MODELACIÓN-GRAFICACIÓN EN LA MATEMÁTICA ESCOLAR. ALGUNOS EJEMPLOS

Andrés Ruiz Esparza Pérez, José David Zaldívar Rojas
andresruizep@gmail.com, jzaldivar@cinvestav.mx
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional
Medio Superior

Resumen

Paulatinamente, la modelación ha ganado terreno como estrategia de enseñanza en el aula de clases a casi todos los niveles educativos. Así mismo, se han analizado las ventajas de considerar a la graficación en el aprendizaje de temas matemáticos. Sin embargo, al considerarlas únicamente como "una aplicación de la matemática" y "la representación del concepto de función", respectivamente, se opacan aspectos funcionales cruciales que permitan un avance en el rediseño del discurso matemático actual. El presente laboratorio parte de una reflexión y crítica profunda de dichos conceptos, desde una postura socioepistemológica, a partir de la implementación y discusión de diseños de situación basados en el binomio Modelación-Graficación, con la intención de que puedan ser utilizadas en la práctica docente.

Palabras clave: *Modelación-graficación, diseños de situación, bachillerato, usos de las gráficas*.

1. PROPÓSITO Y ALCANCE

La intención principal del Laboratorio es ejemplificar y analizar algunas actividades donde se puede dar evidencia de una resignificación de las nociones de variación y comportamiento tendencial. Consideramos que por medio de estos ejemplos, es posible reinterpretar la importancia que revisten las nociones de Modelación y Graficación en el ámbito escolar, con la finalidad de ubicarlas en un estatús distinto al que actualmente tienen.

Al considerar como eje medular al binomio Modelación-Graficación, nos enfocaremos en el análisis de los argumentos que los participantes realicen sobre los los usos de las gráficas que se generen en las actividades. Por lo que la gráfica bajo esta mirada ya no es sólo la representación del concepto de función, sino que es un medio que soporta el desarrollo del razonamiento, además, es argumentativa y es en sí misma una modelación (Cordero, 2008; Suárez & Cordero, 2010; Rosado, 2004; Cordero, Cen & Suárez, 2010; Zaldívar, Cen, Méndez, Briceño & Cordero, en prensa).

Un aspecto medular que consideramos, es que ninguna propuesta teórica o didáctica será relevante si no se incluye en el proceso de desarrollo a los actores principales del sistema didáctico. Es así que decidimos dirigir el presente proyecto a profesores en formación y en ejercicio, principalmente de los niveles medio superior y superior, preferentemente profesores de cálculo y/o física, que conozcan los contenidos principales de tales asignaturas y tengan conocimientos elementales sobre calculadoras graficadoras y el software Geogebra.

2. MARCO TEÓRICO

Como ya se ha mencionado en párrafos anteriores, el marco empleado para el desarrollo de los diseños que se mencionarán posteriormente es la Socioespistemología. Este marco no mira a los conceptos y sus diferentes estructuraciones en forma aislada, sino atiende a las prácticas que producen o favorecen la necesidad de tales conceptos. La Socioepistemología modela una construcción social del conocimiento matemático en escenarios socioculturales, donde la Práctica Social se considera normativa de la actividad y generadora de conocimiento matemático (Ver Cordero, 2008; Cordero, Cen & Suárez, 2010; Cantoral & Farfán, 2003; Cantoral *et al*, 2006).

Por ello la gráfica de la función es asumida como aquella herramienta para construir conocimiento. La gráfica en este marco es ubicada en otro estatus, pues esta es asumida como una práctica institucional, pues ha permanecido en el discurso matemático escolar y se ha ido transformando para establecerse tal como lo conocemos en la actualidad (Cordero, Cen y Suárez, 2010).

