BASES DE UN DISEÑO DIDÁCTICO PARA LA CONSTRUCCIÓN DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS EN EL CONTEXTO GEOMÉTRICO DEL CÍRCULO

Olivia Alexandra Scholz Marbán, Gisela Montiel Espinosa
scholzalexa@gmail.com, gmontiel@ipn.mx
Instituto de Educación Media Superior IEMS, Instituto Politécnico Nacional
Medio Superior

Resumen
Presentamos los antecedentes y las consideraciones teóricas que fundamentan el diseño didáctico con el que nos proponemos analizar cómo estudiantes del nivel medio superior construyen las razones trigonométricas en un contexto geométrico. Comenzamos por plantear una problemática con base en una experiencia didáctica previa, para ubicar nuestra propuesta de investigación entre los resultados y las aportaciones de algunas investigaciones relacionadas con la enseñanza-aprendizaje de la Trigonometría; de las cuales, además, se han tomado tanto actividades como elementos de organización didáctica para nuestro diseño. Esbozamos las consideraciones teóricas y didácticas que fundamentarán el avance del diseño didáctico, que a su vez servirá como instrumento para la obtención de datos de nuestra investigación.

Palabras clave: *Diseño didáctico, razones trigonométricas, círculo*.

1. INTRODUCCIÓN

En una experiencia didáctica realizada con alumnos de bachillerato, de segundo semestre, con la que buscábamos indagar cómo caracterizan la relación entre ángulo y cateto, en el triángulo rectángulo, se incluyó una actividad que consistía en llenar una tabla con las medidas del ángulo y las longitudes de las proyecciones que generaban sobre dos verticales (Figuras 1 y 2).

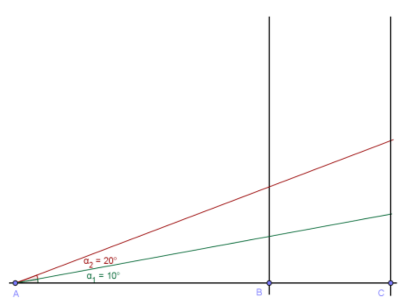


Figura 1

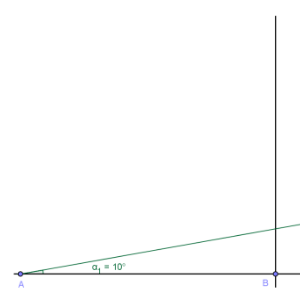
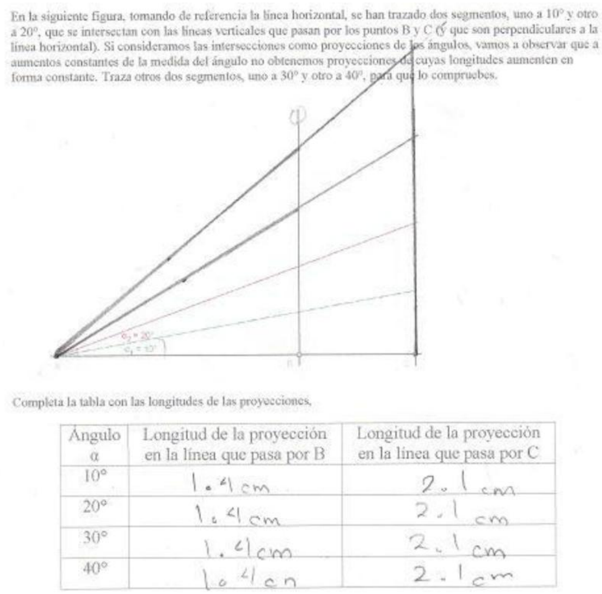


Figura 2

En un ejercicio los alumnos trazaron, además de los marcados en la figura, los ángulos de 30º y 40º para tomar las medidas de las proyecciones (Figura 1), y en otro ejercicio miden la proyección del ángulo de 10º, marcan en la vertical la medida varias veces para trazar los ángulos correspondientes y registran la medida obtenida (Figura 2).

