

# ESTUDIO DE UN CASO SOBRE EL CONOCIMIENTO QUE PONE EN ACCIÓN EL PROFESOR DE MATEMÁTICAS EN LA PLANIFICACIÓN DEL CONCEPTO DE LÍMITE AL INFINITO DE UNA FUNCIÓN

Rafael Couoh-Noh, Guadalupe Cabañas-Sánchez, Salvador Llinares, Julia Valls

rcouoh@uagro.mx, gcabanas@uagro.mx, sllinares@ua.es, julia.valls@ua.es

Universidad Autónoma de Guerrero, Universidad de Alicante

Reporte de investigación

Profesionalización docente en matemáticas

Educación continua

## RESUMEN

Se presentan los resultados de un estudio que se interesó por determinar el conocimiento que pone en acción el profesor de matemáticas en la planificación del concepto de límite al infinito de una función. La investigación se sustenta en el modelo *Conocimiento matemático para la Enseñanza* (MKT) de Ball, Thames y Phelps (2008). En el estudio participó un profesor de matemáticas de secundaria de España, que denominamos PEB. Los datos se obtuvieron a partir de una entrevista semiestructurada que versó sobre los aspectos siguientes: datos personales del participante, el aula de clases, la planificación del profesor sobre el tópico de límite al infinito de una función y su justificación y del investigador respecto al mismo concepto. Los resultados evidencian que el PEB pone en acción los seis subdominios del MKT en la planificación del tópico de interés.

**PALABRAS CLAVE:** Límite al infinito, profesor de matemáticas, planificación, instrumentos, conocimiento matemático para la enseñanza.

## INTRODUCCIÓN

El profesor de matemáticas, como actor central del proceso de enseñanza, determina en gran medida el aprendizaje de los estudiantes con base en las tareas que propone. Asimismo, como representante institucional, interpreta el currículum, lo pone en funcionamiento y encara dificultades tanto sobre los procesos de reforma como con el contenido y métodos de enseñanza entre otros aspectos (Cabañas-Sánchez, 2011). Interesados por contribuir a la mejora de los procesos de enseñanza y aprendizaje del Cálculo Diferencial, desarrollamos un estudio con un profesor de matemáticas de secundaria de España (PEB), cuyo objetivo fue “*determinar las características del conocimiento que pone en acción el profesor de matemáticas en la planificación del concepto de límite al infinito de una función*”.

El análisis del conocimiento profesional del profesor, desde una perspectiva cognitiva, supone determinar aspectos de la gestión del proceso de enseñanza-aprendizaje y ver al profesor como un profesional que construye su conocimiento a través de la reflexión y justificación sobre la acción (Llinares, 2000). Por ello, nos planteamos la pregunta de investigación siguiente: *¿Qué instrumentos considera el profesor de matemáticas en la planificación del concepto de límite al infinito de una función para su enseñanza y cómo justifica su uso?*

Desde nuestra perspectiva, este estudio es relevante y pertinente para y en los programas de formación de profesores de matemáticas y actualización docente, dado que se identifican las características del conocimiento que pone en acción el profesor de matemáticas en la planificación del concepto de límite al infinito de una función para su enseñanza.

En el siguiente apartado describimos el modelo Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MKT) propuesto por Ball, Thames y Phelps (2008) que sustenta nuestra investigación y asumimos una postura respecto a la planificación y los instrumentos.

## MARCO TEÓRICO

### *Conocimiento matemático para la enseñanza (Mathematical Knowledge for Teaching, MKT)*

Con base en el trabajo de Shulman (1986), Ball et al (2008) proponen seis subdominios del modelo del MKT (ver figura 1). Este modelo representa la unión del conocimiento del contenido y el conocimiento didáctico del contenido, necesario para llevar a cabo el trabajo de enseñanza de las matemáticas. Involucra las tareas implicadas en la enseñanza y sus exigencias, una comprensión de los contenidos del currículo escolar, la planificación de las lecciones y la evaluación de los estudiantes. El MKT ofrece la respuesta más prometedora a la antigua pregunta de qué tipo de conocimiento de los contenidos se necesita para enseñar bien las matemáticas (Morris, Hiebert y Spitzer, 2009).



