



USO DE GRÁFICAS CINEMÁTICAS EN LA COMPRESION DE LA IDEA DE DERIVADA

Yanet Tejada Mayo, Crisólogo Dolores Flores
ytejada05@gmail.com, cdolores2@gmail.com
CIMATE- Universidad Autónoma de Guerrero
Superior

Resumen

El presente trabajo se refiere a un proyecto de investigación en proceso que ha adoptado a la derivada como objeto de estudio. Este concepto ha sido estudiado en varias investigaciones sin embargo en este trabajo es estudiado en el ámbito de su significación práctica, ligado a sus significado cinemático y en el contexto geométrico. La derivada sigue siendo de difícil comprensión y sigue causando problemas en los estudiantes, si bien es cierto que los estudiantes logran calcular derivadas por medios algebraicos, no logran comprender sus significados prácticos. Por ello el problema central de esta investigación radica en la escasa comprensión de la derivada, su objetivo se enfoca en proponer y poner en práctica una Situación de Aprendizaje que favorezca tal comprensión a través del uso de gráficas cinemáticas.

Palabras clave: *Gráfica Cinemática, Uso, Derivada, Comprensión, Situación de Aprendizaje.*

1. INTRODUCCIÓN

La Matemática Educativa es una disciplina que atiende problemáticas relacionadas con la construcción del conocimiento de la matemática y estudia los diferentes fenómenos matemáticos ligados a las distintas áreas de la matemática misma. La matemática de la variación y del cambio (o simplemente Cálculo como se le reconoce) es uno de esos tipos de conocimiento presente desde la educación básica hasta la superior, que requieren ser construidos y asimilados por los estudiantes. Los conceptos esenciales del Cálculo como variable, función, razón de cambio, límite, continuidad, derivada e integral permean en la educación matemática y se hacen explícitos desde el nivel medio superior (bachillerato).

La investigación sobre la enseñanza y el aprendizaje del Cálculo, ha tenido dos tradiciones muy diferentes, la teórica y la práctica. En la primera se encuentran las investigaciones que se desarrollan privilegiando perspectivas teóricas como la epistemológica, la cognitiva y la pedagógica (García, 2011); y la segunda tradición motivada por la reforma del Cálculo en Estados Unidos se centra en la práctica, privilegiando la intervención en las aulas escolares con fines de mejorar el aprendizaje de sus conceptos y propiedades esenciales (Robert & Speer, 2001).

Como en el Cálculo, tanto en el nivel medio superior como en el superior es donde se presentan los problemas más fuertes en el área de Matemáticas, se realizan un gran número de investigaciones para detectar, primero, las dificultades que los alumnos muestran al estudiar el cálculo (Steen, 1988, citado en Contreras, 1999) y de esta manera implementar acciones dentro del aula que ayuden a disminuir este problema (Contreras, 1999).

Particularmente, sobre el tema de la derivada existen investigaciones que estudian las dificultades de los estudiantes al trabajar con el concepto: Orton (1983), Ferrini-Mundy & Graham (1994), Porzio (1997) Azcarate (1990), Dolores (1998), en otras, se plantean propuestas para mejorar su aprendizaje (Dolores, 2000; García, 2011; Vrancken & Engler, 2008). Existen otras

investigaciones como la de González (1999), Contreras (2000) y Mendoza (2003), que trabajaron sobre la base de la premisa de Boss (1973), que sostiene que la noción derivada no puede construirse si hasta después de haberse construido la idea de derivada sucesiva, en esta investigación también se trabajará sobre la base de este supuesto.

En su mayoría las investigaciones parten del supuesto de que el concepto de derivada se construye de la misma manera como se propone en los textos, es decir, se construyen los conceptos precedentes (número reales, función, límite y continuidad) para llegar a ésta como límite, una vez formalizada, se aplica en la resolución de problemas. A diferencia de estas investigaciones nosotros estamos interesados en el uso del concepto, partimos de la idea socioepistemológica que plantea que los conocimientos, o muchos conceptos, son usados antes de ser formalizados.