Haciendo uso del transportador los estudiantes midieron los ángulos para la primera tabla y trazaron las rectas con la regla, después midieron las proyecciones y registraron los datos en la tabla. En uno de los equipos sucedió que, a pesar que en el diseño se menciona que las longitudes no aumentan en forma constante, registraron la misma medida para las secciones de la proyección de cada ángulo porque el integrante que tomaba las medidas obtuvo en las dos primeras medidas el valor de 1.4 cm y les dijo “todas van a medir lo mismo y también del otro lado, así que si mide 2.1cm todas son iguales”. El resto del equipo no comprobó las medidas (Figura 3).



En la siguiente figura, tomando de referencia la línea horizontal, se han trazado dos segmentos, uno a 10° y otro a 20°, que se intersectan con las líneas verticales que pasan por los puntos B y C (y que son perpendiculares a la línea horizontal). Si consideramos las intersecciones como proyecciones de los ángulos, vamos a observar que a aumentos constantes de la medida del ángulo no obtenemos proyecciones cuyas longitudes aumenten en forma constante. Traza otros dos segmentos, uno a 30° y otro a 40°, para que lo compruebes.

Completa la tabla con las longitudes de las proyecciones.

Ángulo α	Longitud de la proyección en la línea que pasa por B	Longitud de la proyección en la línea que pasa por C
10°	1.4 cm	2.1 cm
20°	1.4 cm	2.1 cm
30°	1.4 cm	2.1 cm
40°	1.4 cm	2.1 cm

Figura 3

Para la segunda actividad sólo un equipo midió los ángulos que se obtenían al trazar proyecciones constantes, los demás asumían que aumentaban los ángulos de 10º en 10º. Es decir, los alumnos tienden a generalizar: encuentran 2 medidas iguales en las proyecciones y generalizan para las restantes. En el segundo ejercicio asumieron que, al igual que en el ejercicio anterior, los ángulos incrementaban de 10º en 10º.

En principio, podríamos explicar lo anterior por la *ilusión a la linealidad* o, simplemente, falta de observación. Sin embargo, podría deberse también a fenómenos provocados por la tradición escolar que no favorece este tipo de actividades en la clase de Trigonometría, o más aun, a la falta de un pensamiento trigonométrico. De aquí el interés por provocar en el estudiante la construcción de nuevos significados de la razón trigonométrica, a través de un diseño didáctico, donde puedan evitarse o superarse las concepciones de relación de crecimiento lineal o constante entre el ángulo y el cateto (proyección o cuerda, según el diseño), reportadas también en profesores de nivel medio superior (Jácome, 2011).

2. INVESTIGACIONES ANTECEDENTES

Algunos autores nos refieren que la enseñanza de la trigonometría se aborda en un inicio desde el triángulo rectángulo y eso lo vemos en los libros de texto escolares, después se comienza con el círculo unitario para las funciones trigonométricas y eso genera confusiones en los alumnos (Grabovskij y Kotel’Nikov, 1971; De Kee, Mura y Dionne, 1996; Montiel y Buendía, en prensa). En contraste con esta organización Bressoud (2010) muestra, en una breve revisión histórica, cómo la Trigonometría nace del estudio del triángulo en el círculo y son los problemas de “estudio de sombras” los que detonan el uso de la razón trigonométrica. Hace énfasis en que si los estudiantes transitan por el estudio de la trigonometría desde el círculo para determinar longitudes de cuerdas y arcos con problemas en contexto astronómico, para darle un sentido a las funciones trigonométricas, sería más fácil para ellos transitar del círculo al triángulo que procediendo del modo inverso, que es como generalmente se hace en el ámbito escolar. Si bien no da evidencia didáctica que apoye su propuesta muestra ejemplos en los trabajos de Hiparco, Ptolomeo y Euclides.

