

PROPUESTA DIDÁCTICA PARA LA FORMACIÓN DEL CONCEPTO ELIPSE EN ALUMNOS DE NIVEL MEDIO SUPERIOR

Víctor Ignacio Espíritu Montiel, Miguel Díaz Cárdenas

montiel_37@hotmail.com, midica01@gmail.com

Universidad Autónoma de Guerrero

Avance de Investigación

Tecnologías y recursos para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas

Medio Superior

RESUMEN

En este documento se describe el grado de avance de nuestro trabajo de investigación, en el cual se formuló y valoró una propuesta didáctica para la formación del concepto elipse en alumnos del Nivel Medio Superior, cuyo problema y objetivo, se desprenden como producto del análisis sobre investigaciones de corte histórico, didáctico y cognitivo, que acerca de este concepto se han realizado. Tal propuesta, se sustenta en la Teoría de la Actividad, reflejada a su vez, en la Metodología de la Enseñanza de la Matemática, las actividades que la integran toman en cuenta los procesos visuales necesarios en la realización de los procesos de conocer sobre los objetos matemáticos, así como el uso de un software de geometría dinámica. Esta propuesta didáctica ya fue puesta en práctica con doce alumnos de un Bachillerato Tecnológico, y por el momento se están analizando las producciones de estos.

PALABRAS CLAVES: Elipse, teoría de la actividad, formación de conceptos.

INTRODUCCIÓN

El proceso de enseñanza-aprendizaje (e-a) de las matemáticas es objeto de interés e investigación para un verdadero profesor por lo cual en su rol de investigador debe preocuparse por las dificultades que presentan los alumnos durante este proceso. En la actualidad, existe una gran diversidad de investigadores preocupados por mejorar dicho proceso, quienes buscan alternativas que favorezcan no solo habilidades y capacidades para realizar procedimientos matemáticos sino también habilidades y capacidades para la aprehensión del significado de los objetos matemáticos (OM). Entre estas alternativas, se identifica la formación de conceptos matemáticos para su adecuada comprensión.

De acuerdo a Duval (1996), la comprensión de los conceptos se da cuando los alumnos transitan de un registro a otro, contribuyendo favorablemente a la realización, identificación y aplicación del concepto. Sin embargo, esto no ha sido aprovechado de manera metodológica en el proceso de e-a, puesto que la enseñanza tradicional enfatiza, casi siempre, en abordar los conceptos en un solo registro y de manera deductiva; esto crea la necesidad de formular propuestas didácticas para una adecuada formación de conceptos en los alumnos y con ello una mejor comprensión de los mismos. Nuestro trabajo de investigación tiene el objetivo de contribuir a mejorar este proceso de e-a de la matemática en relación a la formación de conceptos matemáticos, específicamente en el proceso de formación del concepto (PFC) elipse en alumnos del Nivel Medio Superior (NMS).

ANTECEDENTES

10. Tecnologías y recursos para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas

En este apartado mostramos los antecedentes de nuestra investigación, de los cuales se desprenden el problema y el objetivo de la misma. Estos antecedentes son los resultados de analizar investigaciones de corte histórico, didáctico y cognitivo referentes al concepto elipse. Por una parte, de acuerdo con las investigaciones de Dutari y Esther (1995), Pérez (2012) y Calderón (2013), podemos observar que la evolución del OM elipse a través de la historia inició cuando Menecmo descubrió unas curvas (las cónicas) que solucionaban el problema de la duplicación del cubo. Luego, Apolonio estudió con profundidad estas curvas y encontró las propiedades que las definen como secciones de un cono y como lugares geométricos. XIX siglos después, Descartes prueba que todas estas curvas se pueden describir mediante ecuaciones de segundo grado. Podemos notar que el desarrollo histórico del concepto elipse inició en un plano puramente geométrico y posteriormente en un plano analítico. Esta es una de las razones por lo cual la propuesta didáctica (PD) contiene actividades que evolucionan desde la formación intuitiva del concepto elipse como lugar geométrico hasta la formación deductiva de este como expresión analítica.

