



## LIMITACIONES PARA LA ADQUISICIÓN DE IDEAS FUNDAMENTALES DE ESTOCÁSTICOS EN INGENIERÍA EN UN INSTITUTO TECNOLÓGICO

Omar Pablo Torres Vargas, Ana María Ojeda Salazar.

optorres@cinvestav.mx, amojeda@cinvestav.mx

Cinvestav-IPN

Superior

### Resumen

El presente documento se interesa en las posibles limitaciones que por parte de los estudiantes de los primeros semestres de ingeniería muestren en la adquisición de ideas fundamentales de estocásticos (Heitele, 1975). La primera etapa se centra en la propuesta de la red de institutos tecnológicos y si esta satisface las necesidades que al futuro ingeniero se le exijan en el campo profesional analizando el programa de estudios que recomienda el sistema así como su correspondencia con las ideas fundamentales. La segunda se enfoca en el aprendizaje de los conceptos de estocásticos y el uso que de estos hagan los estudiantes en el tratamiento de datos con la subyacencia de los conceptos de Física en tres experimentos de laboratorio. La tercera etapa examina en más detalle la comprensión de estocásticos por medio de entrevistas. Los resultados apuntan a una tendencia determinista en la formación.

**Palabras clave:** *Limitaciones, conceptos probabilísticos, Formación en ingeniería, Pensamiento probabilístico vs determinista.*

### 1. INTRODUCCIÓN

La presente investigación atiende a los conceptos básicos de probabilidad y de estadística que se estudian en el nivel superior, desde la comprensión que muestran los alumnos al cursar los primeros semestres de ingeniería en un instituto tecnológico. La f

ormación que ellos reciban les permitirá afrontar problemas prácticos de su área, de manera que es imperante dirigir la atención a los requerimientos de conocimientos de estocásticos; a las dificultades que se les presentan en las distintas situaciones propuestas, tanto en los libros recomendados por la institución como en las actividades llevadas a cabo al interior del aula; a los prerequisitos (habilidades matemáticas y razonamiento abstracto) adquiridos de forma insuficiente y que devienen limitaciones para la adquisición de las ideas fundamentales de estocásticos (Heitele, 1975).

Dentro del programa de estudios de ingeniería, se incluyen “Probabilidad y Estadística” (Walpole y Myers, 1992) y “Cálculo Diferencial” (Stewart, 2001; Torres y Torres, 2010) como asignaturas del segundo y primer semestre, respectivamente. La estructuración de la retícula de asignaturas que propone la simultaneidad, en la enseñanza, de dos tipos de pensamiento de naturaleza distinta —probabilístico y determinista— plantea la interrogante de si Cálculo Diferencial se debe impartir previamente a Probabilidad y Estadística y qué consecuencias tiene en la comprensión de estocásticos de los estudiantes.

Este estudio se enfoca en el teorema límite central, el cual establece la convergencia de dos tipos de distribución de naturaleza distinta. El teorema del límite central justifica que, a medida que la cantidad de ensayos de Bernoulli aumenta, se aproxime la probabilidad binomial (el resultado de una serie) mediante los valores de una distribución normal (el resultado de una integral definida).



Pregunta de investigación: ¿Cuáles son las limitaciones para la adquisición de ideas fundamentales de estocásticos por parte de los estudiantes de los primeros semestres de ingeniería en el Instituto Tecnológico de Morelia y a qué factores relacionados con la subyacencia del Teorema del Límite Central, en el contexto de las actividades propuestas en el laboratorio de Física, en segundo y cuarto semestre, se deben?

## 2. MARCO TEÓRICO

La perspectiva teórica que sustenta a la investigación considera elementos de tres órdenes: Epistemológico (Heitеле, 1975; Steinbring, 2005), Cognitivo (Fischbein, 1975; Frawley, 1999; Gigerenzer, 2008; Hogarth, 2002) y Social (Ojeda, 2006; Steinbring, 2005).

Eje epistemológico. Las diez ideas fundamentales de estocásticos: Medida de probabilidad, Espacio muestra, Adición de probabilidades, Regla del producto e independencia, Equiprobabilidad y simetría, Combinatoria, Modelo de urna y simulación, Variable aleatoria, Ley de los grandes números y Muestra, enlistadas por Heitеле (1975), fueron identificadas con el fin de proporcionar un mejoramiento de la educación científica y propuestas como modelo a usar en la enseñanza a todos los niveles.

