EL CÁLCULO APROXIMADO MEDIANTE ESTRATEGIAS DE COMPENSACIÓN CON ESTUDIANTES DE PRIMARIA

Luz Esmeralda Reyes García, Guadalupe Cabañas Sánchez
luzes_rega@hotmail.com, gcabanas.sanchez@gmail.com
Universidad Autónoma de Guerrero
Básico

Resumen
En esta investigación nos interesamos por estudiar las estrategias de compensación desarrolladas por estudiantes de sexto grado de primaria, mientras resuelven problemas contextualizados. El estudio toma como base los argumentos escritos y verbales que los estudiantes exhiben en el proceso de resolución de tres actividades, articuladas al concepto de cálculo aproximado. Los resultados evidencian que cuando se les sitúa a determinar la aproximación de un número, los estudiantes redondean por exceso o defecto, sin embargo, se privilegia la aproximación por exceso. En ese proceso, reconocen que medir con instrumentos tangibles conduce a errores de medición.

Palabras clave: *Cálculo aproximado, aproximación, estrategias de compensación.*

1. INTRODUCCIÓN

El cálculo aproximado aparece en situaciones diversas tanto de la vida cotidiana como de otros contextos. Se caracteriza porque independientemente de los instrumentos de medición que se usen, siempre habrá un margen de error en el valor que se determine, el cual será aproximado. Algunos de sus usos se relacionan con la determinación de la medida del perímetro o área de terrenos, la estatura o peso de una persona o el volumen de cuerpos geométricos. El cálculo aproximado se basa en el cálculo mental, utilizando elementos conceptuales como valor relativo, dominio de equivalencias de operaciones, propiedades de las mismas, entre otros. Se debe tener presente que trabajar con el cálculo aproximado implica el tener que decidir el nivel de significación que se le otorga, debiendo completarse este tipo de cálculo, para que sea más eficaz, con la comparación del resultado, que puede hacerse con calculadora, respecto del cálculo real exacto. En el cálculo aproximado, suelen usarse diversas estrategias, que dependen del significado de las operaciones básicas involucradas. En este contexto, se encuentra el estudio de Ortiz y Ortega (2005), quienes reconocen tres tipos de estrategias: de reformulación, procesos de traslación y procesos de compensación. En este trabajo, nos interesamos por reconocer las estrategias desarrolladas por estudiantes de sexto grado de primaria mientras resuelven problemas contextualizados que involucran el cálculo aproximado. Las preguntas de investigación que guiaron el estudio fueron: ¿Qué estrategias de compensación desarrollan los estudiantes de primaria para aproximar un valor numérico? ¿Qué estrategias de compensación privilegian?

El estudio se sustenta de una situación de aprendizaje, que sitúa a los estudiantes a determinar ciertos valores al medir longitudes o al sumar. El marco para el análisis de las estrategias, se sustenta del estudio de Ortiz y Ortega (2005).

2. FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Los conceptos aproximar, aproximación, cálculo aproximado y estrategia son fundamentales en este trabajo. El concepto de estrategia se toma de (Pozo y Postigo 1993, citado en Gallardo y

Ferreras, 2000), los conceptos aproximar y aproximación se retoman de Segovia y Castro (2007), el de cálculo aproximado, desde la perspectiva de Gómez (2005).

Para Segovia y Castro (2007):

> Aproximar es encontrar un resultado suficientemente preciso para un determinado propósito. La aproximación enfatiza la cercanía al valor exacto y es totalmente controlable; se aproxima tanto como la situación lo precise; tiene como herramientas los teoremas del cálculo (aproximado) o la teoría de errores y los algoritmos de lápiz y papel o con calculadora (p. 215).

Estos autores sostienen además, que la aproximación forma parte de la estimación, puesto que sólo se ocupa de determinar un valor numérico con un cierto grado de proximidad a otro valor no utilizable directamente por alguna causa, por lo que no se ocupa del resto de puntos que conlleva la estimación, es así como la aproximación enfatiza la cercanía al valor exacto y es totalmente controlable; se aproxima tanto como la situación lo precise; tiene como herramientas los teoremas del cálculo aproximado o teoría de errores y los algoritmos de lápiz y papel o con la calculadora.

