LAS PRÁCTICAS SOCIALES EN LA RESIGNIFICACIÓN DE LAS CONDICIONES INICIALES EN LAS ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES

Erivan Velasco Núñez
erivel79@hotmail.com
CIMATE-UNACH
Superior

Resumen
Nuestra propuesta se basa en un estudio socioepistemológico de las condiciones iniciales en las ecuaciones diferenciales lineales a través de nuestra secuencia. En dicha secuencia, las prácticas sociales de modelación y de graficación, son el argumento que da cuenta de la resignificación de las condiciones iniciales en las ecuaciones diferenciales lineales. Teniendo en cuenta los significados, procedimientos y aspectos cognitivos situacionales que se construyen alrededor de las condiciones iniciales en las ecuaciones diferenciales cuando se presentan en el módulo para la materia de ecuaciones diferenciales de la carrera de Ingeniería Civil.

Palabras clave: *Socioepistemología, Ingeniería Didáctica, Número de Condiciones Iniciales en una ED, Significados Contextuales de una Condición Inicial*.

1. EL FENÓMENO DIDÁCTICO

Velasco (2007), nos señala que en los libros de texto de ecuaciones diferenciales de la matemática escolar, un problema de valores iniciales de orden n para una ecuación diferencial lineal se refiere a:

$$\text{Resolver:} \quad a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

$$\text{Sujeta a:} \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

Un problema de este tipo busca una función definida en algún intervalo I que contenga a x_0, y satisfaga la ecuación diferencial y las n condiciones iniciales especificadas para ese punto. De hecho, se espera que la función resultante sea única, como se indica en Zill (1997), siempre y cuando se cumplan las condiciones establecidas por el teorema de existencia y unicidad:

> Sean $a_n(x)$, $a_{n-1}(x), \dots, a_1(x), a_0(x)$ y $g(x)$ continuas en un intervalo I, y sea $a_n(x) \neq 0$ para toda x del intervalo. Si $x = x_0$ es cualquier punto del intervalo, existe una solución en dicho intervalo $y(x)$ del problema de valores iniciales representado por las ecuaciones $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{n-1}(x_0) = y_{n-1}$ que es única.

Si particularizamos para algunos valores de n, y con coeficientes iguales a uno, tenemos que, al abordar un problema de condición inicial para una ecuación de diferencial de primer orden, habrá una única condición que cumplir; para una ecuación de segundo orden, habrá dos condiciones iniciales, y así sucesivamente:

$y' + y = f(x)$	$y'' + y' + y = f(x)$	$y''' + y'' + y' + y = f(x)$
sujeta a $y(x_0) = y_0$	sujeta a $y(x_0) = y_0$ $y'(x_0) = y_1$	sujeta a $y(x_0) = y_0$ $y'(x_0) = y_1$ $y''(x_0) = y_2$

Según la estructura del enunciado al presentar este tipo de problema, se podría suponer, sin ningún otro tipo de cuestionamiento, que en cada uno de los casos anteriores hallaremos una única solución y que, proponer una, dos o tres condiciones iniciales al resolver ecuaciones diferenciales lineales depende del orden de la derivada en la ecuación diferencial lineal. Considerando esto, un significado que se construye cuando se presenta las condiciones iniciales en las E.D. en el módulo para la materia de ecuaciones diferenciales correspondiente al tercer semestre de la Facultad de Ingeniería Civil de la Universidad Autónoma de Chiapas.

2. LA SOCIOEPISTEMOLOGÍA

Buendía y Montiel (2011), nos comentan que la Socioepistemología se ha constituido como un enfoque teórico para entender y comprender, al seno de la Matemática Educativa, fenómenos específicos relacionados con la construcción y transmisión de conocimiento matemático. La especificidad de los fenómenos, objeto de estudio de este enfoque teórico, radica en un principio fundamental: *la problematización del saber matemático*. Esta problematización se reconoce al considerar a la matemática en juego como un actor de la unidad de análisis, cuestionando su estatus de saber institucional como aquello que "se debe aprender" y reconociendo sus *usos* en distintos escenarios (por ejemplo: el histórico, el profesional, el cotidiano e incluso el escolar cuando se experimentan diseños no-tradicionales).