Como se puede apreciar este concepto ha sido estudiado en varias investigaciones desde diferentes ángulos, por ejemplo respecto a las dificultades de los estudiantes, propuestas para su enseñanza, entre otras, sin embargo en este trabajo es estudiado en el ámbito de su significación práctica, ligado particularmente a su significado cinemático y en el contexto geométrico. Como sabemos la derivada sigue siendo difícil de comprender por parte de estudiantes incluso de profesores (González, 1999; García, 2011), si bien es cierto que los estudiantes logran calcular derivadas por medios algebraicos, no logran comprender sus significados prácticos. Por ello el problema central de esta investigación radica en *la escasa comprensión de la derivada*, y su objetivo de investigación se enfoca en proponer y poner en práctica *una Situación de Aprendizaje que favorezca tal comprensión a través del uso de gráficas cinemáticas*. El objetivo de esta situación es desarrollar la habilidad para la lectura e interpretación de gráficas cinemáticas ($s(t)$, $v(t)$) y $a(t)$) usando la idea de velocidad y aceleración.

2. ELEMENTOS TEÓRICOS

Los elementos teóricos de esta investigación están directamente asociados a los conceptos de: Situación de Aprendizaje, Comprensión, Uso, Derivada Sucesiva, Habilidad.

En esta investigación una *Situación de Aprendizaje* se asume como un espacio de encuentro en el que los participantes (docente y estudiantes), coordinan acciones a través de un proceso de interpretación/compreensión mediante el cual logran construir significados que comparten. Una Situación de Aprendizaje facilita la adquisición de nuevos conocimientos en la medida que se vaya creando un ambiente y desarrollando una atmósfera en donde estos conocimientos se hagan compatibles con el conocimiento que el sujeto posee (García, 2011).

En este trabajo se pretende que el espacio de encuentro sea el salón de clases, y las acciones coordinadas por el docente (en nuestro caso será la investigadora) y los estudiantes, estén encaminadas a la resolución de un conjunto de actividades (secuencias) mediante las cuales se pretenda aportar elementos a los alumnos para mejorar su comprensión de la idea de derivada.

Otros dos elementos teóricos como ya se mencionó al principio de este apartado son: *Comprensión y uso*. Entenderemos por *comprensión*, como aquella que señala que comprender no es simplemente tener conocimientos, sino más bien tener la habilidad de pensar con eso que se sabe y además poder aplicarlo flexiblemente en el mundo (Stone, 1990). Esto último es a lo que algunos autores llaman aplicación o uso de los conceptos.

Por *uso* se entenderá en el sentido de Cabañas y Cantoral (2009a, 2010b), quienes lo caracterizan como las formas en que es empleada o adoptada determinada noción en un contexto específico. Desde esta visión, significa que una *noción* puede ser adoptada en el contexto de una situación de aprendizaje a fin de precisar otro marco de referencia en la resignificación del conocimiento matemático, o en la formulación de explicaciones sobre los conceptos matemáticos en el discurso matemático escolar bien en la reconstrucción de conocimiento matemático por los estudiantes, a nivel de una experiencia de aula (Cabañas, 2011).

En este trabajo lo que caracteriza el paso de la función a sus derivadas la llamaremos *derivada sucesiva*, esta idea está presente en la transición de las funciones: $(s(t) \leftrightarrow v(t) \leftrightarrow a(t))$, en el contexto gráfico. A diferencia de lo tradicional que entienden a la derivada sucesiva como una fórmula, es decir, dan la función y calculan su primera, segunda, tercera... derivadas. Por habilidad se entenderá como aquellas que constituyen la sistematización de acciones que tienen un objeto o fin consciente (Brito, 1984).