Gómez (2005) señala que “el cálculo aproximado procede de la medición con instrumentos que por muy finos que sean siempre tienen un margen de error” (p.17). Este investigador enfatiza en la importancia por no confundir el cálculo estimado con el cálculo aproximado. Afirma que el cálculo estimado es resultado de un juicio o valoración y suele trabajarse con números redondos para aprovechar las ventajas de trabajar con números terminados en ceros en el sistema de numeración decimal, en cambio el cálculo aproximado está condicionado por la inexactitud de los instrumentos de medida obliga a trabajar con números decimales.

Por otra parte, se entiende por estrategia como “secuencias integradas de procedimientos o actividades que se eligen con el propósito de facilitar la adquisición, almacenamiento o utilización de la información” (Pozo y Postigo 1993, citado en Gallardo y Ferreras, 2000, p.14).

En el cálculo aproximado, Ortiz y Ortega (2005) distinguen tres tipos de estrategias, que consisten de lo siguiente:

Reformulación: Consiste en modificar los datos para manejar más fácilmente una determinada operación, sin alterarla. Existen tres tipos: redondeo, truncamiento y sustitución.

Redondeo: Si la primera cifra que se desecha es menor que cinco, se mantienen iguales las cifras anteriores (1324 u 1320 por defecto, redondeo a las decenas), para el caso de que la primera cifra que se deseche es igual o mayor que cinco, la última cifra que se mantiene aumenta en una unidad (1376 u 1400 por exceso, redondeado a las centenas). Un ejemplo de redondear a través de la suma:

3456 + 2145 + 1649 o 3000 + 2000 + 1000 o 3 + 2 + 2 = 7 => 7000

Si queremos rebajar el error, trabajamos con centenas:

3456 + 2145 + 1649 o 3400 + 2100 + 1600 o 35 + 21 + 16 = 72 => 7200

Truncamiento: Se trata de reemplazar las cifras de orden superior por ceros (2458 truncado en las unidades es 2450, truncado en las centenas es 2400). Un ejemplo de sumar truncando es el siguiente: primero se elige el orden de truncamiento en este caso de los sumandos a unidades de millar.

3456 + 2145 + 1649 ó 3000 + 2000 + 1000 o 3 + 2 + 1 = 6 => 6000

Si queremos rebajar el error, trabajamos con centenas:

3456 + 2145 + 1649 ó 3400 + 2100 + 1600 o 35 + 21 + 16 = 72 => 7200

Sustitución: Se trata de cambiar un número por otro aproximado. Por ejemplo al sumar dos fracciones: 48/102 + 31/3 o 48/100 + 30/3 = 0.48 + 10 = 10.48

Procesos de traslación: Consiste en expresar la operación en términos más manejables, lo que se traduce en cambiar una operación por otra equivalente o en modificar el orden en las operaciones.

Un ejemplo de ello es: 234+198+223+185= 4(200) = 800

Procesos de compensación: Trata de reducir el error que se produce en un sentido al aproximar un dato o datos, equilibrándolo en sentido contrario con la aproximación del otro dato o datos. En el caso de la suma conviene redondear unos sumandos por defecto y otros por exceso, para la resta las aproximaciones nunca deben ser en sentido opuesto, para el producto es conveniente aproximar sólo uno de los dos factores, si también debe hacerse con el otro esta aproximación debe ser en sentido contrario, en el caso de la división son los dos en el mismo sentido. En este trabajo, el proceso de resolución de los problemas, se articulan a procesos de compensación. Estos procesos a su vez, están asociados al significado de la suma.

3. MÉTODO

a) Participantes

En la exploración participaron 40 estudiantes matriculados en sexto año de una primaria ubicada en la ciudad de Chilpancingo, en el estado de Guerrero. Su participación se dio por invitación expresa a la profesora titular de este grupo. Los antecedentes académicos de los participantes consistieron de contenidos matemáticos como números naturales y su ubicación en la recta numérica a partir de la posición de otros dos; lectura, escritura y comparación de números naturales, fraccionarios y decimales, así como operaciones básicas con números decimales.

b) La Situación de aprendizaje y el contexto de aplicación

El diseño se constituyó de tres actividades que fueron presentadas a los estudiantes a través de instrucciones y preguntas. Mediante ellas, se les ubicó a trabajar con problemas relacionados con la suma de decimales. Las actividades 1 y 2, son una adaptación de (Barbé, Waisman, Cerda y Espinoza, 2007) y la tercera, es una adaptación de la lección 13, bloque II del libro de sexto año de primaria (SEP, 2011).