El triángulo epistemológico (Steinbring, 2005) en la constitución *autorreferente* del concepto (Steinbring, 1991) matemático resume la interacción entre el objeto, el signo y el propio concepto, en atención a la dimensión social que reviste la enseñanza y la interacción en el aula (Ojeda, 2006; Steinbring, 2005) respecto a la adquisición del conocimiento de estocásticos (véase Figura 1).

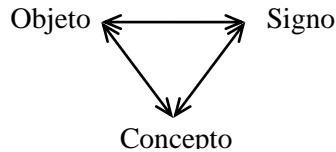


Figura 1. Triángulo epistemológico (Steinbring, 2005, p. 22).

Eje Cognitivo. En el procesamiento de la información se considera a la conciencia como un concepto amplio que incluye tres tipos de subjetividad: “El procesamiento no consciente, la conciencia y la metaconciencia”. El procesamiento no consciente es la codificación automática del *input* sin la experiencia subjetiva o sin la conciencia de los mecanismos de procesamiento (Frawley, 1999, p. 155). La conciencia es la *experiencia con toma de conciencia*. La toma de conciencia es ese elemento sobre el que se puede informar y que puede derivarse de los informes de los demás. El tercer tipo de subjetividad es la metaconciencia: la toma de conciencia y la organización deliberada de la experiencia. La metaconciencia es la llamada explícita a la mente o la suspensión de cualquier experiencia consciente. (Frawley, 1999, p. 157)

La dificultad que reviste el tercer tipo de subjetividad es clara cuando consideramos lo que Gigerenzer (2008) denomina *inteligencia inconsciente*: sabemos más de lo que somos capaces de expresar. Nos referimos a las limitaciones cognitivas como una forma de protección del estudiante ante demasiada información. Nuestro cerebro parece tener mecanismos incorporados, como el del olvido o el de empezar poco a poco, que nos protegen de los peligros de poseer demasiada información. Sin limitaciones cognitivas, no actuaríamos con la inteligencia acostumbrada. (Gigerenzer, 2008, p. 46)



A la intuición, como un componente activo de la cognición, Fischbein (1975) la define como un conocimiento que surge a partir de la experiencia, por ello, se le puede entrenar, desarrollar e, incluso, incrementar.

Eje Social. Los elementos de orden social se refieren a estocásticos en la educación. Son de interés tanto el contexto educativo como los medios y recursos semióticos que se utilicen para hacer referencia a las ideas de estocásticos.

Los constituyentes de la *célula de análisis de la enseñanza* (Ojeda, 2006) derivan de la perspectiva teórica. Se distinguen ideas fundamentales de estocásticos señaladas por Heitele (1975) de otros conceptos matemáticos implicados en su estudio para identificar posibles impertinencias por introducciones simultáneas o tardías de los segundos respecto a los primeros. Los criterios de análisis de dicha célula son la guía para el estudio sistematizado de nuestro interés tanto en el análisis de los datos como en la identificación de resultados (ver Figura 2).

Criterios de análisis				
Ideas fundamentales de estocásticos	Otros conceptos matemáticos	Recursos para organizar y tratar los datos	Situaciones y contextos	Términos empleados

Figura 2. Criterios de análisis (Ojeda, 2006).

### 3. MÉTODO

La investigación es de carácter cualitativo (Eisner, 1998) y, con ella, se hace la identificación y caracterización de las posibles limitaciones en el aprendizaje de estocásticos por parte de una muestra de 32 estudiantes de primero y segundo semestre de ingeniería del Instituto Tecnológico de Morelia, implementando el uso sistematizado de la *célula de análisis* (Ojeda, 2006) en las tres etapas en las que se ha organizado esta investigación (véase Figura 3).