Coincidiendo con Buendía y Montiel (2011), que nos comentan, con esta problematización nos proponemos identificar aquellos *significados* y procesos de *significación* que le son propios al saber y que se diluyen, se transforman o se pierden al configurar un discurso escolar, pero que lo caracterizan como un saber funcional en escenarios específicos**.** Coincidiendo también con Cordero (2006), que nos dice, bajo este enfoque, se propone entonces considerar esos significados como la construcción del conocimiento en la organización de lo humano, normada por las prácticas sociales en las que se ha involucrado y se involucra el humano al hacer matemáticas.

En el 2007, Velasco nos comentó que, una primera condición inicial correspondería a la posición en donde se encuentra un resorte en el momento de comenzar el trazo de la curva sobre el papel. Situándolo en un contexto gráfico si nos situamos en el punto de referencia que sirve como partida del movimiento y físico, si hablamos del movimiento de un resorte.

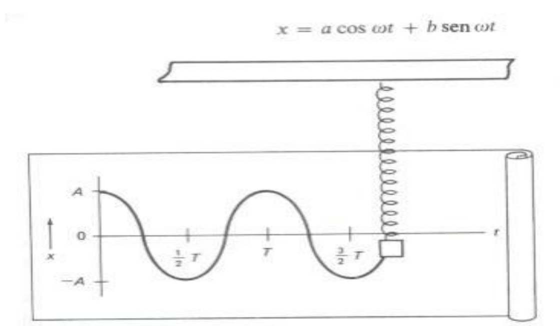


Figura 1

Y una segunda condición inicial que se refiera a la pendiente de la recta tangente para determinados puntos de dicha gráfica, claro está, que dicha gráfica aterrizada sobre un plano cartesiano. Teniendo un significado gráfico si hablamos de la recta tangente en un punto determinado, y de velocidad cuando se sitúa en un contexto físico.

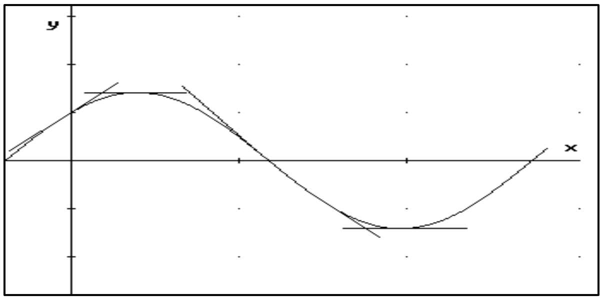


Figura 2

3. INGENIERÍA DIDÁCTICA

La ingeniería didáctica surgió en la didáctica de las matemáticas francesa, a principios de los años ochenta, como una metodología para las realizaciones tecnológicas de los hallazgos de la teoría de Situaciones Didácticas y de la Transposición Didáctica. El nombre surgió de la analogía con la actividad de un ingeniero quien, según Artigue (1996):

> Para realizar un proyecto determinado, se basa en los conocimientos científicos de su dominio y acepta someterse a un control de tipo científico. Sin embargo, al mismo tiempo, se encuentra obligado a trabajar con objetos mucho más complejos que los depurados por la ciencia y, por lo tanto, tiene que abordar prácticamente, con todos los medios disponibles, problemas de los que la ciencia no quiere o no puede hacerse cargo (p.33).