Las actividades fueron resueltas durante una sesión de dos horas. Se resolvieron en equipo, todos ellos conformados de cuatro integrantes, cuya organización quedó a cargo del primer autor. La sesión donde se desarrollaron las actividades fue video-grabada y transcrita para su posterior análisis. Nos apoyamos además, en los argumentos escritos de los estudiantes, así como las notas de campo.

c) Aspectos a considerar en el análisis de las actividades

Las actividades que conforman la situación de aprendizaje relativa a los procesos de aproximación en este trabajo, se articulan al significado de la suma. En el proceso de resolución, los procedimientos estudiantiles conllevan aproximaciones por exceso o por defecto, asimismo la comparación entre números, e involucra además, a la noción de valor posicional de los decimales. Por ello, se esperaba que las estrategias desarrolladas se asociaran a estas formas de proceder. Consecuentemente, el sustento de nuestro análisis, son las estrategias que los estudiantes usan en el proceso de resolución de las actividades.

4. DESARROLLO DE LA SITUACIÓN DE APRENDIZAJE Y RESULTADOS

La primera actividad se constituyó de dos tareas. En la primera, se les pidió que midieran con una regla graduada un segmento dado, el cual representaba la suma de los diámetros de cuatro monedas ($1.00, $2.00, $5.00 y $10.00). Este segmento, estaba colocado sobre la figura que representaba las cuatro monedas alineadas. En la tarea dos, se les proporcionó una tabla en las que estaban registradas las medidas de las monedas con las que trabajaron en la tarea uno. El propósito, era que sumaran la medida de los diámetros registrados en ella, de las cuatro monedas, a objeto de que comparan el valor obtenido en esta tarea con el de la primera. A partir de ello, se esperaba que reconocieran que los resultados obtenidos a través de sus mediciones eran aproximados, porque medir con instrumentos tangibles conduce a errores de medición.

Para reconocer las formas de proceder, consideramos las estrategias desarrolladas al momento de sumar las longitudes de los diámetros de las monedas y cómo fue que representaron el número que obtuvieron de medir. No obstante, interesa destacar que un equipo usó monedas reales y para obtener la medida que se les pidió, las alinearon de forma que quedaran sobre la figura que tenían en su material impreso, posteriormente, colocaron la regla sobre ellas para medir la longitud que determinaba la suma de sus diámetros (ver Figura 1).

Figura 1

Respecto del resultado de la comparación que hicieron una vez que obtuvieron los datos en ambas tareas, los estudiantes observaron que eran distintos. En la tarea uno por ejemplo, se encontraron resultados como los siguientes: 9.7 cm, 9.8 cm, 9.9 cm y 10 cm. En la tarea dos, los resultados fueron: 8.67 cm, 9.75 cm y 9.8 cm., y aun cuando 9.8 aparece en las tareas 1 y 2, se obtuvo por equipos distintos. Una vez hecho esto, se organizó una discusión grupal, a fin de que presentaran sus resultados por equipo y con ello reflexionaran por qué sucede que al medir un mismo objeto (con regla graduada y con medidas reales proporcionadas en una tabla) se obtienen valores distintos, por lo que concluyeron, que es debido a los instrumentos precisamente.

Por otra parte, debido a que la regla graduada está diseñada para el sistema sexagesimal, las divisiones de los centímetros están en décimos, por tanto los resultados obtenidos de las mediciones realizadas con ella también se da en décimos, por ello, ninguno de los equipos obtuvo 9.75 en la medición que hicieron de la actividad 1. Se observó también, por lo menos en tres equipos, que utilizaron la regla graduada de forma inadecuada, ya que midieron antes de la graduación. A pesar de ello, la mayoría de los equipos coincidieron que los resultados de sumar las longitudes y medir el segmento determinado por esas longitudes, con algún instrumento de medición les resultaban diferentes y ello se debía en gran parte porque el medir con este tipo de material siempre conduce a errores de medición.

Aunque no fue objeto de estudio reconocer dificultades, se observó que uno de los equipos (equipo 6) sumó de forma incorrecta la parte decimal. Planteamos la hipótesis, que es debido a la comprensión escasa del concepto de valor posicional de este tipo de números (véase Figura 2).

