ANÁLISIS EPISTÉMICO Y COGNITIVO DE TAREAS EN LA FORMACIÓN DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

Mauro Rivas, Universidad de Los Andes, Venezuela
Juan D. Godino, Universidad de Granada, España
Patricia Konic, Universidad de Río Cuarto, Argentina

RESUMEN

En este trabajo proponemos una herramienta de análisis epistémico/cognitivo de tareas que contribuye al desarrollo de dos tipos de conocimiento matemático para la enseñanza: conocimiento especializado del contenido y conocimiento de los estudiantes. Aplicamos la herramienta al análisis de un problema de proporcionalidad y las soluciones dadas al mismo por un grupo de estudiantes de magisterio. Concluimos con la potencial utilidad de estos análisis para la formación de profesores.

ABSTRACT

In this research we propose a tool for the epistemic/cognitive analysis of tasks that contributes to developing two types of mathematical knowledge for teaching: specialized content knowledge and knowledge of students. We apply this tool to analyze a proportionality problem and the answers given by a group of prospective teachers. We conclude with the potential usefulness of this type of analysis in the training of teachers.

Rivas, M., Godino, J. D., Konic P. (2009). Análisis epistémico y cognitivo de tareas en la formación de profesores de matemáticas. En M.J. González, M.T. González & J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 453-462). Santander: SEIEM.

INTRODUCCIÓN

La presente investigación se inscribe en el campo de formación de profesores como una de las perspectivas de desarrollo de la educación matemática (Ponte, 2008). La importancia de la formación de profesores, en relación con la calidad de la enseñanza, es señalada por Adler, Ball, Krainer, Lin, y Novotna (2005): "… la calidad de la instrucción depende de los profesores, y para ello, su formación inicial y continua es crucial" (p. 360).

En este trabajo centramos la atención en la producción de dos tipos de conocimiento matemático para la enseñanza propuestos por Hill, Ball, y Schilling (2008), a saber: Conocimiento Especializado del Contenido (SCK) y Conocimiento del Contenido y de los Estudiantes (KCS). Se presenta la puesta en práctica de una herramienta de análisis epistémico/cognitivo[1], para facilitar el desarrollo de los tipos de conocimientos mencionados, en el ámbito de la formación de profesores; dicha herramienta se viene desarrollando por el Enfoque Onto-Semiótico (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2007).

En el marco del octavo simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM), Llinares (2004) refirió a algunos avances relativos a:

- el papel que desempeñan el diseño de determinados procesos formativos… y
- la explicitación de la relación entre la actividad práctica de formar profesores y la actividad de investigar centrada en aspectos relativos al profesor..." (Llinares, 2004, p. 2).

En este sentido, el diseño de herramientas destinadas a la puesta en práctica de procesos formativos, para mejorar la formación de profesores, es una tarea que reclama ser continuada. En esta dirección vienen trabajando diversos autores, como Llinares y Valls (2009), quienes investigan sobre el uso de videoclips en la formación de profesores.

La propuesta de Hill, Ball y Schilling (2008), de un marco teórico para el estudio del conocimiento matemático para enseñar, coloca a los formadores e investigadores ante el reto de concebir, diseñar y valorar actividades encaminadas a fomentar el desarrollo de esta forma de conocimiento. Desde esta perspectiva, el presente documento informa sobre la puesta en práctica de una herramienta, concebida y diseñada en el marco del EOS, con el objeto de fomentar tal desarrollo. Inicialmente se ha empleado la herramienta para explorar ese desarrollo a nivel del formador. Algunas experiencias exploratorias se han hecho a nivel de los profesores en formación; los resultados en este contexto están en proceso de estudio y serán objeto de otros trabajos.

MARCO TEÓRICO

Tipos de conocimiento matemático para enseñar

Hill, Ball y Schilling (2008), proponen seis tipos de conocimiento matemático para la enseñanza. Para efectos de este trabajo, son de particular interés dos de ellos, a saber: conocimiento especializado del contenido y conocimiento del contenido y de los estudiantes. A continuación presentamos algunos elementos caracterizadores de los mismos.