Evidenciando las dificultades de los alumnos con el manejo del contexto del círculo De Kee, Mura y Dionne (1996) encontraron y documentaron algunas concepciones que presentan los alumnos respecto al *seno* y al *coseno*, como por ejemplo, lo consideran un procedimiento que consiste en dividir una entre otra las longitudes de dos lados de un triángulo rectángulo con lo que se produce el *seno* o el *coseno* de un ángulo agudo. Sin embargo, algunos alumnos aplican este procedimiento a triángulos que no son rectángulos o a ángulos que no son agudos. Otra concepción que identifican es que para los alumnos las coordenadas cartesianas de un punto de un círculo trigonométrico, representan el *coseno* y el *seno* del punto; o que la función trigonométrica es el conjunto de *seno*, *coseno*, *tangente*, *cosecante*, *secante* y *cotangente*.

Uno de los hallazgos, de estas autoras, que llamó la atención es que para los alumnos no hay distinción entre razón y función trigonométrica, ya que posteriormente se evidenció este fenómeno en un estudio con profesores de nivel medio superior (Jácome, 2011) y en la revisión de Planes y Programas de Estudio (Montiel y Buendía, en prensa), lo cual hace suponer que hay significados que subyacen a la enseñanza de la Trigonometría en general y no sólo a los desempeños de los estudiantes y profesores.

Resultados positivos trabajando en el contexto del círculo fueron reportados por Weber (2005, 2008), quien afirma que "para entender una operación trigonométrica como función los estudiantes necesitan conocer un proceso que puedan usar para evaluar dicha función para cualquier ángulo dado, y deben ser capaces de anticipar aproximadamente el resultado de este método y razonar sobre las propiedades del resultado sin llevar a cabo los pasos del proceso" (p. 145). Sin embargo, lo que subyace al valor numérico de la coordenada que localiza el estudiante en su diseño es, de nuevo, el valor que resulta de dividir dos longitudes de los lados de un triángulo rectángulo. Es decir, debe evocar la concepción que otras investigaciones reportan como dificultad para los estudiantes.

Una mirada alternativa a separar estas nociones y ubicarlas cada una con una "técnica de enseñanza", propone un uso integral de ellas para favorecer un *entendimiento trigonométrico coherente* (Moore, 2012). Para ello Moore (2012, 2010; Moore, LaForest y Kim, 2012) diseña actividades didácticas, en el contexto del círculo, que van desde la medición angular hasta la graficación de las funciones trigonométricas y que favorecen el razonamiento cuantitativo, el uso del radio del círculo como unidad de medida y el razonamiento covariacional. Es decir, no propone un diseño didáctico para aprender el concepto de función trigonométrica, sino una serie de tareas que le dan coherencia al uso de múltiples nociones matemáticas relacionadas con ella.

En esta misma dirección encontramos la propuesta de Demir y Heck (2013), para el aprendizaje de las funciones trigonométricas, en particular del *seno* y el *coseno*. Siguiendo una trayectoria a partir del trazo de polígonos regulares de 4 y hasta *n* lados, en el círculo, y llevándolos al plano cartesiano, los alumnos realizan las gráficas con lápiz y en papel, y posteriormente con ayuda del Geogebra. Se realizan las gráficas obtenidas para polígonos de hasta 30 lados que ya son muy próximos a la circunferencia y basados en todos los trazos se analizan las propiedades de las funciones seno y coseno. El planteamiento central es el estudio de la relación funcional entre la longitud del arco y la posición horizontal y vertical correspondiente para el caso del *coseno* y el *seno* en el círculo unitario, para tratar las funciones trigonométricas no desde los ángulos sino desde los números reales.

Reconocemos que los diseños que reportan tener resultados positivos son aquellos que abandonan la tradición escolar de un método de enseñanza u otro, triángulo rectángulo o círculo unitario, e integran diversas nociones, herramientas y conceptos matemáticos tanto de la geometría como de las funciones. En este marco de acción es que planeamos las actividades de nuestro diseño didáctico.