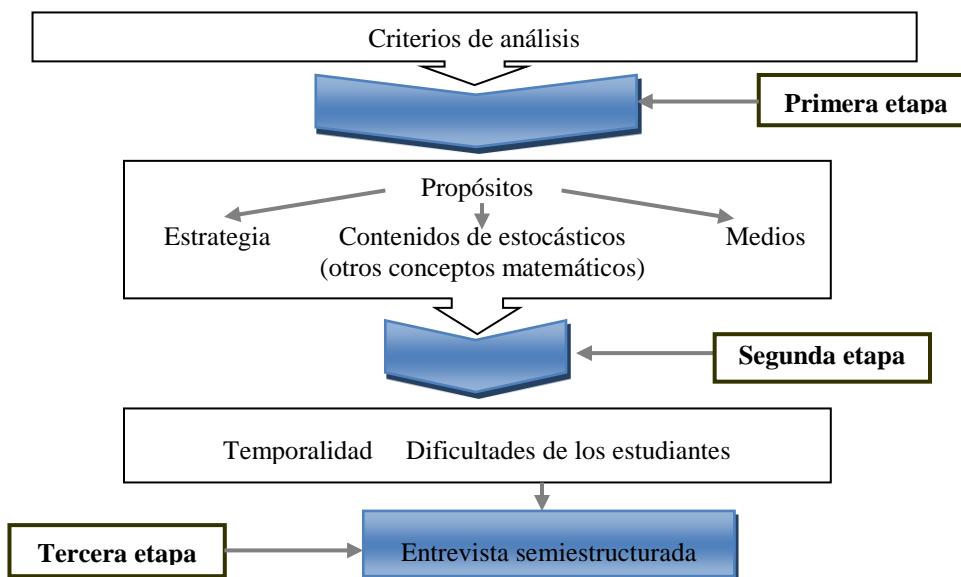


Figura 3. Organización de la investigación con base en la célula de análisis de la enseñanza.



La primera etapa concierne a las condiciones a las que se somete institucionalmente la formación en probabilidad y en estadística en tres carreras de ingeniería (Ingeniería Bioquímica, Ingeniería Industrial e Ingeniería en Materiales); se le desarrolla con una investigación documental de sus programas de estudio (SNEST, 2010) y libro de texto recomendado para estocásticos (Walpole y Myers, 1992) por los institutos tecnológicos. La segunda etapa estuvo enfocada en el uso del propio aprendizaje de estocásticos del estudiante en el tratamiento e interpretación de datos estadísticos con la subyacencia de los conceptos de física, de cuyo resultado se recopilaron datos, en primera instancia, mediante cuestionarios con preguntas abiertas, impresos en hojas para contestación individual, con lápiz, por parte de los estudiantes, como una actividad paralela en tres de sus prácticas de laboratorio, a decir: “Teoría de errores”, “Análisis gráfico de un experimento” y “Tiro parabólico”, monitoreadas éstas mediante técnicas de videograbación por parte de un camarógrafo auxiliar, con el propósito de identificar desempeños interesantes. Para la tercera etapa se puso en juego una estrategia de selección de estudiantes por su desempeño en la segunda, estableciendo el cruce de datos entre la filmación y los cuestionarios para examinar en más detalle su comprensión de estocásticos por medio de entrevistas semiestructuradas; éstas también se videograbaron y se transcribieron para su análisis.

La investigación se desarrolló en el Instituto Tecnológico de Morelia y se recopilaron datos durante tres sesiones del laboratorio *Estática y Dinámica*, impartido a los alumnos de la asignatura *Física*, en el segundo semestre de Ingeniería Bioquímica; *Física*, en el cuarto semestre de Ingeniería Industrial y, *Mecánica Clásica*, en el segundo semestre de Ingeniería en Materiales. La población bajo estudio incluyó a tres grupos de estudiantes de carreras distintas, es decir, el grupo 1 estuvo conformado por 11 estudiantes de Ingeniería Industrial, el grupo 2 lo conformaron 12 estudiantes de Ingeniería Bioquímica y, en el grupo 3, estuvieron 9 estudiantes de Ingeniería en Materiales.