En realidad el término ingeniería didáctica se utiliza en didáctica de las matemáticas con una doble función: como metodología de investigación y como producciones de situaciones de enseñanza y aprendizaje, conforme mencionó Douady (1996, p. 241):

El proceso experimental de la ingeniería didáctica consta de cuatro fases:

¿Qué es la ingeniería didáctica?			
Primera fase Análisis preliminar	Segunda Fase Análisis a priori	Tercera Fase Fase experimental	Cuarta Fase Análisis a posteriori
Análisis preliminar del cuadro teórico didáctico general y sobre los conocimientos didácticos previos relacionados con las condiciones iniciales en las ecuaciones diferenciales lineales.	El objetivo del análisis *a priori* es determinar en qué las selecciones hechas permiten controlar comportamientos posteriores de los estudiantes y su significado con respecto a las condiciones iniciales en las ecuaciones diferenciales.	Es la fase de la realización de la ingeniería con una cierta población de estudiantes.	Esta fase se basa en el conjunto de datos recolectados a lo largo de la experimentación, es decir, las observaciones realizadas de las secuencias de enseñanza, al igual que las producciones de los estudiantes en el aula o fuera de ella.

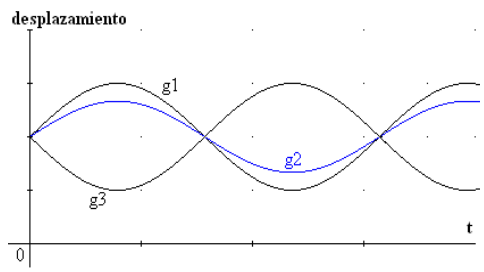
4. UNA SITUACIÓN DIDÁCTICA

En un trabajo (Velasco & Buendía, 2006; Velasco, 2007), nos presentan una situación didáctica que está estructurada de la siguiente manera, en donde se plantea que la práctica social de graficación y de modelación mueva los significados de las condiciones iniciales de las ecuaciones diferenciales en el contexto físico, analítico y gráfico, que traduce al movimiento del resorte y del enfriamiento del silicón:

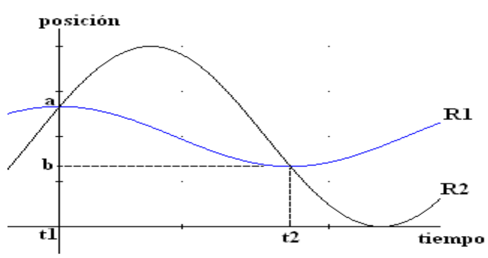
Actividad 1

1.- Con ayuda de un sensor de movimiento describa el movimiento de un resorte.

2.- Observe la gráfica que a continuación se muestra. En ella se representa el movimiento de un resorte en tres ocasiones distintas. Simule la situación con ayuda del sensor y describa qué está ocurriendo.



3.- Las siguientes gráficas muestran un intervalo de tiempo del comportamiento de 2 resortes (R1 y R2), ambos con la misma constante de rigidez "k" cuando se les sujeta una misma masa "m" a cada uno.



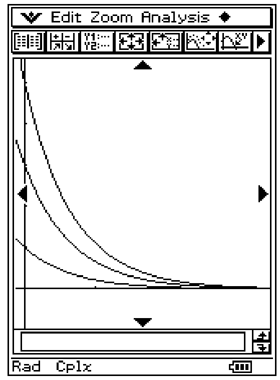
a) ¿Cuál es el resorte que en el tiempo $\mathbf{t_1}$ está en la posición "**a**" y en el tiempo $\mathbf{t_2}$ está en la posición "**b**"? ¿Cómo podrías distinguir entre el resorte 1 y el resorte 2?

b) En los tiempos $\mathbf{t_1}$ y $\mathbf{t_2}$ ¿Cuál es la velocidad del resorte? ¿Cómo podrías distinguir entre el resorte 1 y el resorte 2?

Actividad 2

1.- Con ayuda de un sensor de temperatura describa el enfriamiento del silicón.