[1] Ejemplos del uso de esta herramienta pueden verse en Godino, Rivas, Castro y Konic (2008), y Castro y Godino (2008).

Conocimiento especializado del contenido (SCK): Refiere a la realización de un ordenamiento de la variedad de formas en que podrían organizarse los diferentes aspectos de un contenido matemático específico. Tales formas de organización refieren a los diferentes objetos vinculados a una noción matemática específica y determinada (Ma, 1999). Este tipo de acción que debe realizar el profesor, es posible que un sujeto adulto, o inclusive un matemático, no tenga necesariamente la competencia para llevarla a cabo (Hill, Schilling, y Ball, 2004).

Conocimiento del Contenido y de los Estudiantes (KCS): Es concebido como el conocimiento del contenido que se entrelaza con el conocimiento de cómo los estudiantes piensan, conciben, o aprenden este contenido particular. Incluye el conocimiento de los errores y dificultades más frecuentes, las concepciones erróneas, las estrategias utilizadas; el ser capaz de valorar la comprensión del alumno y saber cómo evoluciona su razonamiento matemático.

Herramientas del Enfoque Onto-Semiótico (EOS)

Desde la perspectiva del EOS se ha concebido y diseñado una herramienta de análisis epistémico/cognitivo. El análisis epistémico consiste en la identificación y puesta en correspondencia de objetos (elementos lingüísticos, conceptos, procedimientos, propiedades y argumentos) con los respectivos significados, en la resolución de un problema matemático. Dicha correspondencia facilita el reconocimiento de conflictos potenciales de significados, que pueden explicar los errores y dificultades usuales en la resolución de las tareas matemáticas. El análisis cognitivo consiste en el estudio de las respuestas dadas al problema por un grupo de futuros profesores, tomando en consideración los resultados del análisis epistémico.

METODOLOGÍA

Esta investigación sigue un diseño de tipo cualitativo interpretativo, en la que se estudia la puesta en práctica de una herramienta de análisis que comprende: un análisis epistémico de la resolución de un problema, la predicción de conflictos que podrían manifestarse durante su resolución, y el análisis de las respuestas dadas por un grupo de futuros profesores.

La situación considerada es un problema de mezclas, adaptado de Lamon (2007), conocido como el "problema de las limonadas".

La muestra es de 50 estudiantes de magisterio, agrupados de tres o cuatro estudiantes, conformándose un total de 13 equipos.

Situación problema:

> Juan prepara una limonada utilizando 3 cucharadas de azúcar y 12 cucharadas de concentrado de jugo de limón. Mientras María utiliza 5 cucharadas de azúcar y 20 cucharadas de concentrado de jugo de limón. ¿Cuál de las dos limonadas es más dulce, la de Juan o la de María, o tienen el mismo gusto?
>
> a) Resuelve el problema, explicitando todos los pasos
>
> b) Completar la tabla que se adjunta como anexo indicando los diversos objetos matemáticos que has puesto en juego en la resolución, así como el significado que se asigna a cada objeto. Se considera como objeto matemático los procedimientos específicos aplicados, las representaciones lingüísticas

(símbolos, gráficos, etc.), los conceptos, propiedades y argumentaciones que intervienen en la resolución.

Debido a las limitaciones de espacio en este documento centramos la atención en el apartado a). El apartado b) incluye una consigna cuyo objetivo es promover la reflexión del futuro profesor sobre la actividad matemática realizada al resolver el problema, por medio de una identificación inicial de algunos de los objetos y significados puestos en juego en la resolución del problema.

Análisis epistémico a priori

A partir del enunciado y una de las resoluciones posibles, se realizó el análisis a priori. Este consiste en identificar objetos y significados puestos en juego en esa resolución, y a partir de ellos la detección de conflictos potenciales. Dicho análisis se presenta en la Tabla 1. La resolución se presenta a continuación.