Cada sesión de práctica tuvo una duración de dos horas, dividida en dos partes. La primera consistió en efectuar la parte experimental y dar respuesta al instructivo que la propia Institución proporciona a cada asistente. La segunda parte de la práctica estuvo enfocada a recaudar información para la investigación por medio de un cuestionario con el fin de obtener elementos de análisis respecto al tratamiento de datos estadísticos e imprimiendo énfasis en su distribución binomial y la relación funcional de las variables en juego. La expectativa fue que cada estudiante identificara los parámetros normales: *media* y *desviación estándar*, tanto gráfica como analíticamente, ancho de curva y las características generales de su construcción gráfica; que advirtiera un panorama funcional y estadístico, trazando un histograma relativo al comportamiento de los datos; que pudiera representar de distintas formas sus mediciones, interpretar sus resultados y concluir al respecto. El cuestionario fue aplicado a cada estudiante que asistió a las prácticas referidas para, posteriormente, seleccionar a tres de ellos (uno por cada especialidad) para entrevista, en formato semiestructurado (Zazkis y Hazzan, 2008).

El criterio para la selección de los estudiantes candidatos a entrevista se decidió al término del análisis de los datos que arrojaron los cuestionarios y que mostraron dificultades o limitaciones al tratar con las ideas fundamentales de estocásticos. Es de interés para la investigación indagar sobre tales limitaciones y obtener mayor información sobre éstas para identificarlas y saber si están relacionadas con la configuración de la retícula y el orden de los programas de estudio de las ingenierías en la institución mencionada. Los casos seleccionados fueron nombrados así: *Alumna A*, a una estudiante de Ingeniería Industrial; *Alumna B* a una estudiante de Ingeniería Bioquímica y *Alumno*, a un estudiante de Ingeniería en Materiales.



Los instrumentos para recopilar los datos son los cuestionarios y el guión personalizado de entrevista. Para esta última se usó la técnica de videogramación. En cada entrevista se trató de reconocer la información relevante y elucidar el tema central haciendo uso de algunos recursos como mostrar a la (al) entrevistada (o) sus propias respuestas proporcionadas en los cuestionarios, proyectándolas y contrastándolas con los apuntes que ella (él) haya ido aportando en el desarrollo de la misma; se usó, también, una simulación del *tablero de Galton* (Pierce, 2013) para vincularlo con las gráficas hechas por el entrevistado y observar la tendencia central en la distribución de los datos. En consecuencia, el análisis de los datos recopilados durante las tres etapas de la investigación se efectuó en matrices y los criterios corresponden a lo planteado en la *célula de análisis* de la enseñanza (Ojeda, 2006).

#### 4. RESULTADOS

En la revisión de los textos propuestos para el estudio de Probabilidad y de Cálculo, el concepto de Integral puede tomar dos distintas acepciones: *Acumulación* en el caso del Cálculo, y *Disminución* para el caso de Probabilidad.

En el caso de las ingenierías que ofrece el Instituto Tecnológico de Morelia, el programa de estudios no se apega del todo a la descripción de Borovcnik y Kapadia (1991), ya que comienza con conceptos básicos y distribuciones de probabilidad; es hasta la tercera parte del curso donde se estudia estadística descriptiva, lo cual presenta una incongruencia entre el programa y los libros de texto que recomienda (Spiegel, 1975; Walpole y Myers, 1992).

Una función de probabilidad de variable aleatoria, como es definida en los cursos de ingeniería, cuyo dominio es el espacio muestra y el contradominio es el intervalo cerrado y real  $[0,1]$  se podría comprender si se le introdujera cuando, o después, de que se presenta el concepto de función dentro del tema de conjunto de los números reales, en la asignatura Cálculo Diferencial, pero le antecede. En consecuencia, se plantean interrogantes sobre la adquisición de los conceptos de estocásticos de algunos estudiantes aunque, en contraparte, se plantea también la oportunidad de una reafirmación de los conocimientos sobre los temas tratados en ambas asignaturas para los alumnos de este nivel. Aparentemente, los temas de las asignaturas en cuestión se cursan de manera independiente y se presentan sin relación alguna.

La postergación, en el programa de estudios de los institutos tecnológicos, de estadística descriptiva luego de conceptos básicos y de distribuciones de probabilidad, supone el desaprovechamiento del enfoque frecuencial como una base intuitiva favorable a la introducción de conceptos probabilísticos (Hogarth, 2002).

El análisis de los datos adquiridos mediante el primer cuestionario se centró en los patrones de respuesta que exhibieron los estudiantes. Se inició con una revisión exhaustiva de las respuestas correctas e incorrectas. Los resultados fueron sometidos a los criterios de análisis (Ojeda, 2006) y se hizo una clasificación de los patrones de respuesta para identificar el discurso propio del estudiante que lo lleva a concluir sobre los conceptos, datos, ideas y situaciones que le son propuestas en cada cuestión.