Como ya se mencionó, se pretende que durante las actividades hacer reflexión en torno al uso de las gráficas que se vayan generando. De esta manera, el *uso de la gráfica* es comprendido por el rol de desempeña la gráfica en alguna situación, lo cual permite identificar el *funcionamiento y su forma*. En donde el *funcionamiento* es entendido como la función orgánica que tiene en esa situación, que ofrece una *forma* específica para ser abordado (Cordero, Cen y Suárez, 2010; Zaldívar, *et al*, en prensa). La relación funcionamiento y forma guardan una relación dialéctica, es decir debaten entre si y se van reorganizando para dar lugar a otros funcionamientos y formas gráficas. Lo cual significa que la gráfica se resignifica. La resignificación es interpretada como la construcción del conocimiento mismo en la organización del grupo humano, normado por lo institucional, que se manifiesta en el uso del conocimiento dentro de una situación específica (Cordero, 2008).

Aspectos medulares durante el Laboratorio serán las nociones de Modelación y Graficación. Es por esta razón que conviene delimitar en este apartado, las caracterizaciones que desde la Socioepistemología se realizan de estas nociones.

A diferencia de varias investigaciones que consideran a la gráfica como la representación del concepto de función, en Socioepistemología, la graficación se considera como el estudio del uso de la gráfica en situaciones específicas que responden a la funcionalidad del conocimiento matemático (Zaldívar, et al, en prensa). En este sentido, la gráfica se torna una herramienta y un argumento que se desarrolla y norma la construcción de conocimiento (Cordero, *et al.*, 2010); admitiendo así que la gráfica es un modelo que se sostiene a sí misma.

Por otro lado, consideraremos a la Modelación Escolar desde la Socioepistemología no como una mera aplicación de la matemática, que consiste básicamente en transformar la realidad en ecuaciones matemáticas; sino que la modelación expresa un construcción de conocimiento matemático por medio de la producción de argumentos y herramientas de corte matemático provocados por los usos que los participantes hagan de la gráfica. En nuestro caso particular, afirmamos que con este viraje en la modelación, no como aplicación sino como construcción, las gráficas de las funciones se integrarían a la modelación en un binomio indisoluble y dialéctico: la modelación-graficación (Suárez & Cordero, 2010; Zaldívar, *et al*, en prensa).

En las situaciones de modelación del movimiento y temperatura, que se propondrán en las secciones siguientes, se pretende desarrollar en los participantes ideas de variación y de comportamientos con tendencia. La finalidad es hacer emerger justificaciones funcionales por medio de los usos. Es decir, no se privilegian los conceptos matemáticos, sino sus usos y un desarrollo de éstos. También se privilegian las argumentaciones situacionales en torno a la modelación y su desarrollo (Buendía y Cordero, 2005).

3. MÉTODO

Durante el laboratorio se confrontarán las diversas visiones que sobre la modelación y la graficación se tienen entre los participantes y cómo éstas visiones permean en el sistema didáctico y en las clases de matemáticas actuales. Posteriormente, se considerarán tres momentos como parte de la dinámica operativa del laboratorio:

Momento 1: La experimentación en equipos de trabajo. Se propondrán actividades que hacen alusión a fenómenos físicos concretos con ayuda de sensores de movimiento, temperatura y una situación con ayuda del software *Geogebra*. En cada una de las actividades, se obtendrán gráficas que indican el comportamiento de los fenómenos.
Momento 2: Producciones y discusión de los participantes. Se harán evidentes los usos de las gráficas, mediante sus funcionamientos y formas.
Momento 3: Reflexiones de los constructos con base en los ejemplos analizados. Se discutirá la modelación y a la graficación desde la perspectiva socioepistemológica y la fundamentación de las situaciones mostradas.

4. DISEÑOS DIDÁCTICOS

Los diseños que a continuación se ejemplifican no privilegian en primera instancia a los conceptos matemáticos, sino sus usos y un desarrollo de estos últimos. También se privilegian las argumentaciones en torno a la modelación y su desarrollo (Buendía y Cordero, 2005).