2.- Describa y simule la siguiente situación acerca del fenómeno del enfriamiento



Actividad 3

Parte 1

a) Resuelva la ecuación diferencial *y*’ + *y* = 0. ¿Cuál es la solución particular que satisface *y*(0) = 1?

b) Grafique varios miembros de la familia de funciones solución ($y = ce^{-x}$) de la ecuación diferencial anterior y halle la solución particular que satisface *y*(0) = 1.

c) ¿Qué significado tiene esta condición inicial en un contexto físico, por ejemplo, en la modelación del enfriamiento?

d) ¿Qué significado tiene *y*’(0) = *b* (*b* cualquier constante) en la solución de la ecuación diferencial *y*’ + *y* = 0?

e) Para seleccionar una curva en los casos anteriores, ¿qué información se requiere?

Parte 2

a) Resuelva la ecuación diferencial *y*’’ + *y* = 0. ¿Cuál es la solución particular que satisface *y*(0) = 1?

b) Grafique varios miembros de la familia de funciones solución ($y = c_1$ sen x + c_2 cos x). y halle la solución particular que satisface que *y*(0)=1.

c) El movimiento de un resorte puede ser modelado por medio de una ecuación de segundo orden. ¿Qué significado tiene la condición *y*(0)=1en la solución?

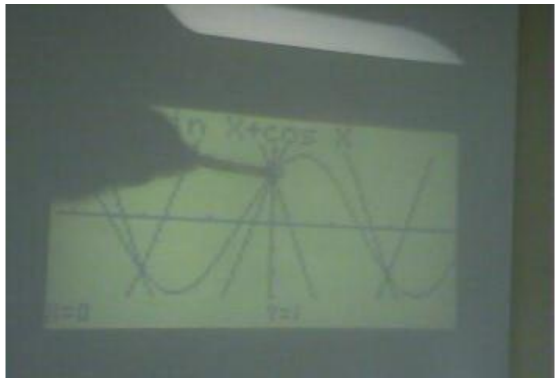
d) ¿Qué significado tiene una condición del tipo *y*’(0) = *b* (*b* cualquier constante) en la solución de la ecuación diferencial *y*’’ + *y* = 0?

e) Para seleccionar una curva de la familia, ¿qué información se requiere?

5. ALGUNOS RESULTADOS

Se realizaron dos puestas en escena con grupos de posgrado. En el segundo grupo fueron un total de seis estudiantes. Sus nombres son Gutemberg.- Ingeniero Civil, Edgar.- Ingeniero Electrónico, Ángel.- Licenciado en Ciencias de la Educación, Horacio.- Ingeniero Eléctrico, Mauro.- Licenciado en Informática, Adriana.- Licenciado en Ciencias de la Educación.

De los comentarios por parte de los estudiantes, en el inciso e) de la parte 2 de la Actividad 3, observamos que ellos visualizaron a la primera derivada como la velocidad en el contexto físico, indicando que para las curvas mostradas en la gráfica habría una velocidad diferente para cada una de las curvas.



Inciso e) *Para seleccionar una curva de la familia, ¿qué información se requiere?*

Entrevistador: ***para seleccionar una curva de la familia, aquí tenemos tres, pero pueden haber mucho más, ¿Qué información se requiere?***

Horacio: ***en este caso si se necesitan las condiciones iniciales y el valor de la pendiente***

Entrevistador: *un valor referido a la pendiente y el otro valor referido…*

Horacio: *de las condiciones iniciales*

Entrevistador: *Es que cuando tú dices de las condiciones iniciales también puede ser el de la pendiente, se más específico, por favor. Un valor de las condiciones iniciales referida a que.*

Gutemberg: *desplazamiento*

Entrevistador: *desplazamiento-tiempo*

Horacio: *bueno, sí*

Entrevistador: *y otra condición*

Gutemberg: ***de la pendiente***

Horacio: ***de la velocidad***

Entrevistador: ***de la velocidad, lo que equivaldría a tener la pendiente si fuera curva o velocidad se fuera resorte. De hecho se les conoce como condiciones iniciales. ¿Aquí son necesarias una, la otra o las dos?***