Resolución

> En el caso de Juan, la razón entre el número de cucharadas de limón al de azúcar es, 12 c. de limón por cada 3 c. de azúcar, o sea, 4 c. de limón por cada c. de azúcar. Esta razón, 4c. limón/1 c. azúcar, es una medida del "grado de acidez" de la limonada preparada por Juan.
> En el caso de María, por cada 20 c. de limón usa 5 c. de azúcar; luego la razón entre ambas cantidades es también de 4 c. de limón por cada cucharada de azúcar.
> Ambas razones son iguales, luego tienen el mismo "grado de acidez" (tendrán el mismo gusto, suponiendo que los productos sean del mismo tipo).
>
> Si la comparación multiplicativa se hace entre las cucharadas de azúcar respecto de las de concentrado de limón la razón entre las cantidades correspondientes será de 1 c. de azúcar por cada 4 c. de limón, razón que se puede considerar como la medida del "grado de dulzura" de la limonada. El valor numérico de la medida del "grado de dulzura" (1/4, o sea, 25%) es el mismo en ambas limonadas.

Tipos de objetos	Significados (relación de referencia o de uso)
ELEMENTOS LINGÜÍSTICOS (Términos y expresiones matemáticas: símbolos, representaciones gráficas)	
3 cucharadas azúcar	Cantidades de las magnitudes volumen de limón y de azúcar.
12 cucharadas limón	Medidas de las cantidades tomando una cucharada como unidad
5 cucharadas azúcar	
20 cucharadas limón	
¿Qué limonada es más dulce?	Razón de cantidades de volumen de limón y de azúcar Comparación de razones
"grado de dulzura/acidez"	Magnitudes intensivas (dulzura o acidez)
1 c. azúcar/ 4 c. limón	
4 c. limón/ 1 c. azúcar	Medida del grado de dulzura
¼, 25%	Medida del grado de acidez
	Valor numérico (racional) de las medidas del grado de dulzura

Conflictos potenciales:

a) Interpretar la cucharada como unidad imprecisa de medición de volumen.
b) Interpretar las mezclas (de Juan y María) como resultados de procesos diferentes y por tanto no comparables.

CONCEPTOS (Entidades matemáticas para las cuales se puede formular una definición más o menos formal)

Magnitudes extensivas	Magnitudes continuas (volumen) discretizadas (número de cucharadas)
Magnitudes intensivas	Grado de dulzura o acidez de la limonada
Valores numéricos de las medidas de magnitudes.	Números naturales, o racionales, que indican el número de cucharadas, o la razón entre cantidades.
Cantidades intensivas	Medidas de las magnitudes intensivas
Razón; razón unitaria	Relación multiplicativa entre cantidades de magnitudes extensivas (número de cucharadas de limón *por cada* cucharada de azúcar, …)
Fracción/ cociente	Cociente indicado entre dos números naturales

Conflictos potenciales:

a) La magnitud intensiva (grado de dulzura o acidez) es medida por un cociente indicado, cuyas magnitudes extensivas (azúcar, concentrado de limón) forman parte de una razón.
b) La razón unitaria como objeto que hace factible la comparación requerida.
c) Cociente indicado como valor numérico que mide la cantidad de mezcla.

PROCEDIMIENTOS (Técnicas, operaciones, algoritmos)

Comparación de fracciones	Dar respuesta al problema
División de dos números naturales	Hallar la razón unitaria

Conflictos potenciales:

a) Contracción de las cantidades de magnitudes dadas, que lleva a considerar únicamente su valor numérico, dejando de lado la referencia a las condiciones contextuales que la mezcla involucra.
b) Determinación de la equivalencia entre fracciones.
c) Adjetivación de los números obtenidos, a partir de la simplificación (división), proporcionándoles características indicadas por la mezcla.

PROPIEDADES (Enunciados para los cuales se requiere una demostración o prueba)

La covariación entre las mezclas es constante.	Permite comparar mezclas “diferentes”
P1: Las mezclas tienen el mismo sabor.	Es la respuesta al problema

Conflictos potenciales:

a) Mezclas “diferentes” son comparables
b) No encontrar P1.