3. FUNDAMENTACIÓN PARA EL DISEÑO

El diseño didáctico se fundamentará en los elementos teóricos de la construcción social de conocimiento trigonométrico que propone Montiel (2011) y los elementos didáctico-cognitivos de los diseños incluidos en las investigaciones antecedentes. La autora desarrolla una epistemología de prácticas a partir de la cual se explica la construcción social del conocimiento trigonométrico, desde el enfoque teórico de la socioepistemología. En particular, para lo relacionado con las razones trigonométricas sintetiza los elementos de construcción social en la siguiente tabla:

	Anticipación
Práctica de Referencia	Matematización de la Astronomía
Contexto	Estático – Proporcional
Lenguaje	Geométrico-Numérico
Racionalidad	Helenística-Euclidiana
Herramienta	Razón Trigonométrica
Variables	sen θ (longitud) θ ángulo (en grados)
Escala de tiempo	Finita

La autora identifica, en escenarios históricos, a la *anticipación* como la *práctica social* que reguló las actividades asociadas a la *matematización de la astronomía*, de donde emerge la herramienta matemática que hoy conocemos como razón trigonométrica. Reconoce que dado el dominio de la racionalidad helenística, la Trigonometría nace en el marco epistemológico que brindaba la geometría deductiva; y denomina a la construcción de "modelos geométricos a escala" de una entidad real no manipulable como *una transición de lo macro* a lo *micro*, donde la proporcionalidad entre ellos (realidad y modelo) condiciona la precisión del modelo. De manera natural, las *razones* se convierten en la abstracción inmediata de la *proporción* y los círculos, los arcos/ángulos y las cuerdas en los elementos constitutivos del modelo geométrico.

El enfoque teórico de Montiel (2011) la lleva a problematizar el saber matemático como punto de partida para su investigación, de ahí que antes de hablar de la razón trigonométrica como tal reconoce la importancia de la medición de cuerdas en un contexto de construcciones geométricas como la actividad germinal de la herramienta matemática de interés. Sin embargo, deja claro que no pretende una reconstrucción de la historia, sino una reconstrucción de condiciones tales como el contexto, el lenguaje, la racionalidad y, principalmente, el manejo adecuado de las escalas de tiempo; reconociendo que las actividades estarán matizadas por el escenario, el planteamiento de situaciones-problema y los participantes (edad, conocimientos previos, tradición escolar, etc.).

Considerando la tendencia de diseños que integran diversas nociones, herramientas y conceptos de la geometría y de las funciones, consideramos de manera articulada la propuesta de Vohns (2006) para transitar entre las *aproximaciones e ideas básicas inherentes* de:

- Punto de vista geométrico
- Aproximación empírica-numérica
- Punto de vista aritmético/algebraico
- Aproximación trigonométrica

como la estrategia para lograr la coherencia de la que habla Moore, así como para abonar en la caracterización del pensamiento trigonométrico.

4. AVANCE EN EL DISEÑO DIDÁCTICO

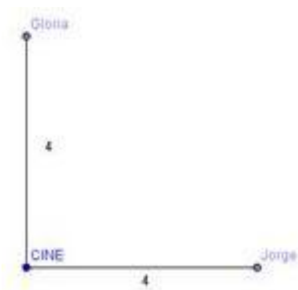
Nuestra investigación se propone estudiar los significados, de la razón trigonométrica, que se construyen al trabajar el contexto geométrico del círculo; en particular el significado de ésta como herramienta para cuantificar la relación entre el ángulo central y la distancia entre dos puntos sobre la circunferencia. La actividad propuesta por Vohns (2006) nos ha dado el problema y las bases para una organización didáctica, que permita construir el significado mencionado; sin embargo, se requirió una adaptación y ampliación para introducir, a propósito de un problema de cálculo de distancias, las razones trigonométricas en triángulos construidos en el círculo y no la ley de los cosenos como plantea el autor. En ese sentido hablamos de construcciones geométricas en el círculo y no sólo, como el caso del círculo unitario tradicional, de la superposición del triángulo rectángulo en el plano cartesiano como referente para la razón trigonométrica y su signo.