**Figura 1. Dominios y subdominios del MKT. (Ball et al., 2008)**

Los subdominios Conocimiento común del contenido (CCK), Conocimiento del horizonte matemático (HCK) y Conocimiento especializado del contenido (SCK) pertenecen al dominio *Conocimiento del contenido*, y los tres restantes, Conocimiento de los contenidos y los estudiantes (KCS), Conocimiento de los contenidos y la enseñanza (KCT) y Conocimiento de los contenidos y el currículo (KCC) corresponden al *conocimiento didáctico del contenido*. Enseguida se describen brevemente los subdominios del modelo.

## 9. Profesionalización docente en matemáticas

- *El conocimiento común del contenido (CCK)*. Refiere a los conocimientos matemáticos y las técnicas utilizadas en una amplia variedad de entornos que no es exclusiva de la enseñanza.
- *El conocimiento especializado del contenido (SCK)*. Involucra los conocimientos matemáticos y las habilidades únicas para la enseñanza, considerados como innecesarios en otros ámbitos. Las actividades del profesor exigen una única comprensión y razonamiento matemático, así como la habilidad para desempaquetar los conocimientos matemáticos con el fin de hacer visibles, a los estudiantes, determinados aspectos del mismo.
- *El conocimiento del horizonte matemático (HCK)*. Refiere al conocimiento del profesor sobre la relación de los tópicos matemáticos en estudio con otros contemplados en el plan de estudios, para establecer el fundamento matemático de lo que vendrá después y en consecuencia, ayudar en la toma de decisiones.
- *El conocimiento de los contenidos y los estudiantes (KCS)*. Es el conocimiento que combina el saber acerca de los estudiantes y sobre las matemáticas. Los profesores deben anticipar las respuestas de los estudiantes ante una tarea y las dificultades que pueden tener con ésta. Al elegir un ejemplo, deben predecir aquello que los estudiantes encontrarán interesante y motivador, asimismo tener la capacidad de interpretar el pensamiento de los alumnos.
- *El conocimiento de los contenidos y la enseñanza (KCT)*. Combina el conocimiento sobre la enseñanza y el de las matemáticas. Las tareas matemáticas en la enseñanza requieren un conocimiento matemático para su diseño y secuenciación. Por ello, los profesores evalúan las ventajas y desventajas de las representaciones que utilizan para enseñar un concepto e identifican lo que ofrecen para la instrucción los diferentes métodos y procedimientos.
- *El conocimiento de los contenidos y el currículum (KCC)*. Es el conocimiento, en un determinado nivel educativo, de los programas de estudio, temas particulares, materiales educativos disponibles e indicaciones para implementar un currículum.

En el análisis de los datos, los subdominios del MKT permiten determinar y clasificar el tipo de conocimiento que pone en acción un profesor de matemáticas en la planificación del concepto de límite al infinito de una función para su enseñanza.

### ***La planificación y los instrumentos***

Asumimos por planificación un proceso de diseño y secuenciación de tareas y actividades de enseñanza y aprendizaje cuyo propósito es generar experiencias en las cuales los escolares construyan su conocimiento gracias a una permanente negociación de significados (Gómez, 2006). En este proceso, el profesor usa distintos instrumentos para promover el aprendizaje en sus estudiantes. Se entiende por instrumentos todo aquello utilizado por el profesor para gestionar la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas tales como: el lenguaje hablado, los modos de representación simbólica, los materiales físicos, los diagramas, los símbolos convencionales, las tareas-problemas instruccionales, etc., (Llinares, 2000). Nuestra investigación se centra en la manera en que estos diversos instrumentos de la práctica de enseñar matemáticas se reflejan en el proceso de planificar las lecciones del concepto de límite al infinito de una función.

## **ASPECTOS METODOLÓGICOS**

### ***a) Contexto y participante***

Las planificaciones que utilizamos para estudiar el conocimiento profesional del profesor de matemáticas se enmarcan en el programa de enseñanza del Bachillerato de la Comunidad Valenciana (España) y Nivel Superior de la UAGro (México). Es con base en la revisión de programas de enseñanza en matemáticas que se reconoce, qué nivel educativo de cada uno de estos países es que se plantea el estudio del concepto de límite al infinito de una función.