Por otra parte, existen investigaciones sobre el concepto elipse, sin embargo, el proceso de e-a de este concepto sigue siendo tema de preocupación debido a que las dificultades siguen estando presentes en los aprendices. Bonilla y Parraguez (2013), indican que los alumnos que han trabajado el concepto de elipse bajo un enfoque tradicional, si bien comprenden este concepto a partir de las ecuaciones que la definen y son capaces de graficarla bajo ciertas condiciones, presentan grandes dificultades para comprenderlo desde una visión geométrica, lo cual se evidencia cuando se enfrentan a preguntas donde deben recurrir a la definición de este como lugar geométrico.

Por último, al realizar un análisis del Programa de Estudio de Matemáticas 2012 del Bachillerato Tecnológico, nos damos cuenta que el concepto de elipse es abordado en el onceavo grado con la asignatura Geometría Analítica en el bloque VII “aplicas los elementos y las ecuaciones de la elipse”. Cabe señalar que este Programa está basado en competencias, es decir, se pretende que el alumno al finalizar el bloque logre desarrollar ciertas competencias genéricas y disciplinares, además de los contenidos fácticos, procedimentales y actitudinales. Así también, se analizó el libro -Geometría analítica y cálculo diferencial- de Cuellar (2006), el cual es uno de los libros recomendados para trabajar con dicho bloque, en este libro se observa que el tratamiento del concepto elipse es, casi exclusivamente, analítico y los temas son tratados de manera deductiva favoreciendo la labor expositiva de parte del profesor; obstaculizando a su vez, el análisis, la reflexión y la aprehensión de los significados necesarios en el PFC elipse para su comprensión.

PROBLEMA Y OBJETIVO DE INVESTIGACIÓN

Como producto del análisis sobre los trabajos de investigación y documentos descritos en los párrafos anteriores, se destacan diversos rasgos: el desarrollo histórico del concepto elipse ha llevado un largo tiempo para llegar a su formalización, transitando de un plano geométrico a un plano analítico. El proceso de e-a del concepto elipse sigue siendo tema de preocupación, debido a que las dificultades siguen estando presentes en los alumnos. La enseñanza de este concepto en el libro de texto analizado, favorece la labor expositiva de parte del profesor, ya que la mayoría de los temas son tratados de manera deductiva. De acuerdo con esta problemática identificada, consideramos pertinente ocuparnos del siguiente problema específico de investigación: *la presencia de dificultades en la formación del concepto elipse en alumnos de NMS al involucrar procedimientos geométricos y analíticos*. La pregunta que guiará el desarrollo de la misma será la siguiente: ¿cómo se puede dar el PFC elipse en alumnos del NMS? de forma hipotética,

10. Tecnologías y recursos para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas

pensamos que es necesaria una orientación metodológica de la actividad cognoscitiva del alumno; y tal orientación puede provenir del enfoque de la Teoría de la Actividad (TA), reflejada a su vez, en la Metodología de la Enseñanza de la Matemática (MEM). Por lo cual, para dar respuesta a nuestra interrogante, se planteó el siguiente objetivo: *formular y valorar una PD para el PFC elipse en alumnos de NMS, orientada en los lineamientos de la MEM.*

Con esta PD se pretende que el alumno aprenda de una manera distinta a la enseñanza tradicional, participando en el PFC elipse, visualizando así las características invariantes que lo definen. En general, consideramos que es importante diseñar PD para el PFC matemáticos, con la finalidad de proporcionar la orientación necesaria para la realización del proceso de e-a. Como resultado de este esfuerzo lograremos que el profesor cuente con una amplia selección de PD para implementarlas y mejorar por medio de ellas su labor. En particular, esta PD tiene el propósito de orientar tanto a profesores como alumnos de NMS en el PFC elipse, ya que éste es uno de los objetos de aprendizaje en este nivel, de acuerdo con el Programas de Estudio.

MARCO TEÓRICO

La Teoría que sustenta este trabajo de investigación es la TA, ya que por una parte esta teoría busca conformar una enseñanza como un proceso, que se centre en un conjunto de aspectos sociales, históricos, culturales, metodológicos y prácticos en el cual se integra el papel orientador del profesor como elemento clave en el mantenimiento del objetivo de la enseñanza misma, sin que esto excluya el papel del alumno en este proceso. Esta teoría considera como elemento primordial el nivel de desarrollo psíquico del alumno a partir de su experiencia cultural, aunado a su nivel de interiorización y conformación de sus acciones.