La segunda actividad se sustenta de los datos de la tabla proporcionada en la tarea dos de la actividad anterior. Con base en ello, se planteó a los estudiantes que determinaran qué combinación de la suma de los diámetros de dos monedas, da como resultado 5 cm. En seguida, debían comparar sus resultados con los de otro (s) equipo (s), con el propósito de que reconocieran que nunca se obtiene ese valor.

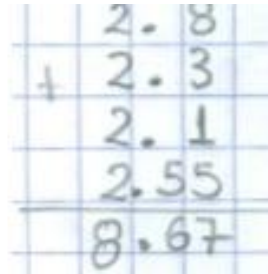

Figura 2

El análisis de las estrategias desarrolladas por los estudiantes, da cuenta que todos los equipos probaron con distintas combinaciones, al reconocer que alguna de ellas no se aproximaba al valor dado, continuaron probando sin éxito.

En razón de estos resultados, la mayoría de los equipos concluyeron que no encontraron una combinación que le diera ese valor. Sin embargo, afirmaron que los valores obtenidos eran aproximados. Es así como ocho de los diez equipos dieron la combinación de la moneda de $10.00 y la moneda de $1.00, dando como resultado 2.8+2.1=4.9. De estos equipos, encontramos que dos de ellos sostienen que la combinación que dan es la única con resultado igual a 5. Redondearon 4.9 a 5, lo que hicieron fue dar una aproximación por exceso, tal como se muestra en la Figura 3.

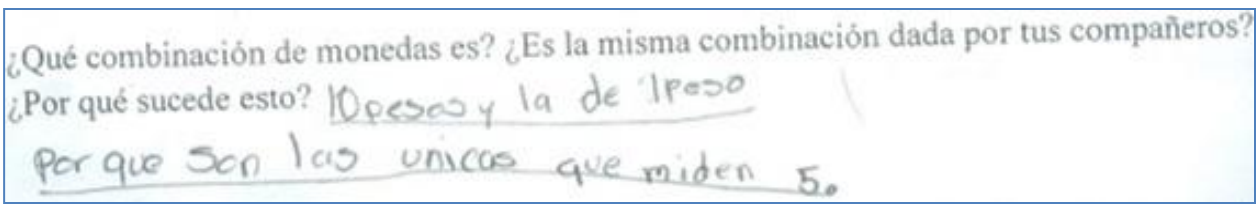

Figura 3

Por otro lado, los dos equipos restantes, concluyeron que la combinación buscada era la moneda de $10.00 y la moneda de $2.00, dando como resultado 2.8+2.3=5.1. Uno de ellos, afirmó que esa combinación era igual a 5, tal como lo muestra la figura 4. Redondearon 5.1 a 5. Este equipo dio una aproximación por defecto.

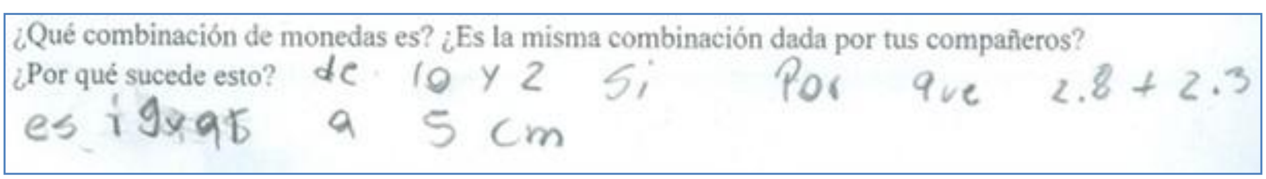

Figura 4

Una vez que todos los equipos habían encontrado la combinación de las dos monedas, se organizó una discusión grupal, a fin de que presentaran sus resultados y con ello reflexionaran que el resultado de sumar las longitudes de los diámetros de cualesquiera dos monedas presentadas en la tabla propuesta nunca es 5. En esta discusión, los estudiantes concluyeron que efectivamente el resultado nunca es 5, y que la combinación dada por ellos eran una aproximación al valor que se les pedía.

En el desarrollo de esta actividad, se observó al igual que en la actividad anterior, que otro equipo (equipo 2) tuvo dificultades al momento de sumar la parte decimal (ver Figura 5).

Figura 5

La tercera actividad, situó a los estudiantes a ubicar números decimales en una recta numérica, como: 2.3, 2.55, 2.8, 9.9, 10.6, entre otros. Se pidió que los ubicaran de manera aproximada con el propósito de observar que tan cercano o alejado estaban de la ubicación a la que correspondían.