En el estudio participó un profesor de matemáticas de secundaria de España, PEB, quien tiene 62 años de edad, está jubilado, se graduó como Maestro de Enseñanza Primaria y es Licenciado en Ciencias Exactas. Se desempeñó, en un primer momento, como maestro de primaria y después como profesor de secundaria y universidad, acumulando 42 años de experiencia docente. Ha llevado varios cursos de actualización profesional relacionados con la didáctica y enseñanza de las matemáticas. En la actualidad, estudia un doctorado en la Universidad de Alicante, España, la etapa en que se encuentra, es en la escritura de su trabajo de tesis en el ámbito de un experimento de enseñanza dirigido al estudio del concepto de límite de una función con alumnos del Bachillerato (estudiantes de 16-18 años).

### b) *El guión de entrevista*

Los datos se obtuvieron mediante la entrevista semiestructurada utilizando un guión integrado por preguntas relativas a los aspectos siguientes: *datos personales del participante; aula de clases; planificación del profesor sobre el concepto de límite al infinito de una función y planificación del investigador sobre el mismo tópico*. La tabla 1 muestra las preguntas primarias por apartado y el objetivo.

**Tabla 1.** Preguntas del guión de entrevista y objetivo por apartado

<b>Apartado</b>	<b>Preguntas</b>	<b>Objetivo</b>
Datos personales.	¿Cuál es su formación académica? ¿Cuánto tiempo lleva impartiendo clases? ¿En qué nivel educativo da clases? ¿Qué lo motivó a ser profesor de matemáticas?	Contextualizar al participante.
El aula de clases: los estudiantes, la planificación y el programa de estudios.	¿Qué consideraciones hace al momento de planificar, respecto al tipo de estudiantes que tiene en el aula? ¿Qué materiales utiliza para planificar su clase? ¿Qué aspectos plantea el currículum actual y cómo los incorpora en su planificación?	Conocer aspectos relacionados con el aula de clases; los estudiantes; el programa oficial y cómo éstos influye en su planificación.
Planificación del profesor sobre el concepto de límite al infinito de una función.	¿Qué objetivo plantea el currículum respecto al concepto del límite al infinito? ¿Cuáles serían los objetivos principales de su planificación del límite al infinito? ¿Cuáles son las actividades que plantea a los estudiantes?	Conocer las justificaciones del profesor sobre los instrumentos que emplea en su planificación del concepto de límite al infinito de una función.
Planificación del investigador sobre el	¿Qué tan apegado se encuentra el objetivo de la planeación respecto al currículum español? ¿Considera	Conocer las justificaciones que realiza el profesor respecto de los instrumentos

concepto de límite al infinito de una función.	adecuado el contexto presentado? ¿Qué actividades incluiría o eliminaría? ¿La planificación contribuye al aprendizaje del límite al infinito?	contemplados en una planificación externa para la enseñanza del límite al infinito de una función.
--	---	--

### c) *Desarrollo de la entrevista*

Previo a la entrevista el PEB facilitó al investigador su planificación sobre el concepto de límite al infinito de una función, enmarcada en el programa de estudios del Bachillerato de la Comunidad Valenciana (España), a fin de comprenderla y con base en ello elaborar el guión de la entrevista. El investigador por su parte, entregó al PEB su planificación, enmarcada en el Nivel Superior de la UAGro (México), con el propósito de que la analizara antes de iniciar la entrevista. Esta forma de proceder la justificamos al considerar que el profesor de matemáticas pone en acción determinados conocimientos en su planificación y reafirma éstos o manifiesta otros cuando analiza una planificación externa, lo que permite tener una mejor aproximación al conocimiento que se pretende examinar.

La entrevista, se desarrolló en tres sesiones, las cuales fueron audiograbadas con un dispositivo móvil y posteriormente transcritas. En la primera, se consideraron cuestiones sobre los datos personales y aspectos del aula de clases. En la segunda, se plantearon preguntas relacionadas a la planificación del profesor y del investigador sobre el concepto de límite al infinito de una función, mientras que en la tercera, se profundizó en las justificaciones del profesor sobre los instrumentos contemplados en su planificación.