La caracterización de los desempeños de los tres sujetos en las entrevistas se realizó considerando los criterios de análisis y se la presenta en las Tablas 1, 2 y 3.



Tabla 1. Resultados del análisis de la entrevista a Alumna A según los cinco criterios de análisis.

Pregunta de entrevista	Ideas fundamentales de estocásticos	Otros conceptos matemáticos	Situación (en Laboratorio de Física)	Recursos para organizar y tratar los datos	Términos empleados
1. ¿Por qué integrantes del equipo obtuvieron el mismo valor?	Espacio muestra.	Dos mediciones de un segmento, paralelo, números reales, notación decimal.	Identificar y ordenar datos sobre la medida de una longitud al medir 16 veces con una regla y sin tratar de llevar una división de ésta sobre uno de los extremos del segmento dado.	Signos numéricos, lengua natural, tabla.	“Medición”, “153”, “153.5”, “cifras no tan disparadas”.

En la Tabla 1 se exponen los resultados del análisis de la primera pregunta, en entrevista, a *Alumna A*. La idea fundamental a la que apunta dicha cuestión es al *Espacio Muestra*, presentado en una tabla y referente al inventario completo sobre las mediciones repetidas de una misma longitud. Los recursos utilizados para organizar y tratar estos datos fueron signos numéricos, lengua natural y una tabla; Los términos empleados en la entrevista para referirse al espacio muestral fueron “medición”, “cifras no tan disparadas” y el valor numérico de las mediciones: 153 y 153.5. La reducida cantidad de elementos en el espacio muestra, obedece a una tendencia racionalizadora que supone regularidades y dependencias más allá de la evidencia proporcionada por la secuencia de eventos (Fischbein, 1995, pp. 61-62), en este caso, las mediciones. La Figura 4 muestra la construcción del triángulo epistemológico (Steinbring, 2005) para la mencionada idea fundamental.

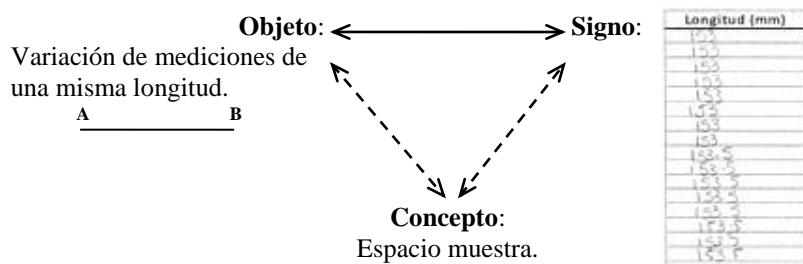


Figura 4. Diagrama para “espacio muestra” extraído de la entrevista a Alumna A.

La Tabla 2 presenta la caracterización de las respuestas de la *Alumna B* a la séptima pregunta en la entrevista.



Tabla 2. Resultados del análisis de la entrevista a Alumna B según los cinco criterios de análisis.

Pregunta de entrevista	Ideas fundamentales de estocásticos	Otros conceptos matemáticos	Situación (en Laboratorio de Física)	Recursos para organizar y tratar los datos	Términos empleados
7. ¿Cuáles son las variables en juego?	Espacio muestra y variable aleatoria.	Longitud, medida, operaciones aritméticas, números reales positivos.	Mediciones repetidas de una misma longitud.	Lengua natural, tabla, signos numéricos.	“Dos variables”, “dos datos diferentes”.

Frente a un fenómeno aleatorio con resultados numéricos, la pregunta se refiere a las ideas de *espacio muestra* y de *Variable Aleatoria*: Las mediciones de la longitud y la frecuencia de cada valor obtenido para la misma longitud, respectivamente. Sin embargo, la estudiante identifica más bien en el gráfico que proporciona “dos variables” y se refiere a “dos datos diferentes” sin una atribución declarada al azar haber obtenido medidas distintas ni a la frecuencia respectiva. El triángulo epistemológico sin consolidación en este caso se muestra en la Figura 5.

