



## APRENDIZAJE DEL CONCEPTO DE POLINOMIO EN EL NIVEL MEDIO SUPERIOR: UNA PROPUESTA DESDE LA TEORÍA APOE

Mariana Villanueva Guerrero, Ofelia Montelongo Aguilar, Darly Alina Kú Euán  
guemar@live.com.mx, omontelo@mate.reduaz.mx, ku.darly@gmail.com  
Colegio de Bachilleres del Estado de Zacatecas Plantel Genaro Codina Extensión Perales,  
Universidad Autónoma de Zacatecas  
Medio Superior

### Resumen

Este trabajo tiene como propósito fundamental realizar un estudio de las construcciones y mecanismos mentales que los estudiantes requieren en el aprendizaje del concepto de polinomios. Para ello utilizaremos como marco teórico la teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto, Esquema). La cual propone un ciclo de investigación que consta de tres fases, en la primera se elaborará un análisis teórico que dará como resultado una descomposición genética inicial, en la segunda se diseñarán y aplicarán un cuestionario y una entrevista para conocer las construcciones mentales de los estudiante, finalmente, se realizará el análisis de los datos obtenidos de la aplicación de los instrumentos y el cual será guiado por la descomposición genética.

**Palabras clave:** *Construcciones mentales, Polinomio, APOE, Ciclo de investigación.*

### 1. INTRODUCCIÓN

La Dirección General de Bachillerato (DGB) preocupada por mejorar el rendimiento académico de los estudiantes, ha incorporado en su programa de estudios los principios básicos que propone la Reforma Integral de la Educación Media Superior (RIEMS). Cuyo propósito es fortalecer y consolidar la identidad de este nivel, promoviendo el enfoque educativo basado en el desarrollo de competencias.

De acuerdo con, nuestro interés recae en el programa de estudios de la asignatura Matemáticas I, en la cual se pretende que el estudiante desarrolle el pensamiento lógico y crítico, mediante procesos de razonamiento, argumentación y estructuración de ideas que puedan ser aplicados en la resolución de problemas matemáticos que trasciendan al aula de clase.

Asimismo, esta asignatura está orientada al aprendizaje del Álgebra, y es en ésta que surgen dificultades con respecto a su comprensión, como lo menciona Brihuega (1997):

Uno de los problemas que en general, se presentan en la enseñanza de las matemáticas en todos los niveles educativos es el relativo al aprendizaje del lenguaje algebraico. Es su propia cualidad de lenguaje la que proporciona una de las mayores dificultades debido fundamentalmente a su grado de abstracción, la utilización de símbolos para representarlos, sus características sintácticas, convenios de notación, signos de operación, utilización de paréntesis, sentido y uso de las letras, etc. Sus reglas de utilización, sus diferencias con el lenguaje aritmético, entre otros (p. 18).

Por otra parte, Socas, Camacho y Hernández (1998) resaltan la importancia del Álgebra, en relación con las dificultades que han surgido respecto a su aprendizaje.

El álgebra escolar es considerada como una de las partes de la matemática que influye considerablemente en el aspecto formativo por la potencia y simplicidad de sus



registros formales y sus métodos, pero su aprendizaje genera muchas dificultades a los alumnos y esas dificultades son de naturaleza diferente, y tiene que ver con la complejidad de los objetos del álgebra, con los procesos de pensamiento algebraico, con el desarrollo cognitivo de los alumnos, con los métodos de enseñanza y con actitudes afectivas y emocionales hacia el álgebra (p. 9).

De acuerdo con los trabajos mencionados, se puede concluir que parte de las dificultades en el aprendizaje del Álgebra recaen en cierta forma por el grado de abstracción que requieren los estudiantes. Acorde a ello y dado que el Álgebra abarca una gran cantidad de conceptos sería difícil (si no imposible) tratar de abarcarla en su totalidad, es por ello que nos enfocaremos en el aprendizaje del concepto de polinomio. Debido a que es un concepto que involucra algunas de las dificultades en la comprensión del Álgebra, por ejemplo: la simplificación de términos semejantes, su relación con otros conceptos matemáticos, entre otros.