En los diseños que se presentan, se ponen en juego categorías como el Comportamiento Tendencial de las Funciones (Cordero, 1998) y el binomio Modelación-Graficación (Suárez, 2008). En general, con esas categorías se privilegian los desarrollos de usos de las gráficas, que proveen de elementos para manifestar una resignificación (Cordero, Cen & Suárez, 2011). Cabe mencionar que en este apartado no se pondrán las actividades completas, sino solo algunas preguntas que consideramos como medulares en el transcurso del diseño.

La situación del Resorte

Esta situación tiene como propósito que los participantes *desarrollen ideas relacionadas con el pensamiento variacional y de estabilidad*. Se pretende que los participantes expresen nociones de variación, por ejemplo, *se mueve rápido, lento, ya no se mueve;* entre otras; las cuales serán expresiones naturales para ellos pero que mantienen una relación conceptual con las nociones de variación. Así mismo, que los participantes manejen ideas relacionadas con comportamientos con tendencia; es decir, que dado un comportamiento, hacer que otros comportamientos se les parezcan. En esta parte, la idea que se pretende que se genere es la de "comportarse" como otra gráfica. Se discutirán aspectos que tendrán que ver con la forma de la gráfica que se generaría a partir del movimiento del resorte cuando se le pone una pesa y a su vez se modela con ayuda de la calculadora y un sensor de movimiento (Zaldívar & Cordero, 2012) (Figura 1).

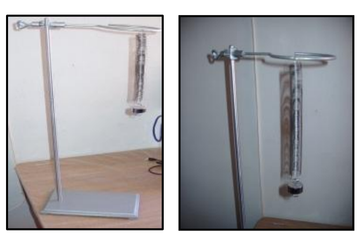

Figura 1. Instrumento de modelación.

Además, se realizarán cuestionamientos sobre aspectos que tienen que ver con las condiciones y los factores que entran en juego en dicho fenómeno y cómo esto afecta a la forma de la gráfica. Posteriormente se dirigirán las discusiones hacia la anticipación de la forma de la gráfica pero cuando se considera un tiempo largo, además de que en actividades posteriores se pretende comparar comportamientos representados por gráficas. Por ejemplo, cuáles son las diferencias entre las gráficas que se muestran en la Figura 2:

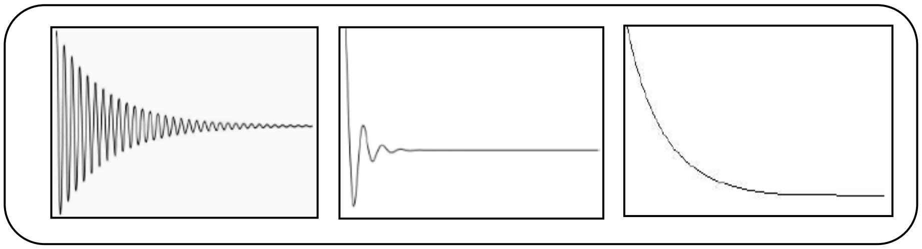

Figura 2. Comparación entre gráficas.

La situación del Equilibrio Térmico

La situación del *Equilibrio Térmico* plantea a los participantes el caso cuando dos cuerpos de diferentes temperaturas internas entran en contacto. Cuando dos sistemas, dos objetos, que se encuentran a diferente temperatura se ponen en contacto térmico, al cabo de cierto tiempo ambos quedan con igual temperatura. Este hecho se explicaba en el siglo XVIII con la teoría del calórico, el cual se decía que era un fluido invisible e imponderable llamado calórico que fluía desde el sistema que tenía más calórico hasta el que tenía menos calórico hasta alcanzar la misma temperatura. Le correspondió a Benjamín Thompson y a James Joule dar las primeras pruebas que:

El calor es la energía transferida entre dos sistemas y está relacionado con la diferencia de temperatura entre ellos

Una consecuencia de este concepto es la evolución de la temperatura de los sistemas hacia un equilibrio térmico con los que les rodean.