El psicólogo soviético Vigotsky, sienta las bases de una nueva corriente psicológica denominada “histórico-cultural”, en la cual el problema del conocimiento entre el sujeto y el objeto se soluciona con el planteamiento interaccionista dialéctico ($S \xrightarrow{\text{Actividad}} O$), a esta relación en doble dirección se le llama actividad objetual, ya que transforma al objeto y al sujeto. Rubinstein, Leontiev y Galperín enriquecen esta teoría, señalando la necesidad del carácter activo en el proceso general de formación del conocimiento, definen la actividad humana como todas las formas de actuación del hombre, ya sean internas o externas, que están dirigidas a la solución de tareas y que están reguladas por él mediante un fin consciente. Leontiev retoma lo relacionado entre la actividad externa y la interna categorizándola, profundiza y desarrolla una teoría en la que plantea que es a través de la actividad que el hombre se pone en contacto con los objetos y fenómenos de la realidad, actúa sobre ellos modificándolos y transformándose a sí mismo y que esta misma es un sistema que tiene su estructura. Esta estructura de la actividad, que se manifiesta tanto en las acciones externas como en las internas, transita por tres fases: *orientación, ejecución y control.*

Galperín realiza un estudio más detallado de las etapas de formación de la actividad interna a partir de la externa, el papel de cada uno de los momentos funcionales de la actividad, de las transformaciones que sufre la acción en este proceso, como resultado de lo cual adquiere un carácter específicamente psíquico. Elaborando con esto una teoría del desarrollo psíquico que se convierte, además, en teoría de la enseñanza. La idea fundamental es la formación por etapas de las acciones mentales y conceptos, en la que se concibe el proceso de asimilación de un conocimiento como un proceso activo, el cual parte de considerar que el proceso de formación de una acción mental comienza con las acciones objetales que el hombre realiza con el apoyo de objetos externos, para pasar luego por una serie de etapas hasta convertirse en una acción que se

10. Tecnologías y recursos para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas

realiza en el plano mental. Para que la acción transite de la forma material a la mental, el proceso de asimilación debe tener en cuenta una serie de etapas: *motivacional, base orientadora de la acción, material, verbal y mental*.

Por otra parte, en la TA existen otras concepciones establecidas a partir de las ideas del enfoque histórico-cultural las cuales también permiten fundamentar este trabajo de investigación. En este sentido nos interesa conocer los procesos cognitivos sobre los objetos matemáticos y el papel que juega la visualización en el PFC, ya que las actividades que integraran la PD tomaran en cuenta los procesos visuales necesarios en la realización de los procesos de conocer sobre los OM, así como el uso de un software de geometría dinámica (sgd), como apoyo para la realización de dichos procesos visuales.

Con respecto a los procesos cognitivos sobre los objetos matemáticos, los trabajos de Piaget y Vigotsky sobre la formación de los conceptos y las operaciones mentales en los niños, demostraron que los conceptos son imágenes mentales que no se forman en modo alguno dentro de la cabeza de la persona, en la manera en que se forman las imágenes genéricas sensitivas, sino que son producto del proceso de aprehensión de significaciones (Leontiev, 1982). Rubinstein (1969), ha identificado las acciones y operaciones internas mentales o teóricas del pensamiento realizadoras de dicho proceso, estas son:

- **Análisis:** proceso que el sujeto realiza para darse cuenta de la existencia de rasgos comunes y esenciales en el OM tratado.
- **Abstracción:** consiste en prescindir de los datos o rasgos no esenciales. Es el proceso mental que pasa de cualidades sensibles a cualidades abstractas.
- **Generalización:** este proceso consiste en verificar si el conjunto de rasgos comunes y esenciales abstraídos puede ser extendido a todos los objetos de la colección.
- **Síntesis:** proceso que se realiza al designar estas características esenciales a todos los objetos y se cristaliza en cierta representación del OM.