Con base a ello, en este trabajo de investigación nos proponemos estudiar la comprensión del concepto polinomio, con el propósito de presentar un modelo cognitivo viable de construcciones y mecanismos mentales que el estudiante de bachillerato puede desarrollar para la comprensión de éste. Acorde a ello se desprende la siguiente pregunta de investigación: ¿Cuáles son las construcciones y mecanismos mentales, que requiere un estudiante de bachillerato, para aprender el concepto de polinomio?

De allí se desprende el siguiente objetivo general: Caracterizar las construcciones y mecanismos mentales que requiere el estudiante de bachillerato para el aprendizaje del concepto polinomio.

Los objetivos específicos que ayudarán a llevar a cabo el objetivo general y responder a la pregunta de investigación, son los siguientes:

1. Elaborar una descomposición genética hipotética del concepto de polinomio.
2. Diseñar y aplicar un cuestionario y una entrevista, para determinar las construcciones mentales que realizan los estudiantes al tratar de aprender el concepto de polinomio.
3. Analizar los resultados de las entrevistas y el cuestionario, a partir de la descomposición genética inicial.
4. Realizar sugerencias didácticas que permitan mejorar el aprendizaje del concepto de polinomio.

Finalmente, a la luz de los resultados obtenidos en la investigación, nos interesa ofrecer un modelo cognitivo que pueda ser utilizado en el diseño de clases sobre el concepto de polinomio en bachillerato, y por otra parte realizar sugerencias didácticas que puedan servir a mejorar el aprendizaje del concepto polinomio.

## 2. MARCO TEÓRICO

Para este trabajo de investigación hemos empleado como sustento teórico a la teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto y Esquema). Ésta fue en un principio desarrollada por Dubinsky y posteriormente por el Grupo de Investigación RUMEC (*Research in Undergraduate Mathematics Education Community*), quienes mencionan en relación al conocimiento matemático que:

El conocimiento matemático de un individuo es su “tendencia” a responder a las situaciones matemáticas problemáticas en un contexto social, construyendo acciones, procesos y objetos y organizándoles en esquemas con el fin de manejar las situaciones y resolver los problemas (Dubinsky & MaDonald, 2001, p.276).

El concepto “tendencia” se refiere a la capacidad del individuo de relacionar las construcciones mentales así como las interconexiones que un individuo utiliza para entender un concepto, y la forma en que un individuo usa (o no usa) éstas en situaciones problemáticas.

La teoría APOE proporciona un ciclo de investigación compuesto por tres componentes: análisis teórico, diseño y aplicación de instrumentos y el análisis y verificación de datos. La doble flecha (Figura 1) indica que el análisis y verificación de datos permite refinar el análisis teórico para describir con mayor precisión lo que se observa que hacen los estudiantes al aprender el concepto en estudio.

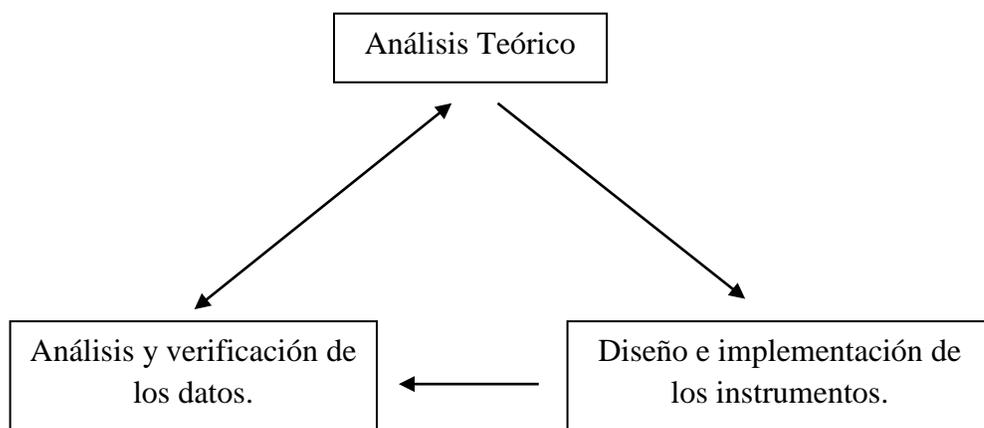


Figura 1. Componentes del paradigma asociado a la teoría APOE modificado (Asiala *et al.*, 1996; p.5)