La situación que se propone consistirá en tener dos recipientes con líquidos a diferentes temperaturas, y que entran en contacto al poner uno dentro del otro. Suponiendo que la temperatura inicial de ambos líquidos sea diferente, estas interacciones provocan que la temperatura del líquido que estaba más frío aumente paulatinamente y la del que de inicio estaba más caliente disminuya. El proceso tiende a una situación final de equilibrio térmico entre ambos líquidos. Esta es la idea que se tratará de generar con los participantes usando para ello los comportamientos gráficos que propongan así como las reflexiones de los mismos. Nuevamente los usos de las gráficas a partir de comportamientos con tendencia serán los argumentos que emergen para explicar la situación.

Algunas de las actividades que se pedirán a los asistentes al laboratorio serán:

1. En un recipiente poner agua. Se elevará la temperatura del agua, exponiendo dicho recipiente se expondrá a una fuente de calor, ya sea una llama de un mechero o por cualquier medio. Se considera un tiempo pertinente para que el agua adquiera una temperatura notablemente mayor a la inicial. De igual manera, se considerará otro recipiente con agua al cual no se le aplicará calor alguno, sino que se dejará la temperatura ambiente que tiene el agua en ese momento. Si fuera posible, se podría considerar conseguir agua helada para observar una diferencia en los dos recipientes.

Posteriormente, con ayuda de los sensores de temperatura se introducen dentro de los recipientes con el agua a diferentes temperaturas. La calculadora comenzará a registrar datos hasta que se consideren suficientes.

2. Consideremos el experimento anterior. ¿Cómo es la gráfica de la temperatura para cada uno de los casos?

3. ¿Qué sucedería con las gráficas anteriores si uno de los recipientes se introduce dentro del otro? ¿Qué pasaría con las gráficas de las temperaturas si consideramos un tiempo muy grande?

Angry Birds y las ecuaciones del tiro parabólico

Para la aplicación de la actividad, se sugiere trabajar en parejas, para poder comentar los resultados y hacer más ágil la toma de datos desde el software. De igual modo, se optimizan recursos, en el caso de que la institución no cuente con suficiente equipo de cómputo. Es necesario también que dispongan de una calculadora científica para las actividades.
La secuencia comprende una hoja de trabajo y cuatro archivos de GeoGebra diseñados *ex profeso*. La hoja de trabajo comprende a su vez cuatro secciones, las cuales se corresponden con los archivos de GeoGebra, y que se detallan a continuación.

a) En la primera sección, se retoma el ambiente del videojuego y se explica cómo está siendo simulado en el software GeoGebra. Además de ser exploratoria, esta primera sección indaga en los conocimientos previos del alumno, al preguntarle sobre los parámetros que se están manipulando en el juego, y que a su vez determinan la trayectoria del proyectil.

b) La segunda sección de la hoja de trabajo demanda ya valores que han de obtener por medio de la manipulación del software. En ella se retoman los parámetros acordados en la sección anterior y se piden valores específicos de dichos parámetros para lograr golpear los objetivos del proyectil. Una vez recolectados los datos, se abre una pregunta para la discusión en parejas: si esos valores reportados son únicos o no, y por qué.

Se espera que los participantes puedan determinar distintos pares de valores para los parámetros de modo que con ellos logren impactar al objetivo. En cuanto a la última pregunta, la discusión que se espera es en cuanto a la variación de los parámetros. Por ejemplo, si disminuye uno, tiene que aumentar el otro, o viceversa. Dada la popularidad del juego, aquí podrían reportarse respuestas “casuísticas”, o bien, que serían posibles dentro del contexto del juego. Por ejemplo, que al tirar un cerdo éste puede tirar a otro, o el pájaro rebota, u otras situaciones similares que se dan dentro del videojuego, pero que no son simuladas en el software.

c) En la tercera sección, se exploran aspectos variacionales en los participantes, a través de cuestionamientos sobre el cambio de las variables. Para ello, se recurre a una circunstancia que es usual en el videojuego: la trayectoria del último pájaro tirado se deja visible, de modo que el jugador pueda mejorar el siguiente tiro. A partir de eso, lo primero que se pide es igualar la trayectoria de un proyectil (que está ilustrada en la pantalla), y con ese par de parámetros, hallar otro par que mejore el tiro y logre impactar en el punto marcado como objetivo. Se explora a continuación la variación de un parámetro dejando fijo el otro.