Se inicia planteando el problema:

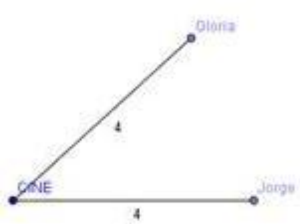
> “Jorge y Gloria se conocieron en la escuela, platicando se dieron cuenta que ambos comparten el gusto por el cine y que los dos viven a 4 kms de distancia del cine México. ¿Cuál es la distancia que hay entre la casa de Jorge y la casa de Gloria?”

Esperando que los alumnos propongan al menos cuatro casos:

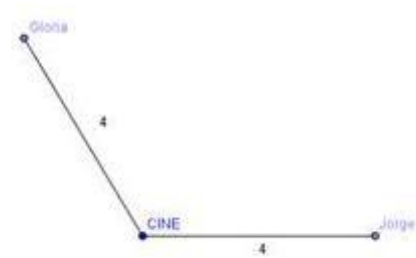
Caso 1



Caso 2



Caso 3



Caso 4

De donde, según Vohns (2006), se pueden distinguir el punto de vista aritmético (caso 1) y el punto de vista algebraico (Caso 2). El punto de vista geométrico se presenta al reconocer la posibilidad de configurar un triángulo equilátero, mientras que calcular la distancia por relaciones proporcionales articularía dos puntos de vista y generaría una aproximación empírico-numérico. Sólo la búsqueda por una forma de calcular la distancia para cualquier posición que tomen Jorge y Gloria, pero reconociendo su dependencia del ángulo formado entre ellos, daría origen a una aproximación trigonométrica. Con este problema y el primer paso de representar, a escala, la situación se sitúa la actividad del estudiante en la práctica de pasar de lo macro a lo micro, y desarrollar herramientas y lenguaje geométrico de las proporciones para abordar y resolver la situación problema, tal como plantea Montiel (2011).

Estamos en proceso de diseño de una secuencia de actividades que hagan transitar al estudiante desde el punto de vista aritmético hasta una aproximación trigonométrica, integrando todas las construcciones geométricas de la propia secuencia y aquellas de sus conocimientos previos. Por ejemplo, se les solicitará que calculen la distancia que existe entre la casa de Jorge y Gloria para cada uno de los casos que hayan propuesto y que detallen el procedimiento que utilizaron para obtenerla. De los cuatro casos se espera que tengan un método para resolver los dos primeros que son cuando están ubicados en las posiciones que forman ángulos de 180º y 90º entre ellos. A partir de la posibilidad de calcular las distancias de estos casos se introduce el papel que juega conocer un dato más que los proporcionados en el enunciado del problema, es decir, la medida del ángulo que forman los segmentos que representan las distancias entre el cine y la casa de cada uno de ellos.

En una segunda etapa se realizarán las construcciones geométricas, con el apoyo de Geogebra, para analizar las variaciones del problema e ir introduciendo herramientas para su resolución. Por ejemplo, activando el trazo de una de las posiciones al variarla se observaría que el conjunto de todas sus posiciones posibles están representadas por el círculo (Figura 4).