La habilidad para leer e interpretar gráfica cinemáticas $(s(t), v(t))$ y $a(t)$ se necesita de sistematizar las siguientes acciones: Identificar las variables en los ejes, diferenciar entre la variable independiente y la dependiente, localizar puntos en el plano y escribir correctamente pares ordenados, graficar funciones, representar e identificar los cambios Δs y Δt , relacionar los cambios: cambios en Δt provoca cambios en Δs , representar las razones $\frac{\Delta s}{\Delta t} = v$, $\frac{\Delta v}{\Delta t} = a$, estimar o calcular $\frac{\Delta s}{\Delta t} = v$, $\frac{\Delta v}{\Delta t} = a$, estimar, calcular y representar $s(t)$, $v(t)$ y $a(t)$ en intervalos y en un punto, graficar $v(t)$ dada $s(t)$, graficar $a(t)$ dada $v(t)$, dada la gráfica de $a(t)$ calcular $v(t)$ en intervalos y dada la gráfica de $v(t)$ calcular $s(t)$ en intervalos.

3. METODOLOGÍA

La metodología que se utilizara en esta investigación es la Ingeniería Didáctica (Artigue 1995) la cual consta de cuatro fases: Análisis preliminar, concepción y diseño de las situaciones de aprendizaje, experimentación y análisis a posteriori y evaluación. En el Análisis preliminar se consideran los siguientes: análisis epistemológico de los contenidos contemplados en la enseñanza, el análisis de la enseñanza tradicional y sus efectos; análisis de las concepciones de los estudiantes, de las dificultades y obstáculos que determinan su evolución; análisis del campo de restricciones donde se va a situar la realización didáctica efectiva.

En esta investigación para el análisis *epistemológico* se consideraran los aspectos epistemológicos de la derivada, es decir, el desarrollo histórico de la construcción de dicho concepto, en el cual hemos encontrado cuatro etapas por las que ha pasado el concepto de derivada las cuales son: El trazo de tangentes a las cónicas por métodos geométricos (origen de la derivada), el trazo de tangentes con métodos analíticos (Raíces iguales de Descartes), el método de los límites de Fermat y la formalización del límite (Cauchy).

Para el análisis de la *enseñanza tradicional* por un lado se revisará y analizará el plan y programa de estudio de la Unidad Académica de Matemáticas (UAM) de la UAGro y por otro lado, se pretende revisar algunos libros textos que se citan en la bibliografía del Programa de Estudio de Cálculo I, con la finalidad de mirar la secuencia que tanto libros como maestros acostumbran a utilizar cuando enseñan el concepto de derivada. Para el análisis de las *concepciones de los estudiantes de las dificultades y obstáculos*, por un lado consideraremos las dificultades y



obstáculos que algunas investigaciones han reportado (Azcarate, 1990; Dolores, 1998; García y Navarro, 2010; Sánchez-Matamoros, *et al*, 2008; Dolores, 2007; Robert y Speer, 2001) y por el otro lado también se tomarán en cuenta los resultados de nuestra prueba de diagnóstico que se aplicará antes de iniciar con nuestra situación de aprendizaje.

En la fase Concepción y diseño de las situaciones didácticas se elabora la o las situaciones de aprendizaje, se describe lo que se espera que hagan los estudiantes en el momento de la experimentación, desde esta fase se inicia el proceso de validación, por medio del análisis *a priori* de las situaciones. En este trabajo de investigación se parte de la hipótesis de que el uso de gráficas cinemáticas (distancia vs tiempo, velocidad vs tiempo y aceleración vs tiempo) mejorará la comprensión de la idea de derivada en los estudiantes.

En esta investigación se diseñará una prueba de diagnóstico con la finalidad de que nos aporte elementos para el diseño de nuestra situación de aprendizaje, la cual será aplicada a los alumnos participantes antes de iniciar la Situación de Aprendizaje. Esta prueba estará compuesta por un total de siete actividades: 1) Se les preguntará por la velocidad en un punto dada una gráfica rectilínea y una curva que representa la distancia recorrida por una partícula respecto del tiempo. 2) Se les preguntará por la velocidad en un intervalo, negativa y nula dada una curva que muestra la variación de la distancia recorrida por un ciclista en función del tiempo. 3) Establecer la relación entre las gráficas de la distancia, con la gráfica de la velocidad y luego con la de la aceleración (todas ellas con variable independiente el tiempo). 4) La aceleración en un punto dada la gráfica de la velocidad. 5) La velocidad en un punto dada la gráfica de la aceleración. 6) Seleccionar la gráfica que corresponda a: $s(t)$ (distancia vs tiempo); a $v(t)$ (velocidad vs tiempo) y la de $a(t)$ (aceleración vs tiempo). 7) Dada la gráfica de $s(t)$ bosquejar la gráfica $v(t)$ y de $a(t)$.