Cuando se usa esta teoría, el investigador primero realiza un análisis teórico del concepto de estudio donde se tiene en cuenta el análisis de libros de texto y la experiencia de los investigadores para determinar un camino viable para la construcción de un concepto. Este análisis permite mediante la descripción de las construcciones mentales, modelar la epistemología y cognición del concepto matemático estudiado. Asiala, Brown, Dubinsky, Mathews & Thomas (1996) plantean dos preguntas que deben guiar el trabajo en esta componente: ¿Qué significa comprender un concepto matemático? y ¿cómo esa comprensión puede ser alcanzada por un individuo? Desde esta perspectiva el objetivo principal del análisis teórico es definir una descomposición genética del concepto que determine un camino viable para que los estudiantes construyan un concepto determinado, mediante la descripción explícita de las construcciones y los mecanismos mentales por los cuales puede acceder a la construcción adecuada de un concepto.

Las relaciones entre las construcciones y mecanismos mentales que se describen en la descomposición genética, se muestran en la Figura 2:

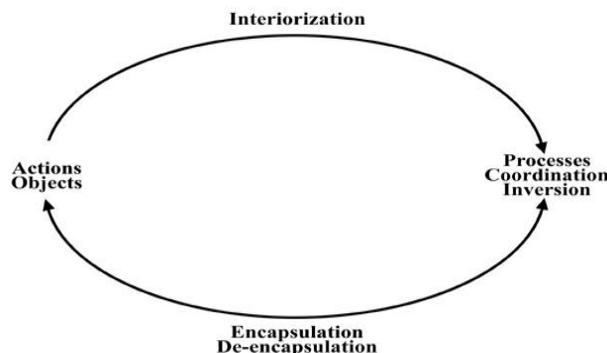


Figura 2. Construcciones y Mecanismos Mentales (Dubinsky, 1991).

A continuación describiremos las construcciones mentales que menciona la teoría APOE:

Una **acción** es una transformación de los objetos que es percibida por el individuo como algo externo. La transformación es llevada a cabo por reacción a una indicación externa que da instrucciones sobre los pasos a seguir (Asiala *et al.*, 1996). Un individuo tiene una concepción acción de una transformación dada, si su profundidad de comprensión está limitada a realizar acciones para llevar a cabo esa transformación.

Cuando una acción es repetida, y el individuo reflexiona sobre ella, puede ser interiorizada en un **proceso**. Es decir, un individuo realiza una construcción interna que hace lo mismo que la acción, pero ahora no necesariamente dirigida por un estímulo externo (Asiala *et al.*, 1996). Un individuo que ha construido un proceso puede describirlo, o igualmente invertir los pasos del proceso sin hacer los mismos. Un individuo tiene una concepción proceso de una transformación dada, si su profundidad de comprensión está limitada a pensar sobre la transformación como un proceso.

Cuando un individuo reflexiona sobre las acciones aplicadas a un proceso particular, llega a ser consciente del proceso como una totalidad, se da cuenta que la transformación (que pueden ser acciones o procesos) puede actuar sobre él, y es capaz de construir tal transformación, entonces está pensando en un proceso como un **objeto**. En este caso se dice que el proceso ha sido encapsulado en un objeto (Asiala *et al.*, 1996). Un objeto se puede desencapsular en el proceso del cual proviene para trabajar con dicho proceso cuando sea necesario.

Cabe mencionar que no existe una única descomposición genética de un concepto, ya que éstas dependen de los caminos de construcción del concepto y las estructuras definidas en los estudiantes (Trigueros, 2005). Cada descomposición genética debe ser el resultado de la aplicación completa de las tres componentes de este ciclo de investigación lo que permite documentarla con los datos empíricos y refinarla; si una descomposición genética pasa por este ciclo en varias ocasiones tal vez tendremos una mucho más elaborada que pueda abordar con más detalle y profundidad la construcción de un concepto determinado.