En cuanto a la visualización en el PFC, las acciones y operaciones internas realizadoras de la actividad de generalizar, pueden apoyarse en acciones y operaciones externas sobre las representaciones de dichos objetos, puesto que los OM son de naturaleza abstracta. Es aquí donde la visualización (procesos visuales) adquiere especial relevancia. De acuerdo con Duval (1999), visualizar es darse cuenta de la configuración completa de relaciones invariantes contenidas en (o sugeridas por) la representación; y en el actividad de generalizar, la abstracción es el proceso que permite extraer estas relaciones invariantes. Entonces, podemos decir que el papel que desempeña la visualización en el PFC, es que constituye en un fuerte aliado del proceso de abstraer en la actividad de generalizar.

Para poder apoyar los procesos visuales de los alumnos en el PFC haremos uso de un sgd, ya que podría considerarse un instrumento material que con una adecuada intervención del profesor, puede transformarse en un instrumento psicológico. El sgd actuaría inicialmente como una herramienta, pero a través de la manipulación y la experimentación de los objetos que aparecen en la interface por medio de la herramienta manipulación, posibilitaría gradualmente convertir dicha herramienta en instrumento, ya que en la medida que el sujeto va identificando relaciones

10. Tecnologías y recursos para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas

entre los elementos constitutivos de la elipse, realizaría abstracciones y generalizaciones que le posibilitaran la formación de este concepto.

METODOLOGÍA

Como se mencionó anteriormente la TA se ve reflejada en la MEM, a continuación mostramos la que indica dicha metodología en cuanto al PFC. De acuerdo con Jungk (1985), un concepto es el reflejo mental de una clase de cosas, procesos, relaciones de la realidad objetiva o de la conciencia, sobre la base de sus características invariantes; y la definición es el reflejo verbal de la clase de cosas, procesos o relaciones, sobre la base de las características invariantes. Por otra parte, menciona que el proceso general para la formación de un concepto tiene tres fases:

- *Consideraciones y ejercicios preparatorios*, esta fase inicia en ciertas ocasiones mucho antes de la introducción del concepto. Mediante esta, los alumnos se familiarizan con fenómenos y formas de trabajo correspondientes, para más tarde poder relacionarlo inmediatamente con el concepto.
- *Formación del concepto*, en esta fase se da la formación del concepto, que se desarrolla desde la creación del nivel de partida: en el cual se aseguran, mediante el repaso, los conocimientos necesarios para la formación del nuevo concepto; la motivación y la orientación hacia el objetivo: aquí se precisa lo que hay que definir, se crea una situación de partida y se selecciona una estrategia; posteriormente se obtiene el conocimiento, es decir, se transita de la separación de las características comunes y no comunes a características necesarias y suficientes al analizar los objetos de estudio; y por último, se define el concepto.
- *Asimilación del concepto*, fase en la cual pertenecen las ejercitaciones, profundizaciones, sistematizaciones, aplicaciones y los repasos del concepto que siguen al PFC, es decir, el alumno deberá identificar, realizar y aplicar el concepto para poder asimilarlo.

PROPUESTA DIDÁCTICA

Con base en las consideraciones anteriores se diseñó la PD la cual consta de nueve actividades en las cuales están reflejadas las dos últimas fases para el PFC que indica la MEM. En cuanto a la primera fase no fue necesario realizar alguna actividad, ya que los alumnos tienen una idea intuitiva del concepto elipse puesto que en noveno grado analizan las secciones que se obtienen al realizar cortes con un plano a un cono. Asimismo, durante la formación del alumno en nivel básico se le ha propuesto trabajar con OM como el plano cartesiano, distancia entre dos puntos, mediatriz, lugar geométrico, teorema de Pitágoras y se le ha preparado para el trabajo con el juego geométrico. Estos temas contribuirán en el PFC elipse en los alumnos.

En la segunda fase se centra la PD ya que nos ayuda a cumplir con el objetivo de la misma, es decir, formar el concepto de elipse en alumnos de NMS. Para esto se diseñaron ocho actividades donde el trabajo propuesto en estas es mediante la vía inductiva siguiendo los lineamientos que indica la MEM. Algunas actividades están diseñadas para llevarse a cabo con materiales tangibles, en ellas el alumno tendrá que utilizar su juego geométrico y otros materiales; en algunas otras se necesitara utilizar modelos que le servirán de base para la visualización directa de algunos sucesos. Estos modelos serán presentados y dirigidos por el profesor mediante una presentación dinámica en el sgd, permitiendo al alumno analizar y abstraer los rasgos esenciales y con esto complementar las conjeturas elaboradas por ellos y así generalizar y llegar a una síntesis, en este caso la definición de la elipse. A continuación se describen estas actividades:

10. Tecnologías y recursos para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas

Las actividades I y II corresponden al aseguramiento del nivel de partida, en la primera se asegura el concepto de mediatriz y en la segunda el algoritmo para la construcción de la mediatriz con regla y compás. En la actividad III se muestra al alumno una motivación extra-matemática, ya que se le plantea un problema sobre su entorno social. En la actividad IV se crea la situación de partida mediante una serie de indicaciones para la construcción con regla y compás de la elipse, en esta misma actividad se seleccionan las características comunes y no comunes mediante un conjunto de pregunta sobre la curva que el alumno obtuvo al realizar los pasos indicados en esta actividad. Para la reducción de las características comunes y no comunes a características necesarias y suficientes el profesor hace uso del SGD donde realiza la misma construcción de manera dinámica y compara las conjeturas hechas por los alumnos. El uso del SGD permitirá que el alumno analice, abstraiga y generalice estas características para poder llegar a una síntesis. En la actividad V se define el concepto elipse.

Una vez obtenida la definición de la elipse en un registro geométrico se transita al registro analítico mediante las actividades siguientes. En la actividad VI el alumno identifique el concepto de elipse, para esto se construye de manera mecánica una curva elíptica en el plano cartesiano, mediante una serie de indicaciones. En la actividad VII el alumno conoce los elementos asociados a la elipse y las propiedades que satisfacen, esto con apoyo de la elipse obtenida en la actividad anterior. En la actividad VIII el alumno logre darse cuenta que existen otras formas de representación del concepto elipse, en este caso, a su equivalente en expresión analítica, es decir, el alumno transita el concepto de elipse del plano geométrico al plano analítico.

Para la tercera fase solo consideramos la actividad IX en la cual se retoma el problema motivacional y en la cual se espera que el alumno aplique el concepto de elipse al darle solución al problema, además debe ser capaz de identificar la ecuación y los elementos de la elipse.

PUESTA EN ESCENA

La PD se llevó a cabo con doce alumnos de onceavo grado de un Bachillerato Tecnológico ubicado en la zona centro del estado de Guerrero, México. La muestra de estos alumnos se tomó del grupo 401 turno matutino de dicho plantel a quienes se les explicó en qué consistía el proyecto (pero no el concepto que se va a formar) y el horario en el que se implementarían las clases. Cabe mencionar que estos alumnos accedieron a participar de manera voluntaria en la aplicación de la PD. La puesta en escena se realizó en tres sesiones de aproximadamente dos horas cada una, en la cual los alumnos fueron organizados en cuatro equipos de tres integrantes.

REFLEXIONES

Los avances de este proyecto de investigación se tienen en los aspectos teóricos y metodológicos en que se sustentan, además de que la puesta en escena de la PD ya se llevó a cabo. Por el momento nos encontramos en el análisis de las producciones de los alumnos, para esto se consideran las producciones de cada equipo en las actividades elaboradas, las grabaciones de video realizadas durante la puesta en escena, la identificación de la realización de las acciones mentales (análisis, abstracción, generalización y síntesis) necesarias para formar el concepto elipse. En este análisis describiremos las respuestas de los alumnos por equipo observando si lo realizaron de manera correcta o que dificultades presentaron. Para facilitar el tratamiento de la información se emplearán las siguientes abreviaturas:

10. Tecnologías y recursos para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas

E₁ : Equipo 1	E₂ : Equipo 2	E₃ : Equipo 3	E₄ : Equipo 4
A₁ : Nayvi Lizeth	B₁ : Betzania	C₁ : Lauro	D₁ : Michelle
A₂ : Marichuy	B₂ : Luz Clarita	C₂ : Santiago de Jesús	D₂ : Carlos
A₃ : Yesenia	B₃ : Raúl	C₃ : Dulce	D₃ : Kevin

Para el caso de las actividades I, II, IV y V en las cuales se pueden construir y/o transformar las representaciones, acciones externas que apoyan a las acciones internas de los procesos cognitivos para el PFC elipse, se empleara la notación siguiente: **An**: análisis, **Ab**: abstracción, **Ge**: generalización y **Si**: síntesis, para valorar si estos procesos de los alumnos son efectivos o no, facilitando así, el cumplimiento del objetivo de cada actividad. Es precisamente, en estas actividades en las cuales se emplea el sgd, una vez que los alumnos realizaron sus propias conjeturas, y con ayuda de este apoyar los procesos visuales logrando un mejor análisis y abstracción de las características invariantes de una elipse, además el uso del sgd posibilita la generalización de estas características y con ello sintetizar estas en una definición oral y/o escrita.

