fue de 1 hora y 40 minutos.

4. LOS RESULTADOS

El análisis se sustenta de la explicación verbal y no verbal de cada uno de los participantes (estudiante E1, E2,… E5) y se presenta por actividad.

Actividad 1. El análisis de las producciones estudiantiles en esta actividad, da cuenta de que cuatro de ellos completaron de manera exitosa la tabla. De las reflexiones y argumentos que esgrimieron, se observó, que tres (E2, E4 y E5) son los que reconocieron: a) qué permanece constante y qué cambia, b) en qué casos el área obtenida es máxima y; c) Por qué ninguno de los casos registrados cumple con la exigencia del problema, la solución óptima. En el caso de E1, si bien no reconoció qué es lo que cambia y qué permanece constante, si logró identificar el caso del área rectangular en la tabla, representa el área máxima, pero además, que ninguno de los datos es la solución óptima. El otro estudiante por su parte (E3), sólo completó la tabla, aunque de forma incorrecta.

Actividad 2. Los cinco estudiantes completaron de forma adecuada la tabla y pasaron al registro gráfico sin dificultad. Del análisis al comportamiento de los datos mediante la gráfica, se observó que todos lograron interpretar visualmente como valor máximo de la función a través del vértice de dicho gráfico. Sustentaron este argumento como sigue: *que este punto, es el vértice de la parábola*. Significa, que los aspectos visuales contribuyeron a este primer acercamiento, siempre que la gráfica realizada sea la que represente la situación. En cuanto a la pregunta: qué significa un valor máximo de la función en términos del problema planteado, el análisis evidencia que sólo E1 y E4 reconocieron que este significado está asociado al área máxima del terreno rectangular, mientras que el resto, afirmó *que es el valor máximo que toma la función hasta donde llega* (ver Figura 1). Su respuesta más bien atiende a la gráfica y no a la situación objeto de estudio.


En términos del problema, ¿Qué significa un valor máximo de la función? Argumenta ampliamente tu respuesta.

Significa que es el valor máximo que toma la función, hasta donde llega.

Figura 1. Significado de máximo en un problema de maximización de áreas.

Algunos estudiantes lograron reconocer que este punto es la solución al problema. Este grupo de estudiantes mantuvo sus argumentos en el contexto gráfico, es decir, tuvieron dificultades para interpretar el comportamiento de los datos.

Actividad 3. En esta actividad se observó que sin excepción, los participantes lograron derivar la función dada de forma adecuada así como realizar su representación gráfica y la de la función original, en un mismo plano. Significa, que transitaron sin problema de un registro de representación a otro. Por cuanto al análisis pedido, se encontró que una vez hechas las gráficas, las analizaron. Con base en ello, reconocieron la relación que hay entre la gráfica de la función y la de su derivada, esto es, que la abscisa de la coordenada donde la gráfica de la función alcanza el máximo, es la misma donde la gráfica de la función de la primera derivada corta al eje X, algunos lo indicaron mediante una línea punteada (Caso de E3, en Figura 2).

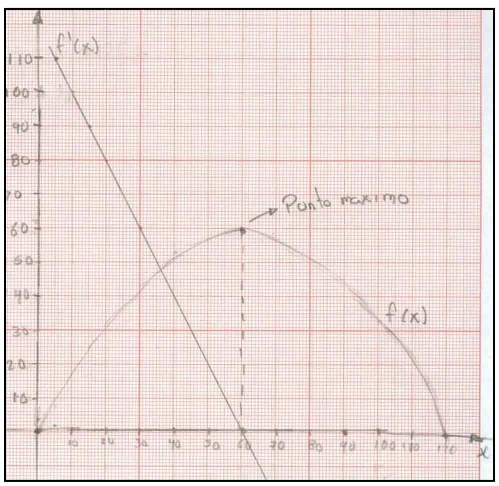
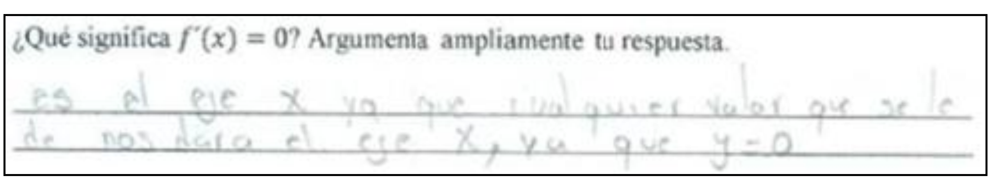


Figura 2. Caso de E3.

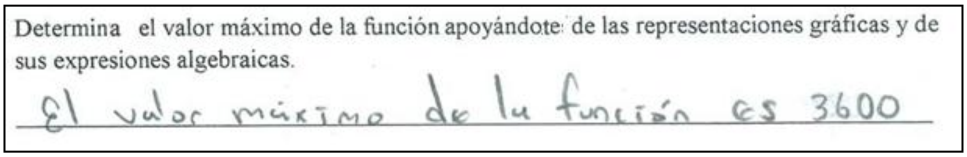
Ante la pregunta qué significa $f'(x) = 0$, se observó que E1, E3 y E5 argumentaron que *es el máximo de* $f(x)$, contrario al resto, quienes lo relacionaron con el eje x, (ver figura 3). Lo que hicieron en este caso, fue relacionar de manera errónea $f'(x) = 0$ con $y = 0$, es decir, equiparan $f(x) = y$, Sin reflexionar en que $f'(x) \neq y$.