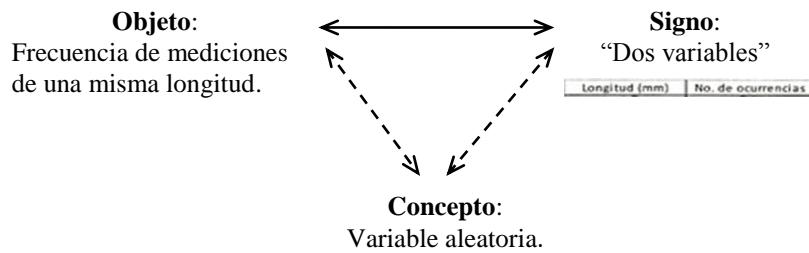


Figura 5. Diagrama para “variable aleatoria” extraído de la entrevista a Alumna B.

La Tabla 3 caracteriza las respuestas a la duodécima pregunta planteada en la entrevista a Alumno.

Tabla 3. Resultados del análisis de la entrevista a Alumno según los cinco criterios de análisis.

Pregunta de entrevista	Ideas fundamentales de estocásticos	Otros conceptos matemáticos	Situación (en Laboratorio de Física)	Recursos para organizar y tratar los datos	Términos empleados
12. ¿Existe el valor verdadero?	Variable aleatoria y ley de los grandes números.	Mediciones de longitud, número real positivo.	Determinar el valor verdadero de la medida de una longitud.	Lengua natural.	“El promedio de las mediciones”, “la media aritmética”.



La intuición de la *Ley de los Grandes Números*, revelada mediante las expresiones “el promedio de las mediciones” y “la media aritmética”, constata lo favorable del enfoque frecuencial al pensamiento probabilístico, como señaló Fischbein (1975): a medida que aumenta el número de mediciones se puede aproximar el valor *real* promediando éstas. No obstante, el estudiante no logra discriminar entre los resultados numéricos obtenidos con las mediciones, por un lado y, por el otro, la frecuencia de cada uno, por lo que no trasciende el nivel intuitivo en su aprehensión de la situación. En consecuencia, no se logra la constitución del concepto matemático en cuestión (véase la Figura 6).

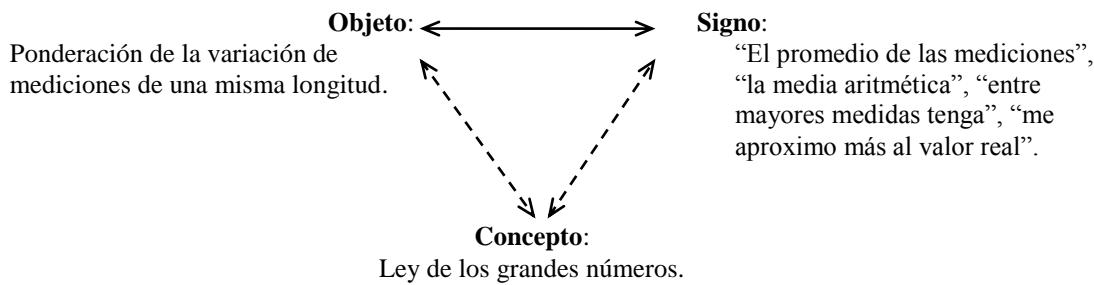


Figura 6. Diagrama para “ley de los grandes números” extraído de la entrevista a Alumno.

Las insuficiencias en habilidades matemáticas y en razonamiento abstracto por parte de los estudiantes universitarios causa que no entienden muchos de los conceptos estadísticos básicos que se estudian en este nivel académico (Ahlgren y Garfield, 1988). Se debería hacer corresponder las ideas señaladas por Heitele (1975) con el programa de estudios que propone el sistema de Institutos Tecnológicos.