6. Abre el archivo "hoja 3.ggb". Como verás, algún jugador poco experto ha lanzado el primer pájaro y no le ha atinado al objetivo.
a) ¿Puedes igualar su trayectoria? Anota abajo los parámetros que determinan ese vuelo
Ángulo:______________________ Velocidad inicial:______________________________
b) Los programadores de angry birds han dejado a propósito la trayectoria del pájaro anterior para que te guíes, pero ¿La sabes usar? ¿Cómo tienen que ser los parámetros del siguiente tiro para golpear al objetivo?
Ángulo:______________________ Velocidad inicial:_______________________________

c) Si fuera el mismo ángulo de tiro, ¿cómo tendría que ser la velocidad inicial?

d) Si fuera la misma velocidad inicial, ¿cómo tendría que ser el ángulo de tiro?

Para los incisos b), c) y d) se esperan tanto respuestas cualitativas como cuantitativas. Puede responderse diciendo que el ángulo tendría que ser mayor o menor, o bien la velocidad. De igual forma, pueden reportarse valores específicos de ángulo y velocidad que logren el impacto en el objetivo. Específicamente, en c) y d) sería deseable que las respuestas fueran de modo cualitativo.

d) Finalmente, la cuarta sección de la hoja de trabajo remite a un diseño en GeoGebra que permite visualizar dos situaciones; por una parte, el fenómeno real (de lado izquierdo), el cual se encuentra incluso ambientado por el entorno del videojuego. Por otra parte, de lado derecho se encuentra la ecuación de posición del objeto (o función de altura) que se obtiene de la fórmula discutida previamente, y ambientada como si fuera un pizarrón de clase tradicional. Tal distinción se hace intencionalmente para resaltar la diferencia entre la trayectoria del ave (el fenómeno que ocurre en realidad) de la función que determina su altura.

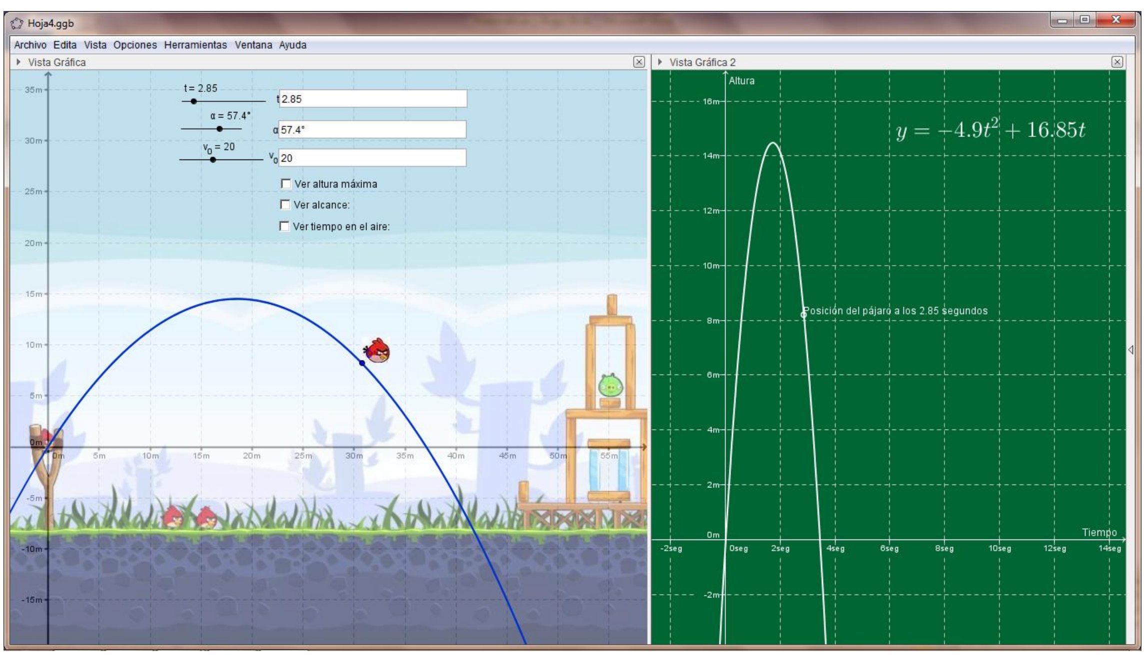

Figura 3. Entorno de la "Hoja4.ggb"