En el caso de las actividades VI, VII y VIII, en las que se da el transito del plano geométrico al plano analítico; las unidades de análisis que se emplearan para mirar si los alumnos lograron apropiarse de este conocimiento son las siguientes:

- Identifica el concepto (**IC**): Se refiere a que el alumno es capaz de identificar el concepto de elipse como lugar geométrico, mirando las características esenciales de este.
- Elementos y propiedades (**EP**): Se refiere a que el alumno logro identificar los elementos asociados a la elipse y las propiedades que estos cumplen desde una perspectiva geométrica-analítica.
- Representación analítica (**RA**): Se refiere a que el alumno logro transitar la representación de la elipse en el plano geométrico a su representación en el plano analítico, sin descuidar las características esenciales en ambos planos.

En cuanto a la actividad IX en la cual los alumnos aplican el concepto de elipse, se emplearan las siguientes unidades de análisis, para mirar si lograron aplicar este conocimiento en un contexto extra-matemático:

- Ecuación de la órbita (**Ec**): Se refiere a que el alumno es capaz de identificar la expresión algebraica que representa la órbita de la tierra, es decir, la ecuación de la elipse que modela dicha órbita.
- Focos de la órbita (**Fo**): Se refiere a que el alumno logro identificar las coordenadas de los focos de la órbita de la tierra, esto es, identifica los focos de una elipse.
- Ejes de la órbita (**Ejs**): Se refiere a que el alumno es capaz de identificar la magnitud de los ejes de la órbita de la tierra, es decir, reconoce el eje mayor y menor de una elipse.
- Vértices de la órbita (**Ve**): Se refiere a que el alumno logro identificar las coordenadas de los vértices de la órbita de la tierra, esto es, identifica los vértices de una elipse.

10. Tecnologías y recursos para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas

Lo que sigue ahora, es continuar con el análisis de las producciones de los alumnos y con ello valorar la efectividad de la PD y llegar a ciertas conclusiones sobre nuestro proyecto de investigación, destacando los logros obtenidos y las dificultades encontradas.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Bonilla, D. y Parraguez, M. (2013). La elipse desde la perspectiva de la teoría de los modos de pensamiento. *ALME* 26, 617-624.
- Calderón, W. (2013). *Propuesta metodológica para la enseñanza de las secciones cónicas en el grado décimo de la institución educativa Villas de San Ignacio de Bucaramanga*. Tesis de maestría no publicada, Universidad Nacional de Colombia, Medellín, Colombia.
- Cuéllar, J. A. (2006). *Geometría analítica y cálculo diferencial*. Nuevo León: THOMSON.
- Dutari, R. y Esther, O. (1995). *El desarrollo histórico de la Geometría Analítica: principales exponentes y aportes*. Monografía, Universidad de Panamá, Veraguas, Panamá.
- Duval, R. (1996). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En Hitt, F. (Ed.) *Investigaciones en matemática educativa*. México: Grupo Editorial Iberoamérica, pp. 173-201.
- Duval, R. (1999). Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. En Hitt, F. & Santos M.(Eds.), *Proceedings of the twenty First Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, pp. 3-26.
- Jungk, W. (1985) *Conferencias sobre Metodología de la Enseñanza de la Matemática (tomo 1 y 2)*. Habana, Cuba: Pueblo y Educación.
- Leontiev, A. N. (1982). *Actividad, conciencia, personalidad*. Habana: Pueblo y Educación.
- Pérez, R. (2012). *Una propuesta de enseñanza aprendizaje para la construcción y aplicación de las cónicas*. Tesis de maestría no publicada, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia.
- Rubinstein, S. L. (1969). *Principios de Psicología General*. México: Grijalbo.