## 5. CONCLUSIONES

Es notorio un desfasamiento de la enseñanza de contenidos de la asignatura de Cálculo Diferencial respecto a la de Estocásticos y se propone una mejor delimitación de los programas de ambas asignaturas de modo que se armonice la correspondencia en los temas de una con la otra. La adquisición de las ideas fundamentales de estocásticos en este nivel educativo se dificulta por su origen conceptual de naturaleza distinta a la definición de función de variable real. Debido a que se da mayor continuidad al desarrollo de los temas del Cálculo y no se alcanza a profundizar sobre la diferencia irreconciliable que guarda con la definición de probabilidad de un evento, el alumno tiende a remitirse inconscientemente a su bagaje determinista para explicar los conceptos probabilísticos y su propia experiencia escolar lo lleva a conducirse de esta forma en el contexto de las actividades que se le proponen como, en este estudio, en las propias del laboratorio de Estática y Dinámica. Por ejemplo, al inventariar los elementos de un espacio muestra, el alumno supone una regularidad en ellos debido a la repetición en las mediciones sin tomar en cuenta la independencia de éstas. No distingue la distribución que se forma al construir su respectivo histograma e infiere el valor verdadero, aproximado sí por un cálculo vinculado directamente con la ley de los grandes números, pero sin que sea manifiesto el reconocimiento de la intervención del azar en la situación de referencia.

## Agradecimientos

Esta investigación fue apoyada por el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología mediante el programa de becas. Agradecemos también al Instituto Tecnológico de Morelia, en particular al laboratorio de Física, el apoyo con los programas de estudio actualizados, los archivos de



instructivos de las prácticas incluidas en los apéndices y su disposición a que las instalaciones sirvieran como escenario para aplicar los cuestionarios y realizar las entrevistas semiestructuradas.

## 6. REFERENCIAS

- Ahlgren, A. and Garfield, J. (1988). Difficulties in Learning Basic Concepts in Probability and Statistics: Implications for Research. *Journal for Research in Mathematics Education*, 19(1), 44-63.
- Borovcnick, M.; Kapadia, R. (1991). *Chance Encounters: Probability in Education*. Kluwer Academic Publishers, pp. 135-167. Dordrecht, Netherlands.
- Eisner, E. (1998). *El ojo ilustrado. Indagación cualitativa y mejora de la práctica educativa*. Paidós educador, No. 125, pp. 92-103, España.
- Fischbein, E. (1975). *The Intuitive Sources of Probabilistic Thinking in Children*. Reidel Publishing Company. Dordrecht, Netherlands.
- Frawley, W. (1999). *Vygotsky y la ciencia cognitiva*. España: Paidós.
- Gigerenzer, G. (2008). *Decisiones instintivas*. España: Ariel.
- Heitele, D. (1975). An Epistemological View on Fundamental Stochastic Ideas. *Educational Studies in Mathematics*, 6(2), 187-205.
- Hogarth, R. M. (2002). *Educar la intuición. El desarrollo del sexto sentido*. Paidós. España.
- Ojeda, A. M. (2006). Estrategia para un perfil nuevo de docencia: Un ensayo en la enseñanza de estocásticos. *Matemática educativa, treinta años: Una mirada fugaz, una mirada externa y comprensiva, una mirada actual*. Santillana, pp. 195-214. Cinvestav del IPN. México.
- Pierce, R. (2013, Junio 8). "Math is Fun – Maths Resources". *Math Is Fun*. Recuperado el 20 de Agosto de 2013, de <http://www.mathsisfun.com/data/quincunx.html>
- SNEST (2010, Abril). Planes de Estudio Actualizados del SNEST. *Probabilidad y Estadística* (Claves: AEC-1053 y MAF-1019); *Estadística* (Clave: BQF-1007). Recuperado el 4 de Septiembre de 2013, de <http://itmmorelia.edu.mx/2012/Escolarizado.html>
- Steinbring, H. (1991). The Concept of Chance in Everyday Teaching: Aspects of a Social Epistemology of Mathematical Knowledge. *Educational Studies in Mathematics* 22, pp. 503-522.
- Steinbring, H. (2005). *The Construction of New Mathematical Knowledge in Classroom Interaction. An Epistemological Perspective*. USA: Springer.
- Stewart, J. (2001). *Cálculo de una variable: Trascendentes tempranas*. 4<sup>a</sup> edición. Thomson, Colombia.
- Torres, J. y Torres O. (2010). *Cálculo Diferencial*. México: Ñu Multiediciones.
- Walpole, R. y Myers, R. (1992). *Probabilidad y estadística*. Cuarta Edición. México: McGraw-Hill.
- Zazkis, R. & Hazzan, O. (1999). Interviewing in Mathematics Education Research: Choosing the Questions. *Journal of Mathematical Behavior*, 17(4), 429-439.