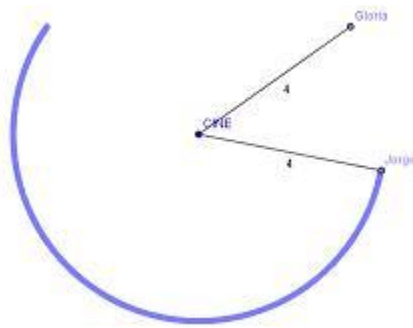


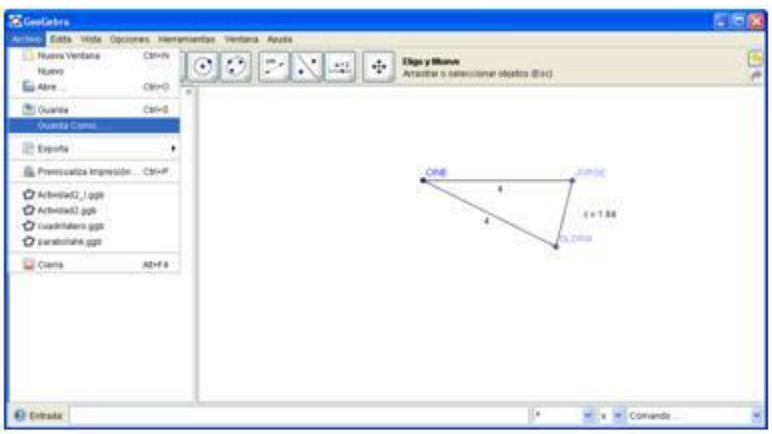
Figura 4

A partir de esta actividad el problema se vuelve, intencionalmente, el cálculo de una cuerda en relación a un ángulo central. Para esta parte de la actividad se están preparando hojas de trabajo impresas que se les entregarán a los alumnos, donde se detallen las instrucciones para interactuar con el programa, debido a que varios de ellos no lo conocen; pero sobre todo para obtener los registros de su resolución, como datos para nuestro análisis.

5. REFLEXIÓN FINAL

Con base en los resultados de investigaciones previas y los elementos teóricos en los que estamos basando nuestro diseño, se han identificado algunas variables didácticas a controlar para evitar o superar conflictos, resignificar algunas nociones matemáticas y vincular las nociones trigonométricas en el contexto geométrico y con éstas mismas en el contexto analítico. Por ejemplo, estando Jorge y Gloria en distintas posiciones cada uno pueden darse varios casos en donde la distancia entre ellos sea la misma; o si el ángulo que forman las semirectas que representan las distancias entre ellos y el cine es mayor de 180° obtendrán la misma distancia que con el ángulo que complementa los 360°; casos que pueden vincularse a la periodicidad y periodo cuando la relación trigonométrica se trabaja como función analítica.

Otro tipo de variables a controlar son aquellas que pudieran provocar la evocación de nociones innecesarias, por ejemplo, durante la primera etapa en la vista gráfica del Geogebra se trabajara sin activar los ejes coordenados para no influenciar la actividad con coordenadas (Figura 5). El trabajo en el plano cartesiano tendría que ubicar a Jorge y a Gloria, por ejemplo, en un mapa para dar congruencia al problema en un nuevo contexto matemático; lo que implicaría que la distancia entre ellos dejaría de ser el centro de atención del problema. La inserción del plano con centro en la posición del cine y la búsqueda por una coordenada específica (la posición de Jorge o de gloria) redirige la atención hacia los triángulos rectángulos que se forman y tienen su base en el eje horizontal (Figura 6).