En la última sección, se pretende trabajar analíticamente y poder observar y/o comprobar los resultados en el software. Se plantean cuatro primeros problemas, los cuales se pide resolverlos de modo aproximado usando el software, de modo que pueda visualizarse en el software lo que demanda el problema. Los segundos cuatro problemas, se pide que se resuelvan de modo analítico, usando las ecuaciones antes mencionadas, y que los resultados sean comprobados en el software.

5. CONSIDERACIONES FINALES

Las situaciones que aquí se consideraron han sido aplicadas en diversos escenarios, tanto escolares como extraescolares, como por ejemplo, de Divulgación Científica. Dicha evidencia muestra, entre otras cosas, la tarea compleja que resulta la lectura, interpretación y construcción de las gráficas cartesianas.

Sin embargo, la mirada al uso de la gráfica, nos permite ubicarnos al ras de ciertas prácticas que están normando la actividad. Por ejemplo, entre los resultados que se han obtenido en la situación del Resorte, encontramos que ante la pregunta inicial de "¿cuál será el dibujo del movimiento del resorte cuando le ponemos una pesa?", muchos de los participantes responden atendiendo a aspectos que tienen que ver con trayectorias para indicar dirección y sentido del movimiento, por medio de dibujos icónicos y aspectos gestuales (Zaldívar & Cordero, 2012). Algunas de las producciones de participantes en escenarios de divulgación y extractos del tipo de respuestas las encontramos en las figuras siguientes:

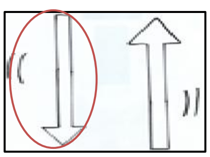

Figura 4. Flecha con dirección.

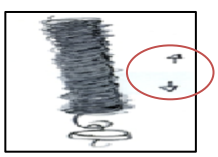

Figura 5. Flechas con dirección y sentido.

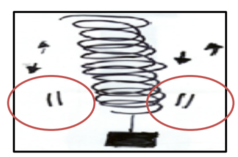

Figura 6. Dibujos icónicos para indicar intensidad.

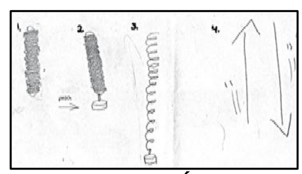

Figura 7. Íconos describiendo temporalidad

Extracto
Divulgador: y a ese resorte le vamos a poner una pesa (Se muestra la pesa y el resorte a los participantes). […] ¿Y qué creen que va a hacer?...
Participante A: **estirarse**…[…]
Participante B: brincar… [Realiza un movimiento repetido con la mano de "**subir y bajar**"]
Participante C: **vibrar**…

Extracto 1. Frases usadas ante la pregunta inicial

Figura 8. Recursos gestuales.

Al respecto de estos resultados, algunas investigaciones mencionan que este tipo de producciones son comunes, sin embargo, no son considerados como elementos a discutir en las clases de matemáticas, puesto que son consideradas incorrectas y sin ningún uso para propósitos científicos dentro de lo escolar (DiSessa, Hammer & Sherin, 1991). Sin embargo, nuestro análisis sobre el uso de las gráficas ubica este tipo de producciones como expresiones culturales del saber, es decir, como manifestaciones del cotidiano del ciudadano (Zaldívar & Cordero, 2012; Zaldívar, *et al*, en prensa).