La finalidad de esta prueba consiste en poder comparar lo que los estudiantes son capaces de hacer antes y después de la puesta en práctica de la situación diseñada, y con ello poder percatarnos de la mejora o no de la comprensión del concepto de interés en los estudiantes participantes (valoración de la Situación de Aprendizaje).

Para el diseño de la Situación de Aprendizaje se consideran aspectos como: el uso de la idea puntual y global de la variación, la relación entre la gráfica de la función primitiva y su derivada y viceversa, el contexto gráfico. Por lo que el diseño de la situación consistirá en la sistematización de actividades de la representación geométrica de la: distancia a la velocidad, velocidad a la aceleración, velocidad a la distancia y aceleración a la velocidad. Los procesos que utilizarán los estudiantes para la realización de las actividades son: la visualización, la representación de los cambios y las “razones entre los cambios”.

La tercera fase es la de experimentación que implica la puesta en escena de la situación con estudiantes, se registran las observaciones y recolecta información. Esta situación será aplicada a estudiantes de primer grado de la Licenciatura en Matemáticas de la UAM, y estudiantes de primer grado de la Maestría en Docencia de la UAGro en un periodo de tres semanas.

En la fase de análisis *a posteriori* y *evaluación* se da la confrontación de los dos análisis, el *a priori* y *a posteriori*, se fundamenta en esencia la validación de las hipótesis formuladas en la investigación. El *a posteriori* se basa en el conjunto de datos recolectados a lo largo de la experimentación, a saber, las observaciones realizadas de las secuencias de enseñanza, al igual que las producciones de los estudiantes en clase o fuera de ella. Estos datos se complementan

con frecuencia con otros obtenidos de la utilización de metodologías externas, como cuestionarios, entrevistas individuales o en pequeños grupos, aplicadas en distintos momentos de la enseñanza o durante su transcurso (Artigue 1995, p.48).

Esta investigación esa confrontación será el contraste de nuestro resultado de la prueba de diagnóstico aplicada antes de la situación de aprendizaje y el resultado de esta prueba después de la aplicación de nuestra situación diseñada, de esta manera se hará la valoración de la Situación de Aprendizaje.

4. CONCLUSIONES

Este trabajo ha adoptado como objeto de estudio el problema de la comprensión de la derivada. Tradicionalmente la derivada es considerada como un algoritmo, como un límite o en el mejor de los casos como la pendiente de la tangente. Sin embargo el estudio de la derivada en el ámbito de su significación práctica, ligado a su significado cinemático en el contexto geométrico, moviliza procesos cognitivos que no se movilizan si, por ejemplo, sólo se estudiará en el contexto algebraico. Nosotros pretendemos que los estudiantes usen esos significados para fortalecer su comprensión de este importante concepto. Con ello pretendemos aportar una alternativa que pueda ser utilizada por profesores del bachillerato o incluso con estudiantes universitarios para que se mejore el aprendizaje de este concepto.

5. REFERENCIAS

- Artigue, M. (1995). Ingeniería Didáctica. En Pedro Gómez (Ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Azcárate, C. (1990). *La velocidad: introducción al concepto de derivada*. Tesis de doctorado, Universidad Autónoma de Barcelona.
- Boss, H. J. M. (1973). Differentials, Higher-Differentials and the Derivative in the Leibnizian Calculus. *Arch. Hist. ExactSci.*, 14, 1-90.
- Brito, H. (1984). Hábitos, habilidades y capacidades. *Revista Científico Metodológica del Instituto Superior Enrique José Varona*, (13), 73-87.
- Cabañas, G. & Cantoral, R. (2010a). Exploring de notions of comparison, conservation and measurement of the area in university students. A study through their arguments. In M.M.F. Pinto and T.F. Kawasaki (Eds), *Proceedings 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 241-247). Belo Horizonte, Brazil: PME.
- Cabañas, G. & Cantoral, R. (2010b). Análisis de la actividad matemática en el salón de clases. Un estudio socioepistemológico. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 23, 939-947.
- Cabañas, G. (2011). *El papel de la noción de conservación del área en la resignificación de la integral definida. Un estudio socioepistemológico*. Tesis de Doctorado no publicada. Cinvestav-IPN. México.
- Contreras, L. (1999). *Interpretación geométrica de las derivadas de una función*. Tesis de Maestría, U. A. E. H., Subnodo Regional de Matemática Educativa, Pachuca, Hgo.
- De Faria, E. (2006). Ingeniería Didáctica. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, (2).