### d) *Fases de análisis de los datos*

Se consideró en el análisis de los datos las dos aproximaciones del concepto de límite de una función: dinámica y métrica. La primera entendida como “Sea  $f$  una función y  $a$  un número real, el número  $L$  es el límite de la función  $f$  en el punto  $a$ , y se escribe  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ , si cuando  $x$  se acerca al número  $a$ , sus imágenes  $f(x)$  se acercan a  $L$ ” (Valls, Pons y Llinares, 2011). Mientras que la aproximación métrica en términos de desigualdades (Valls et al., 2011), tomando como referencia la definición formal del límite que incorpora la notación épsilon-delta, esto es  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$ .

El análisis se realizó a nivel descriptivo en tres fases. La primera, radicó en el preanálisis de las entrevistas para reducir el volumen de los datos y consistió en: triangular las entrevistas con los instrumentos de la planificación del profesor y del investigador; identificar las unidades de análisis y anotar las ideas asociadas con ésta. Asumimos por *unidades de análisis* como el conjunto de frases que a lo largo de la entrevista ha usado el profesor vinculado a su conocimiento matemático para la enseñanza de un tópico matemático en particular. La segunda, implicó agrupar las unidades de análisis en los seis subdominios del MKT. La tercera, consistió en mirar todas las unidades de análisis en cada subdominio, para identificar y determinar el conocimiento matemático para la enseñanza que el PEB pone en acción en la planificación del concepto de límite al infinito de una función.

## RESULTADOS

La planificación del PEB tiene como objetivo que los estudiantes utilicen el concepto de límite al infinito de una función en la resolución de problemas, mientras que la del investigador plantea

que establezcan una definición del concepto de límite al infinito de una función usando la simbología matemática, en particular,  $\lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = a$ , donde  $a \in \mathbb{R}$ . Los instrumentos contemplados en las planificaciones son: tareas sobre funciones, tendencias de funciones y el límite al infinito de una función; registros de representación gráfico y numérico; aproximación dinámica y métrica del tópico; software matemático; y contexto intramatemático y extramatemático. La tabla 2 muestra los subdominios del MKT que el PEB pone en acción cuando justifica el uso de los instrumentos contemplados en ambas planificaciones. La primera columna señala el instrumento, la segunda presenta la justificación de su uso y la tercera indica el subdominio del MKT asociado.

**Tabla 2.** Conocimiento matemático para la enseñanza del concepto de límite al infinito de una función: El caso del PEB.

<b>Instrumento</b>	<b>Justificación</b>	<b>Subdominio del MKT</b>
Aproximación métrica	Alude a ella para explicar la definición del tópico usando casos particulares.	<i>Conocimiento común del contenido</i>
Aproximación dinámica	Reconoce accesible el estudio del concepto desde esa aproximación.	<i>Conocimiento especializado del contenido</i>
Aproximación métrica	Sabe que esta aproximación involucra el valor de épsilon y delta.	
Tendencia de funciones	Permite acceder al límite de una función.	
Tareas sobre funciones Concepto de infinito	Es un conocimiento previo fundamental para el tópico de interés.	<i>Conocimiento del horizonte matemático</i>
Continuidad de una función Derivadas e integrales	Conceptos vinculados al de límite al infinito de una función.	
Epistemología del concepto de límite	Lo ayuda a optar por un estudio intuitivo del tópico.	
Tareas sobre dominio y rango de funciones	Reconoce dificultades de los estudiantes con esos contenidos.	<i>Conocimiento del contenido y los estudiantes</i>
Tareas sobre funciones	Considera menos complejo el estudio del tópico desde esta perspectiva.	
Distintas gráficas y tablas	Demanda cognitiva mayor.	
Interpolación lineal	Favorece un obstáculo de tipo didáctico al aplicarlo en una situación no lineal.	
Registros gráfico y numérico	Facilita la aproximación e interiorización del tópico de interés.	<i>Conocimiento del contenido y la enseñanza</i>
Aproximación dinámica	Favorece la introducción al tópico.	
Aproximación métrica	Potencia el estudio del concepto.	
Contexto intramatemático	Útil para definir formalmente el concepto.	
Contexto extramatemático	Sirve para dotar de sentido el estudio del tópico y reconocer su utilidad.	
Tiempo escolar	Necesario para la reflexión sobre la tarea y reconocer errores y aciertos.	