Con base en estos resultados, nuestra intención no es afirmar que las clases de matemáticas deberían empezar enseñando "trayectorias", más bien, llamamos la atención al reconocimiento de que existe un pensamiento y un uso quizás *para orientar* de la noción de gráfica cartesiana que en el discurso es opacado por otros procedimientos, como por ejemplo la ubicación de puntos en el plano cartesiano. Consideramos que ese uso de la gráfica factual, donde se puede entender al uso de una *gráfica-en-acción*, aun debería exponerse a procesos de resignificación graduales y progresivos hacia un uso más sofisticado de lo que sería una gráfica cartesiana.

En particular, investigaciones desarrolladas en la Socioepistemología subrayan la necesidad de hacer un rediseño del discurso matemático escolar. Para ello, es necesario reconocer aquellas prácticas que generan conocimiento matemático e incorporarlas en el sistema didáctico.

Nuestras reflexiones en torno al laboratorio consideran precisamente al comportamiento de las gráficas como una categoría que no pertenece a la estructura matemática, sino que es un recurso para hablar de ciertas propiedades matemáticas de las funciones, dentro del marco le damos un estatus diferente pues concebimos a las gráficas de las funciones como argumentativas del Cálculo. Con tal estatus, abordamos a las gráficas como el objeto de estudio que incluye a las prácticas relacionadas con su construcción. Por ello, surge la necesidad de hacer estudios de los usos y desarrollos de las prácticas de graficación y modelación, que favorezcan una matemática funcional.

Esperamos que el contenido del taller sirva para reflexionar sobre la importancia que reviste incluir en el diseño de situaciones aspectos concretos de la práctica docente, para que de esta forma se reformulen las actividades y que posteriormente podrán impactar en el salón de clases.

6. Referencias

Buendía, G. y Cordero, F. (2005). Prediction and the periodical aspect as generators of knowledge in a social practice Framework. A socioepistemological study. *Educational Studies in Mathematics 58*(3), 299-333.

Cantoral, R., Farfán, R., Lezama, J. & Martínez-Sierra, G. (2006). Socioepistemología y representación: algunos ejemplos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 9*(4), 83-102.

Cantoral, R., & Farfán, R. (2003). Mathematics Education: A vision of its evolution. *Educational Studies in Mathematics 53(3),* 255-270.

Cordero, F. (1998). El entendimiento de algunas categorías del conocimiento del cálculo y análisis: el caso del comportamiento tendencial de las funciones. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 2(1),* 56-74.

Cordero, F. (2008). El uso de las gráficas en el discurso del cálculo escolar. Una visión socioepistemológica. En Cantoral, R., Covián, O., Farfán, R., Lezama, J. & Romo, A. (Eds.), *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Un reporte Iberoamericano* (pp. 265–286). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C., Díaz de Santos.

Cordero, F. Cen, C. & Suárez, L. (2010). Los funcionamientos y formas de las gráficas en los libros de texto: una práctica institucional en el bachillerato. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 13*(2), 187-214.

DiSessa, A., Hammer, D., & Sherin, B. (1991). Inventing graphing: meta-representational expertise in children. *Journal of Mathematical Behavior, 10*, 117-160.

Rosado, P. (2004). *Una resignificación de la derivada. El caso de la linealidad del polinomio en la aproximación socioepistemológica.* Tesis de Maestría no publicada. Departamento Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México.

Suárez, L. & Cordero, F. (2010). Modelación-graficación, una categoría para la matemática escolar. Resultados de un estudio socioepistemológico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 13(4-II)*, 319-333.

Zaldívar, D., Cen, C., Méndez, M., Briceño, E. & Cordero, F. (en prensa). El Espacio de Trabajo Matemático y la Situación Específica de la Matemática Funcional: Un ejercicio de Diálogo. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa.*

Zaldívar, D. & Cordero, F. (2012). Un estudio socioepistemológico de lo estable: consideraciones en un marco de la divulgación del conocimiento matemático. En O. Covian, Y. Chávez, J. López, M. Méndez, A. Oktaç. *Memorias del Primero Coloquio de Doctorado* (pp. 203 – 212). ISBN: 978-607-9023-08-9, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, Cinvestav.