El análisis reporta, que la mayoría de los equipos usan la regla graduada para ubicar números decimales en la recta numérica, sin embargo, otros prefieren dividir la recta en "diez partes iguales" y de ahí buscar el número que se les pide. Para conocer la forma en cómo procedieron a determinar dichos números, al término de esta actividad el investigador encargado de conducir las actividades, representó en la pizarra una recta numérica a escala. Posteriormente un representante de cada equipo pasó a ubicar en ella alguno de los números decimales dados. Uno de los estudiantes que participó en esta actividad, utilizó la regla para guiarse, sin embargo, al momento de querer encontrar la ubicación del número, se dio cuenta de que la regla no le alcanzaría para medir esa recta numérica, por tanto, el investigador encargado le preguntó de qué otra forma el podría encontrar la ubicación de ese número, ya que la regla no le ayudaría a encontrarlo. Es así como el estudiante propone dividir el segmento en diez partes iguales y sostiene que aparte de usar la regla, dividiendo el segmento de esta manera, se podría encontrar dicho número.

La mayoría de los equipos, encuentran una ubicación cercana al número pedido, sin embargo, dos de los diez equipos, tuvieron dificultades para representar la ubicación del número 2.55, debido a que consideran que este número es mayor que 2.8. Según Gómez (2001), esto "se debe a que ellos tienen la creencia de que 55 es mayor que 8" (p. 544) para el caso del ejemplo analizado.

A pesar de que utilizaron la regla para poder encontrar la ubicación de los números dados, esta ubicación fue de manera aproximada, ya que el usar instrumentos de medición siempre conduce a errores de medición, que por muy finos que sean, siempre habrá un margen de error.

5. CONCLUSIONES

El hacer discusiones grupales por cada una de las actividades realizadas en esta situación, ayudó a los estudiantes a reflexionar sobre las respuestas que daban en cada actividad. Reconocieron que cuando de medir se trata, siempre habrá un margen de error en la medición, porque el medir con instrumentos de medición tangibles conduce a errores de este estilo. Cuando se les plantea determinar la aproximación de un número, lo hacen redondeando por defecto o por exceso, aunque se privilegia la aproximación por exceso. Sin embargo, estas estrategias de redondear por defecto o por exceso, únicamente aparecen en la actividad dos, ya que en la actividad uno y en la actividad tres usaron la regla para medir, por lo que el valor que presentaron, fue el que resultó de la medición.

Aunque no fue objeto de estudio reconocer dificultades, se observaron mientras sumaban la parte decimal. Planteamos la hipótesis, que es debido a la comprensión escasa, con el concepto de valor posicional de este tipo de números. Consideramos que el reporte de este tipo dificultades, es importante para futuras investigaciones que se interesen por propuestas didácticas para la mejora de la enseñanza y aprendizaje de los números decimales.

6. Referencias bibliográficas

Barbé, J., Waisman, F., Cerda F., Espinoza, L. (2007). *Problemas aditivos con números decimales*. Matemática. Sexto Año Básico. Segunda Unidad Didáctica (p.70). Recuperado el 2 de mayo, 2013, de: http://clasesparticularesmatematicas.cl/wp-content/uploads/2012/07/UD26to.pdf

Gallardo, B. y Ferreras, A. (2000). *Estrategias de Aprendizaje. Un Programa de Intervención para ESO y EPA*. Madrid. Secretaría General Técnica. Subdirección General de Información y Publicaciones.

Gómez (2001). Las concepciones escolares de los decimales. *Ponencia presentada en la X Jornada de Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas (JAEM)*, 543-548.

Gómez (2005). La enseñanza del cálculo mental. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática 4*, 17-29.

Ortega, T., Ortiz., M. (2005). Un Recurso para la Enseñanza - Aprendizaje del Cálculo Mental. *Ponencia presentada en IX Simposio Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*. Córdoba. (*SEIEM*).

Segovia, I. y De Castro, C. (2007). La investigación en estimación en cálculo. En E. Castro y J. L. Lupiáñez (Eds.), *Investigaciones en Educación Matemática: Pensamiento Numérico. Libro homenaje a Jorge Cazares Solórzano* (pp. 213-236). Granada: Editorial Universidad de Granada.

SEP (2011). *Programas de estudio 2011. Educación Básica Primaria*. México.