Adriana: ***las dos***

Ángel*:* ***las dos***

Entrevistador: *¿Por qué?*

Ángel: ***porque si tenemos solo el sitio, que sería el punto, pues no sabríamos a qué velocidad se está moviendo, no podríamos saber si no tenemos el otro dato.***

Entrevistador: *aja, si tuvieras el otro dato y no tuvieras el primero*

Ángel: ***pues no sabría por dónde pasar, se puede ir a donde quiera, porque no nos están dando la posición.***

6. CONCLUSIÓN

Existe un privilegio del contexto analítico en la enseñanza de las condiciones iniciales en las ecuaciones diferenciales, como se puede observar en el apartado de fenómeno didáctico. El contexto analítico se privilegia de tal manera, que otros dos contextos, como lo son el contexto físico y el gráfico, prácticamente no son mencionados, y cuando se les menciona suele ser de manera implícita. El proponer un conocimiento articulado de las condiciones iniciales en las ecuaciones diferenciales proveniente de diferentes contextos, ha sido la propuesta que ha seguido este trabajo de investigación, lo cual ha resignificado a las Condiciones Iniciales en la ED.

Ya que al tratar de construir las gráficas que se plantean en la secuencia, los estudiantes se ven en la necesidad de partir de una referencia (primera condición inicial) para identificar una única solución, y al modelar los distintos comportamientos, los estudiantes, imprimen mayor velocidad al resorte o comparan distintas curvas con distintas velocidades de enfriamiento (segunda condición inicial), para identificar una única solución.

Resignifican las condiciones iniciales en las ecuaciones diferenciales lineales, ya que al finalizar toda la discusión los estudiantes tienen un conocimiento articulado y robusto acerca de las condiciones iniciales provenientes de los tres distintos contextos. Esto da la pauta a comentar por parte de ellos que para una ecuación diferencial lineal de segundo orden, una condición inicial no es suficiente para elegir una única solución, aunque se puede trabajar con sólo una de ellas, es necesaria la segunda para elegir una única solución para la ecuación diferencial lineal de segundo orden y no quedarse con el significado de que, proponer una, dos o tres condiciones iniciales al resolver ecuaciones diferenciales lineales depende del orden de la derivada en la ecuación diferencial lineal.

7. REFERENCIAS

Artigue, M. Douady R. (1996). *Ingeniería didáctica en educación matemática*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Buendía, G. y Montiel, G. (2011). *Propuesta metodológica para la investigación socioepistemológica*. En L. Sosa, R. Rodríguez y E. Aparicio (Eds.), *Memoria de la XIV Escuela de Invierno en Matemática Educativa*. México: Red de Centros de Investigación en Matemática Educativa A.C.

Cordero, F. (2006). *El uso de las gráficas en el discurso del cálculo escolar. Una visión socioepistemológica*. En Cantoral, R. Covián, O., Farfán, R., Lezama, J., Romo, A. (Eds.) Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Un reporte latinoamericano, (pp. 265-286). México, D.F.: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa y Díaz de Santos.

Cordero, F. & Flores, R. (2007). Recuperado el 13 de mayo del 2013 de: http://www.matedu.cicata.ipn.mx/archivos/Montiel&Buendia(2012)-EIME14-.pdf

Velasco, E. y Buendía, G. (2006) *Las condiciones iniciales y su relación con el orden de las ecuaciones diferenciales lineales*. En la tecnología en el Aula de Matemáticas: Prácticas de Laboratorio y Medios Virtuales. México: Cimate- Facultad de Ingeniería Civil, UNACH.

Velasco E. (2007). *Las prácticas sociales en la resignificación de las condiciones iniciales en las ecuaciones diferenciales lineales*. Tesis de maestría no publicada. Universidad autónoma de Chiapas.

Zill, D. (1997). *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado*. Sexta edición. México: Thomson.