- Dolores, C. (1999). *Una introducción a la derivada a través de la variación. Serie cuadernos Didácticos*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Dolores, C. (2000). Una propuesta didáctica para la enseñanza de la derivada. En R. Cantoral (Coord.), *El futuro del cálculo infinitesimal. ICME-8 Sevilla, España*. (pp. 155-18). México D. F.: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Dolores, C. (2007). *Elementos para una aproximación variacional a la derivada*. México: Díaz de Santos.
- Dolores, C. (1998). Algunas ideas que acerca de la derivada se forman los estudiantes del bachillerato en sus cursos de cálculo diferencial. En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa II* (pp. 257-272). México D. F.: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Ferrini-Mundy, J. & Graham, K. (1994). Research in calculus learning. Understanding limits, derivatives and integrals. In E. Dubinky & J. Kaput (Eds.), *Research Issues in Undergraduate Mathematics Learning*. MMA Notes 33 (pp. 31-45). Washington, DC: MMA.
- García, M. y Navarro, C. (2010). Una alternativa para trabajar con límites especiales. *Números*, 75(1), 105-120.
- García, M. S. (2011). *Una situación de aprendizaje para contribuir a la mejora de la comprensión del concepto derivada*. Tesis de Maestría no publicada. Centro de Investigación en Matemática Educativa de la UAG. Chilpancingo, Guerrero, México.
- González, R. (1999). *La derivada como una organización de las derivadas sucesivas*. Tesis de Maestría no publicada. Cinvestav-IPN. México.
- Mendoza, M. R. (2003). *Representaciones de la derivada de una función*. Tesis de Maestría, U. A. E. H., Subnodo Regional de Matemática Educativa, Pachuca, Hgo.
- Orton, A. (1983). Student's understanding of differentiation. *Educational Studies in Mathematics* 14(3), 235-250.
- Porzio, D. T. (1997). Effects of different instructional approaches on calculus student's understanding of the relationship between slope, rate of change and the first derivative. In John A. Dossey, Jane O. Swafford, MarylnParmantie & Anne E. Dossey (Eds.), *Proceedings of the Nineteenth Annual Meeting of North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (volume 2, pp. 37-44). Bloomington-Normal, Chicago, Illinois: Illinois State University.
- Robert, A. & Speer, N. (2001). Research on the teaching and learning of Calculus/Elementary analysis. En D. Holton (Ed.), *The Teaching and learning of mathematics at university level: an ICMI Study*, (pp. 283—299). Netherlands: KluwerAcademicPublishers.
- Sánchez-Matamoros, G., et al (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en Didáctica de la Matemática. *Revista Latinoamérica de Investigación en Matemática Educativa*, 11(2), 267-296.
- Stone, M. (1990). Diálogo en Buenos Aires con la pedagoga de Harvard. Recuperado el 20 de noviembre de 2010, de <http://edant.clarin.com/diario/2007/05/27/sociedad/s-05401.htm>
- Universidad Autónoma de Guerrero (2007). Unidad Académica de Matemáticas. *Plan de estudio Licenciatura*. Universidad Autónoma de Guerrero.
- Unidad Académica de Matemáticas. *Programa de Estudio: Cálculo I*.
- Vrancken, S. & Engler, A. (2008). Una propuesta para la introducción del concepto de derivada desde la variación. Análisis de resultados. *Revista Premisa*, 10(38), 36 – 45.