ARGUMENTOS (Justificaciones, demostraciones o pruebas de las propiedades utilizadas)

Porque los grados de dulzura y acidez, medidos por las razones correspondientes, son los mismos en las dos limonadas.

Conflictos potenciales:

a) Razones unitarias iguales que no explican la dulzura o acidez de las limonadas.

Tabla 1. Análisis epistémico

RESULTADOS

Algunos resultados del análisis epistémico

A partir del análisis realizado se deducen algunos aspectos caracterizadores del conocimiento matemático requerido para resolver el problema de manera pertinente, a saber:

- Uso de cantidades de magnitud intensivas, cuya presencia es consustancial en los procesos de significación que son necesarios para resolver el problema. En adelante este aspecto será referido como “uso de cantidades intensivas”.
- Uso de un proceso de modelización número-magnitud[2], identificado en los procedimientos puestos en juego y en los conflictos potenciales que se derivan de los significados: “dar respuesta al problema” y “hallar la razón unitaria”.
- Uso de la secuencia razón-proporción-comparación que interviene en el conocimiento de la proporcionalidad y que es indispensable para la resolución del problema; se ha identificado en el objeto-argumentos.

Estas características son aspectos del *conocimiento especializado del contenido* sobre proporcionalidad, relevantes para la resolución del problema y que solo tienen interés para el (futuro) profesional de la docencia. El sujeto que realiza este tipo de análisis toma conciencia del papel que desempeñan los elementos lingüísticos, conceptos, procedimientos, propiedades y argumentos, puestos en juego en la resolución del problema, y que son esenciales para el logro del aprendizaje pretendido.

Se debe observar que los conflictos potenciales identificados se deducen a partir de las diferencias entre los significados pretendidos, propuestos para los diferentes objetos, y los que posiblemente manifiesten los estudiantes en la resolución. Tal identificación proporciona información previa relativa al *conocimiento del contenido y de los estudiantes*, pues indica posibles errores y dificultades que pueden manifestar los estudiantes al resolver el problema.

Análisis cognitivo

En general, los 13 equipos de estudiantes obtienen una respuesta correcta del problema. El análisis cognitivo de las respuestas, cuyos resultados se resumen en la Tabla 2, permitió identificar como categoría dominante de respuesta “la reducción a la unidad”, la cual ha sido identificada como el objeto conceptual “razón unitaria”. En el 92,3% de los equipos se observa el uso de esa categoría. No obstante, en tres de los equipos, la razón unitaria se reduce a obtener un cociente, sin referir de manera pertinente al uso de las cantidades intensivas respectivas.

La reducción a la unidad ha tenido lugar en dos estrategias de resolución o categorías de respuestas: “uso de la regla de tres” y “uso sólo de la división”. A la vez, dentro de estas categorías, se ha reconocido la subcategoría: uso o no-uso de cantidades intensivas.

[2] Refiere a considerar sólo el valor numérico de la cantidad intensiva, dejando de lado las unidades de medida, para realizar los cálculos requeridos, y luego devolver al número obtenido el carácter de cantidad de magnitud.

Categoría	Subcategoría	Frecuencias	%
Uso de la regla de tres (con reducción a la unidad)	Uso de cantidades intensivas	2	15,4
Uso sólo de la división (con reducción a la unidad)	Uso de cantidades intensivas	7	53,9
	No uso de cantidades intensivas	3	23,1
Total equipos que usan reducción a la unidad		12	92,3
Igualación de denominadores (no- reducción a la unidad)	Uso de cantidades intensivas	1	7,7
Total equipos que no usan reducción a la unidad		1	7,7
Total equipos que usan cantidades intensivas		10	76,9
Total equipos		13	100,0

Tabla 2. Categorías y subcategorías de respuestas identificadas en el análisis cognitivo

Tipos de resoluciones y su relación con aspectos identificados a priori

En relación con el aspecto "uso de cantidades intensivas" se observa que 10 de los 13 equipos (76,9%) hacen uso de cantidades intensivas y por tanto razonan proporcionalmente. Los tres equipos restantes (23,1%), manifiestan los conflictos potenciales a) y b), previamente identificados para el objeto conceptos, al hacer un uso inadecuado de las cantidades intensivas.