¿Qué significa $f'(x) = 0$? Argumenta ampliamente tu respuesta.

es el eje X ya que cualquier valor que se le de nos dara el eje X, ya que y=0

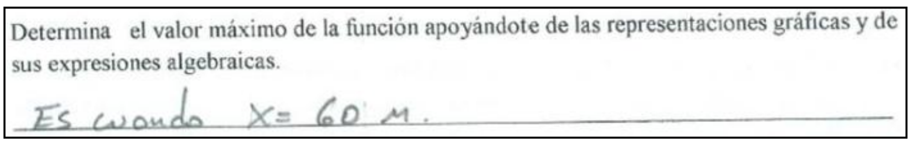
Figura 3. Un significado de una función significa $f'(x) = 0$ es el eje X.

Respecto al valor máximo de la función, cuatro de los estudiantes (E2, E3, E4 y E5) lograron contestar que es 3600 (ver Figura 4), mientras que E1 lo relaciona con el valor de la variable independiente, (ver Figura 5). En el primer caso, es el que cumple con las exigencias de la situación. En el segundo caso, la respuesta más bien se relaciona con el valor de la variable independiente donde la función alcanza el máximo. Significa, una comprensión escasa de la situación por parte de estos estudiantes.


Determina el valor máximo de la función apoyándote de las representaciones gráficas y de sus expresiones algebraicas.

El valor máximo de la función es 3600

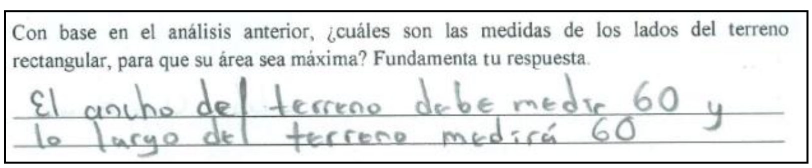
Figura 4


Determina el valor máximo de la función apoyándote de las representaciones gráficas y de sus expresiones algebraicas.

Es cuando x= 60 m.

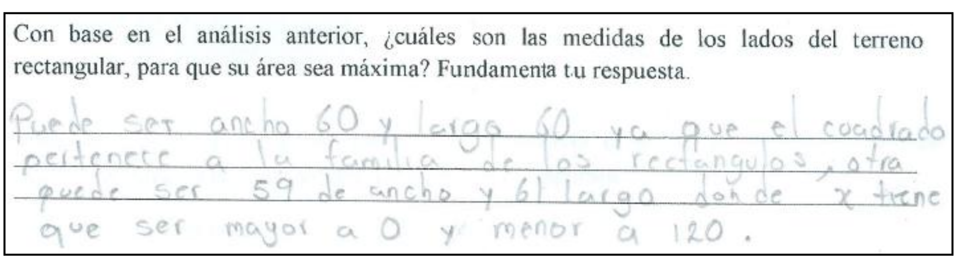
Figura 5

Por último cuando se les pidió que determinaran las medidas de los lados del terreno rectangular tal que su área sea máxima, E1, E2, E3 y E5 reconocieron las medidas óptimas, (ver Figura 6). En cambio E4, reconoció más de una solución como medidas óptimas de los lados de la región rectangular (ver Figura 7).


Con base en el análisis anterior, ¿cuáles son las medidas de los lados del terreno rectangular, para que su área sea máxima? Fundamenta tu respuesta.

El ancho del terreno debe medir 60 y lo largo del terreno medirá 60

Figura 6. Una de las respuestas en la que se reconoce una solución óptima al problema.


Con base en el análisis anterior, ¿cuáles son las medidas de los lados del terreno rectangular, para que su área sea máxima? Fundamenta tu respuesta.

Puede ser ancho 60 y largo 60 ya que el cuadrado pertenece a la familia de los rectangulos, otra puede ser 59 de ancho y 61 largo donde x tiene que ser mayor a 0 y menor a 120.

Figura 7. E4 reconoció más de una solución como óptima del problema.

5. CONCLUSIONES

Los resultados dan cuenta de que los estudiantes transitaron sin dificultad de un registro de representación a otro, en particular en el tabular, el gráfico y el analítico. A partir del análisis y la comparación que llevaron a cabo de los datos registrados en una tabla, los estudiantes fueron capaces de reconocer que había valores máximos, pero que ninguno de ellos cumplía con la exigencia del problema, la solución óptima. Fue en el registro analítico, particularmente mediante el uso de la derivada, donde reconocieron la solución óptima del área máxima.

Los aspectos visuales fueron fundamentales en el análisis del comportamiento de las gráficas, máxime cuando relacionaron la correspondiente a la función que modela el problema con la de su derivada, ello en razón de que contribuyó a que los estudiantes reconocieran dos cosas: a) el valor máximo de la función, y; b) que la abscisa de la coordenada donde la gráfica de la función alcanza el máximo, es la misma donde la gráfica de la función de la primera derivada, corta al eje X.

6. Referencias

Artigue, M. (1995). Ingeniería didáctica. En Gómez, P. (Ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática.* (pp. 33-59). Santa Fe de Bogotá, Colombia: Grupo Editorial Iberoamericana.

Dolores, C. (1998). Algunas ideas que acerca de la derivada se forman los estudiantes del bachillerato en sus cursos de cálculo diferencial. En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en Matemáticas Educativas II* (pp. 257-272). México: Grupo Editorial Iberoamericana.

Dolores, C. (2010). El lenguaje variacional en el discurso de la variación. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 13* (4-II).

Duval, R. (1999). *Sémiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizaje intelectuales.* Colombia: Universidad del Valle.

Moreno, S. y Cuevas, C. (2004). Interpretaciones erróneas sobre los conceptos de máximos y mínimos en el Cálculo Diferencial. *Educación Matemática 6* (2), 93-104.

Sánchez-Matamoros, G., García, M. y Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 11*(2), 267-296.

Sánchez-Matamoros, G., García, M. y Llinares, S. (2007). Un indicador de la comprensión del esquema derivada: el uso de las relaciones lógicas. *Revista Investigación en Educación Matemática*, 229-238.