*Diseño y aplicación de instrumentos:* Una vez elaborada la descomposición genética preliminar es necesario documentarla, es decir, tener alguna certeza de la viabilidad del camino señalado en ella. Para esto es necesario diseñar y aplicar instrumentos que permitan identificar las construcciones mencionadas en la descomposición genética y aquellas que no se hayan incluido pero que persistan en los procedimientos de los estudiantes. Estos diseños construidos con base en la descomposición genética deben reflejar las construcciones expuestas en ella y los mecanismos de construcción mediante los cuales los estudiantes pueden realizar dichos conceptos.

Por último se encuentra la tercera componente del ciclo de investigación *Análisis y verificación de datos*: Esta componente lleva al análisis de los datos empíricos obtenidos en la componente anterior. Los resultados obtenidos con la aplicación de los instrumentos deben ser analizados desde la descomposición genética preliminar detectando qué elementos no han sido considerados o cuáles de las construcciones dadas hipotéticamente no se perciben. Esto lleva a una reformulación de la descomposición genética y a la determinación de una versión refinada de la descomposición genética.

### 3. METODOLOGÍA

En nuestra investigación utilizaremos una metodología cualitativa para estudiar las diferentes maneras en las que los estudiantes construyen el concepto polinomio como objeto matemático. A continuación detallamos lo que conforma nuestra metodología.

Con el objetivo de probar la viabilidad del modelo cognitivo preliminar que desarrollaremos del concepto polinomio, elaboraremos un cuestionario y una entrevista basado en el modelo cognitivo preliminar, que será aplicado a un pequeño grupo de estudiantes de primer semestre del Colegio de Bachilleres del Estado de Zacatecas, Plantel Genaro Codina, Extensión Perales. Cada entrevista será grabada con una cámara de video, después se hará la transcripción usando un formato que permitirá sintetizar la información, posteriormente se pretenden realizar un análisis de las respuestas que den los estudiantes. Y por último, rediseñaremos el modelo cognitivo preliminar, para presentar una camino viable que se asemeje a las construcciones y mecanismos mentales que realizan los estudiantes al aprender el concepto polinomio.

### 4. CONCLUSIONES Y PROSPECTIVAS

A manera de conclusión podemos mencionar que el trabajo de investigación que presentamos se encuentra en su etapa inicial. Nos hemos dedicado a elaborar los antecedentes los cuales nos permiten ver que son pocas las investigaciones referidas a polinomios. Y por otro lado, la teoría APOE se ha enfocado principalmente a realizar estudios en Álgebra lineal, álgebra abstracta y cálculo diferencial e integral, temas que se abordan en el nivel superior, habiendo pocos estudios enfocados a nivel medio superior como el de triángulos semejantes y fracciones. A la par, estamos desarrollando el análisis teórico del concepto polinomio, el cual es utilizado para el aprendizaje de reducción y simplificación de términos semejantes en Álgebra, también consideramos que es importante realizar investigaciones con respecto a estos temas, que intenten aminorar las dificultades con respecto al álgebra. Y por otra parte, desarrollar actividades de aprendizaje de estos temas que estén basados en el modelo cognitivo que desarrollaremos.

### 5. REFERENCIAS

- Asiala, M., Brown, A., Devries, D.J., Dubinsky, E., Mathews, D. & Thomas, K. (1996). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. In J. Kaput, A.H. Schoenfeld & E. Dubinsky (Eds.), *Research in collegiate mathematics education*, 2, 1-32. Providence, RI: American Mathematical Society.
- Brihuega, J. (1997). Las matemáticas del bachillerato. *SUMA*, 25, 113-122.
- Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in Advanced Mathematical Thinking. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 95-123). Dordrecht: Kluwer.



- Dubinsky, E. y McDonald, M. (2001). APOS: A Constructivist Theory of Learning in Undergraduate Mathematics Education Research. En Holton, D. (Eds.). *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study*, 7, 273-280. Kluwer Academic Publishers.
- Socas, M., Camacho, M. y Hernández, J. (1998). Análisis Didáctico del Lenguaje Algebraico en la Enseñanza Secundaria. *Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado*, 32, 73-86.
- Trigueros, M. (2005). La Noción de Esquema en la Investigación en Matemática Educativa a Nivel Superior. *Educación Matemática*, 17(001), 5-31.