En la Figura 1 se presenta la manifestación de los conflictos potenciales identificados para el objeto procedimientos, que involucra el proceso de modelización número- magnitud. La resolución dada por el equipo, muestra poca pertinencia en relación con ese proceso.

Respecto al aspecto "uso de la secuencia razón-proporción-comparación" se observa en la Figura 1 un ejemplo de una respuesta en la que se muestra la ausencia de tal secuencia. La conclusión "…los gustos de la limonada es igual.", expresada por los estudiantes, proviene de haber obtenido un mismo número en las divisiones de los números de las cantidades de azúcar y limón de las dos mezclas, pero que no explican la dulzura o acidez de las mismas como el resultado de un razonamiento proporcional. En esta forma de respuesta se manifiesta el conflicto potencial identificado para el objeto argumentos: "Razones unitarias que explican la dulzura o acidez de las limonadas".

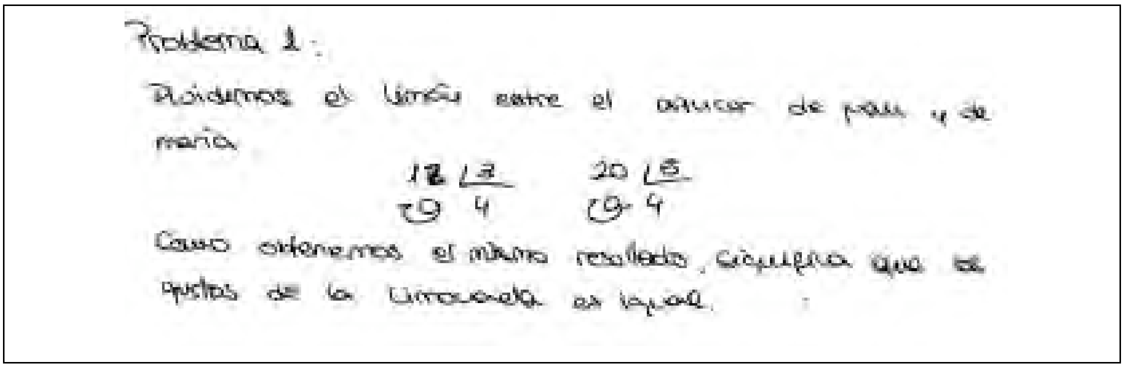

Figura 1: Ejemplo de respuesta dada por un equipo

Un último aspecto de interés, no comprendido en el análisis epistémico, es el uso de representaciones gráficas. Tres equipos muestran una representación gráfica con el fin de dar una explicación más completa de la resolución del problema. Dos de las representaciones exhibidas, indican comprensión del razonamiento proporcional (Figura 2). Este hecho valoriza el análisis cognitivo, ya que provee una perspectiva más completa sobre las posibles acciones a manifestarse.

Figura 2: Representaciones gráficas mostradas por dos equipos

CONCLUSIONES

Se observa, a partir de los objetos, significados y conflictos potenciales, identificados en el análisis epistémico/cognitivo, que tal actividad tiene relación con el desarrollo del conocimiento matemático para enseñar.

En efecto, la identificación de objetos y significados a partir del enunciado del problema y su resolución es una actividad en la que se desarrolla un *conocimiento especializado del contenido*: uso de cantidades intensivas, puesta en juego del proceso de modelización número-magnitud, y uso de la secuencia razón-proporción-comparación.

Los conocimientos matemáticos identificados no tienen interés para el matemático, ni para otro profesional que no esté involucrado en la problemática de la enseñanza y aprendizaje del contenido matemático. Debe notarse que no sólo se trata de identificar conceptos y procedimientos, como la tradición pedagógica sostiene, sino un reconocimiento profundo sobre aspectos del contenido matemático de interés didáctico.