Tecnologías de la información	Ayuda a clarificar significados asociados al tópico de interés.	
Grupos de dos estudiantes	Favorece la interacción y el aprendizaje por cooperación.	
Libro de texto	Material disponible en la institución y utilizado para la enseñanza del tópico.	<b>Conocimiento del contenido y el currículum</b>
Aproximación dinámica y métrica	Planteamiento del programa de estudios.	
Tiempo escolar	Limitante para la propuesta de tareas variadas.	

Con base la tabla 2, el PEB pone en acción los seis subdominios del MKT cuando justifica el uso de los instrumentos contemplados en ambas planificaciones para la enseñanza del concepto de límite al infinito de una función.

La figura 2 presenta una perspectiva del conocimiento que pone en acción el PEB en la planificación del concepto de límite al infinito de una función para su enseñanza. Se observa que tiene en cuenta tres momentos: 1) *conocimientos previos*, en la que usa tareas sobre funciones; 2) *desarrollo del tópico*, donde emplea la aproximación dinámica; y 3) *formalización*, en la que hace uso de la aproximación métrica. En los tres momentos considera los instrumentos siguientes: Contexto intramatemático, tecnologías de la información, registros gráfico y numérico, programa de estudios, libros de texto y grupos de trabajo (conformada por los estudiantes). El contexto extramatemático lo emplea únicamente para recuperar conocimientos previos, es decir, en el primer momento.



**Figura 2.** Perspectiva del conocimiento que el PEB pone en acción en la planificación del concepto de límite al infinito de una función.

## REFLEXIONES

Este estudio se ha interesado por determinar las características del conocimiento que pone en acción el profesor de matemáticas en la planificación del concepto de límite al infinito de una función para su enseñanza. Se reconoció que el PEB pone en acción los seis subdominios del

MKT cuando justifica el uso de los instrumentos contemplados en ambas planificaciones, es decir, el estudio de su conocimiento a través de dos planificaciones nos permitió tener una mejor aproximación.

Las investigaciones sobre el conocimiento profesional del profesor de matemáticas son muy importantes porque dotan de herramientas para la formación del profesorado, como el caso del PEB que evidencia el valor del uso de diversos instrumentos en la enseñanza del concepto de límite al infinito de una función.

Finalmente para futuras investigaciones, consideramos pertinente el desarrollo de la planificación del investigador en donde interesaría analizar la práctica profesional del profesor de matemáticas.

### REFERENCIAS

- Ball, D.; Thames, M.; Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching. What Makes It Special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.
- Cabañas-Sánchez, G. (2011). *El papel de la noción de conservación del área en la resignificación de la integral definida. Un estudio socioepistemológico*. Departamento de matemática educativa, Centro de investigación y de estudios avanzados del instituto politécnico nacional, México.
- Gómez, P. (2006). La planificación: una competencia fundamental del profesor. Recuperado de <http://cumbia.ath.cx:591/pna/Archivos/GomezP06-2799.PDF>
- Llinares, S. (2000). Intentando comprender la práctica del profesor de matemáticas. En J.P. da Ponte & L. Serrazina (coord.). *Educação Matemática em Portugal, Espanha e Italia*. (pp. 109-132). Lisboa, Portugal: Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação.
- Morris, A.; Hiebert, J.; Spitzer, S. (2009). Mathematical Knowledge for Teaching in Planning and Evaluating Instruction: What Can Preservice Teachers Learn? *Journal for Research in Mathematics Education*, 40(5), 491-529.
- Shulman, L. (1986). Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.
- Valls, J.; Pons, J.; Llinares, S. (2011). Coordinación de los procesos de aproximación en la comprensión del límite de una función. *Enseñanza de las ciencias*, 29(3), 325-338.