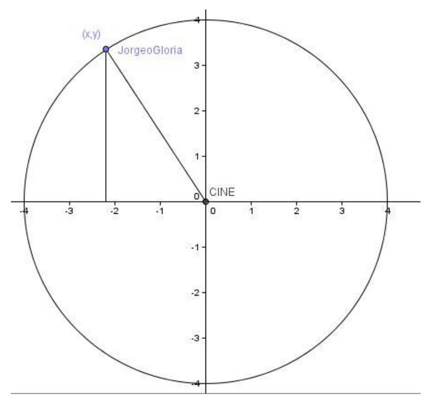


Figura 5 *Figura 6*

Hemos considerado que este diseño además de constituirse como un instrumento que nos permita obtener datos sobre el proceso de construcción de significados de la razón trigonométrica puede ser un *experimento de diseño* en el sentido de Cobb, Confrey, diSessa, Lehrer y Schauble (2003), en tanto puede permitir dar cuenta de un proceso de enseñanza-aprendizaje de nociones trigonométricas tradicionalmente separadas, no sólo en tiempos (razones trigonométricas en la secundaria y funciones trigonométricas en el bachillerato), sino en contextos matemáticos (Geometría y Precálculo, respectivamente). Es decir, puede aportar a la teoría sobre el desarrollo del pensamiento trigonométrico y no sólo del aprendizaje de conceptos aislados.

Agradecimientos

Este avance de investigación se enmarca en el Proyecto SIP 2013-1576 "Desarrollo del pensamiento trigonométrico. Estudio de la significación contextualizada de las relaciones trigonométricas", financiado por la Secretaría de Investigación y Posgrado del Instituto Politécnico Nacional.

6. Referencias

Bressoud, D. (2010). Historical reflections on teaching trigonometry. *Mathematics Teacher, 104*(2), 106-112.

De Kee, S., Mura, R. y Dionne, J. (1996) La comprehension des notions de sinus et cosinus chez des élèves du secondaire. *For the Learning of Mathematics 16(2),* 19-27.

Demir, Ö. y Heck, A. (2013). A new learning trajectory for trigonometric functions. *Proceedings of the eleventh International Conference on Technology in Mathematics Teaching.* Bari, Italy. Recuperado de http://staff.science.uva.nl/~heck/Research/art/ICTMT11.pdf

Grabovskij, M. y Kotel'Nikov, P. (1971). The use of kinematic models in the study of trigonometric functions. *Educational Studies in Mathematics 3*(2), 147-160.

Jácome, G. (2011). *Estudio socioepistemológico de la razón trigonométrica. Elementos para la construcción de su naturaleza proporcional*. Tesis de Maestría no publicada. Instituto Politécnico Nacional, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada - Unidad Legaria. México.

Montiel, G. (2011). *Construcción de conocimiento trigonométrico. Un estudio socioepistemológico*. México: Ediciones Díaz de Santos.

Montiel, G. y Buendía, G. (en prensa). Desarrollo del pensamiento funcional trigonométrico. En G. Buendía, M. Ferrari y G. Martínez (Coords.), *Resignificación de funciones para profesores de matemáticas*. México: Ediciones Díaz de Santos.

Moore, K. (2012). Coherence, Quantitative Reasoning, and the Trigonometry of Students. En R. Mayes y L. Hatfield (Co-Eds), *Quantitative Reasoning and Mathematical Modeling: A Driver for STEM Integrated Education and Teaching in Context* (pp. 75-92). USA: College of Education, University of Wyoming. Recuperado de http://www.uwyo.edu/wisdome/_files/documents/moore.pdf

Moore, K. (2010). The role of quantitative and covariational reasoning in developing precalculus students' images of angle mesure and central concepts of Trigonometry. *Proceedings for the Thirteenth SIGMAA on Research in Undergraduate Mathematics Education Conference*. North Carolina, USA. Recuperado de http://sigmaa.maa.org/rume/crume2010/Archive/Moore.pdf

Moore, K., LaForest, K. y Kim, H. (2012). The unit circle and unit conversions. *Proceedings of the Fifteenth Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education* (pp. 16-31). Portland, OR: Portland State University.

Vohns, A. (2006). Reconstructing basic ideas in geometry—an empirical approach. *ZDM*, *38*(6), 498-504.

Weber, K. (2008). Teaching trigonometric functions: Lessons learned from research. *Mathematics Teacher 102*(2), 144-150.

Weber, K. (2005). Student's understanding of trigonometric functions. *Mathematics Education Research Journal 7(3*), 91-112.