La identificación de posibles conflictos de significado (diferencia entre los aspectos del conocimiento identificados a priori y las respuestas dadas por los estudiantes) es una actividad en la que se desarrolla el *conocimiento del contenido y de los estudiantes*; ya que permite tener una perspectiva más rica sobre las posibles respuestas de los estudiantes en una actividad matemática, y provee de una perspectiva sistémica y detallada que muestra dónde subyace y en qué consiste el conflicto que se manifiesta.

La información obtenida a partir del análisis epistémico/cognitivo se presenta como útil para la toma de decisiones relativas a la planificación de procesos de enseñanza, por lo que potencia el desarrollo del *conocimiento del contenido y la enseñanza*, propuesto también en el modelo de conocimiento matemático para enseñar de Hill, Ball y Schilling (2008).

Somos conscientes de que el tipo de análisis realizado en este trabajo no es una labor fácil, ya que requiere implementar procesos formativos específicos; precisamente la resolución y discusión con los estudiantes del apartado b) de la tarea analizada en este trabajo se orienta en esa dirección. Se trata de una tarea de reflexión meta-cognitiva (Jaworski, 2005) poco común, pero valiosa para lograr que los futuros profesores profundicen en el conocimiento matemático especializado para la enseñanza. Se trata de

"….hacer explícitos los conflictos y discutirlos con futuros profesores con el propósito de desarrollar una percepción profesionalmente relevante sobre las matemáticas académicas" (Moreira y David, 2007, p. 1).

Agradecimientos: Trabajo realizado en el marco del proyecto de investigación, SEJ2007-60110/EDUC. MEC-FEDER

BIBLIOGRAFÍA

Adler, J., Ball, D., Krainer, K., Lin, F-L., y Novotna, J. (2005). Reflections on an emerging field: researching mathematics teacher education. *Educational Studies in Mathematics, 60*, 359–381.

Castro, W. F., Godino, J. D. (2008). Evaluación del razonamiento algebraico elemental en futuros maestros: Un estudio exploratorio. En L. González (Coord.). *Investigación en Educación Matemática, XII Simposio de la SEIEM*. Badajoz: SEIEM.
Disponible en: http://www.seiem.es/publicaciones/actas.htm

Godino, J. D., Batanero, C., Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39* (1-2), 127-135.

Godino, J. D., Rivas, M., Castro, W. F., Konic, P. (2008). Epistemic and cognitive analysis of an arithmetic – algebraic problem solution. ICME 11, TSG 27: *Mathematical knowledge for teaching*.
Disponible en: http://tsg.icme11.org/document/get/391

Hill, H. C., Ball, D. L., Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education, 39*, 372-400.

Hill, H. C., Schilling, S. G., y Ball, D. L. (2004). Developing measures of teachers' mathematics knowledge for teaching. *The Elementary School Journal, 105*, 11-30.

Jaworski, B. (2005). Tools and tasks for learning and meta-learning. *Journal of Mathematics Teacher Education, 8*, 359-361.

Lamon, S. J. (2007). Rational numbers and proportional reasoning: Toward a theoretical framework for research. En F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (Vol. 1, pp. 629-667). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Llinares, S. (2004). Aprendizaje del profesor y estrategias de formación. Características de una agenda de investigación. En E. Castro, y E. De la Torre (Eds.). *Investigación en educación matemática, VIII Simposio de la SEIEM*. La Coruña: Universidad de la Coruña.
Disponible en: http://www.seiem.es/publicaciones/actas.htm

Llinares, S., y Valls, J. (2009). The building of pre-service primary teachers' knowledge of mathematics teaching: interaction and online video case studies. *Instructional Science, 37*, 247-271.

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Moreira, P., David, M. (2007). Academic mathematics and mathematical knowledge needed in school teaching practice: some conflicting elements. *Journal of Mathematics Teacher Education, 4*(3), 205-225.

Ponte, J. P. (2008). A investigação em educação matemática em Portugal. Realizações e perspectivas. En L. González (Coord.). *Investigación en Educación Matemática, XII Simposio de la SEIEM*. Badajoz: *SEIEM*.
Disponible en: http://www.seiem.es/publicaciones/actas.htm