

UNA PROBLEMATIZACIÓN DEL TEOREMA DE EXISTENCIA Y UNICIDAD EN LAS ECUACIONES DIFERENCIALES: UN ESTUDIO SOCIOEPISTEMOLÓGICO

Rodolfo David Fallas Soto, Ricardo Cantoral Uriza

rdfallass@gmail.com, rcantor@cinvestav.mx

CINVESTAV

Avance de investigación

Historia de la matemática desde la socioepistemología

Superior

RESUMEN

Se realiza una comparación entre las demostraciones y las ideas matemáticas que se utilizan en el teorema de existencia y unicidad de soluciones de la ecuación diferencial $y' = f(x, y)$, presentes en tres libros de texto, utilizados actualmente para el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales. Además, se realiza un estudio socioepistemológico en donde se analiza el teorema y su demostración, alrededor de las obras Cours D' Analyse de Émile Picard, Lehrbuch der Analysis de Rudolf Lipschitz y trabajos desarrollados por Cauchy, para problematizar en este resultado de las ecuaciones diferenciales. Con este estudio se rescata lo esencial de las obras matemáticas estudiadas, para dar así una aportación en el aprendizaje de este teorema.

PALABRAS CLAVES: socioepistemología, problematización, ecuaciones diferenciales, existencia y unicidad.

INTRODUCCIÓN

En nuestra investigación se desea problematizar alrededor del teorema de existencia y unicidad de las ecuaciones diferenciales. Esto pues por motivo de que en su aprendizaje, al igual que muchos temas en matemática, nos preocupa el hecho de que quedan vacíos sobre la funcionalidad de estudiar ese tema, además de su forma mecánica en la cual se está enseñando.

Para ello, se analizan versiones del teorema local de existencia y unicidad junto con su demostración. Se coloca cada detalle sobre la matemática que se utiliza en este proceso y las hipótesis que surgen, con el propósito de comprender más esta demostración y conducir al estudiante a una práctica matemática más útil y comprensible.

Se seleccionaron tres libros que nos aportan este resultado. Uno de estos libros es Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones y Notas Históricas de Simmons (1993) pues este autor nos brinda notas históricas durante la demostración que nos ayudan en el proceso de historizar y así estudiar las obras matemáticas que dieron aportaciones en la demostración de este tema y su importancia de avanzar en el saber matemático y su aplicación. Los otros dos libros se escogieron pues se utilizan para el estudio de las ecuaciones diferenciales ordinarias en diferentes carreras y universidades. De la facultad de ingeniería de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM) usan el libro Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones de Zill (1997) y por último de la facultad de ciencias de la UNAM en la carrera de Matemática y de la carrera de Enseñanza de la Matemática de la Universidad de Costa Rica (UCR) uno de los libros que utilizan es



1. Aproximaciones Teóricas en Matemática Educativa

Differential Equations and their Applications de Braun (1993). Se expone cada uno de estas versiones de teoremas junto con su demostración y detalles que aportan estos libros.

Por otro lado, se estudia la obra de Picard (1886), pues de acuerdo con las notas históricas de Simmons (1996) fue quien demostró el teorema con sus aproximaciones sucesivas. Para problematizar este saber, tal y como menciona Cantoral (2013) se debe realizar un análisis de las obras matemáticas, génesis histórica, didáctica de antaño, fenomenología intrínseca, praxis educativa alrededor del teorema. A partir de esto se analiza el contexto socioepistemológico de Picard cuando era estudiante, además de analizar las obras de Lipschitz (1880) y Cauchy & Moigno (1844) sobre el teorema y las ideas que ahí surgen.

Para finalizar se da una aportación de lo esencial del teorema, tomando en cuenta estas obras y así dar ofrecer algo innovador para el aprendizaje de este teorema. Dar aportaciones de la historia y el contexto desde la visión socioepistemológica para el desarrollo del pensamiento matemático esto como resultado de la problematización del saber.

ANTECEDENTES

Con respecto a la historia pudimos encontrar en Simmons, (1996):

Emile Picard (1856-1941), uno de los matemáticos franceses más eminentes del siglo pasado, hizo dos contribuciones cruciales al análisis, su método de aproximaciones sucesivas, que le permitió perfeccionar la teoría de ecuaciones diferenciales iniciadas por Cauchy en la década de 1820, y su famoso teorema (conocido como el “teorema grande de Picard”) sobre los valores que toma una función compleja analítica en el entorno de singularidades esencial, que ha estimulado gran cantidad de investigaciones importantes hasta el presente. (p.568)

Rudolph Lipschitz (1832-1903) fue profesor en Bonn la mayor parte de su vida. Se le recuerda especialmente por su papel en la simplificación y clarificación de la teoría original de Cauchy sobre existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones diferenciales. Sin embargo, también extendió el teorema de Dirichlet sobre representatividad de una función por su serie de Fourier, obtuvo la fórmula para el número de formas en que un número entero positivo se puede descomponer como suma de cuatro cuadrados como corolario de su propia teoría de factorización de cuaterniones enteros, e hizo contribuciones relevantes a la mecánica teórica, al cálculo de variaciones, a las funciones de Bessel, a las formas diferenciales cuadráticas y a la teoría de fluidos viscosos. (p. 577)

Giuseppe Peano (1858-1932), lógico y matemático italiano, influyó fuertemente en el tratamiento axiomático de la geometría del plano de Hilbert y la obra de Whitehead y Russel en lógica matemática. Sus postulados para los enteros positivos han hecho preguntarse a generaciones de estudiantes si toda la álgebra moderna no es una especie de conspiración para convertir lo trivial en ininteligible. En 1890 dejó atónito al mundo de las matemáticas con su notable construcción de una curva continua en el plano que llena por completo el cuadrado $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$. Desgraciadamente para un hombre que tenía en tan alta estima la lógica, su demostración en 1886 del citado teorema de existencia y unicidad de soluciones para $y' = f(x, y)$ era incorrecta, y hasta muchos años después no se encontró una rigurosa. (p. 577)

MÉTODO

Este trabajo corresponde a una investigación teórico epistemológico, en donde trabajaremos en cinco fases.



1. Aproximaciones Teóricas en Matemática Educativa

Primera fase	Búsqueda de los libros de texto que se utilizan actualmente para la enseñanza de las ecuaciones diferenciales ordinarias, además de rescatar el objetivo que tienen para los estudiantes a los cuales van dirigidos, esto a partir de las orientaciones que tiene el curso. Además se estudiarán cada uno de los teoremas con sus demostraciones y ejercicios para comparar y obtener cada detalle de estas.
Segunda fase	Se estudiarán las obras matemáticas en donde tuvo papel el génesis el teorema. De la misma forma se obtendrán las ideas principales que los autores exponen. Se estudiará su evolución y las aportaciones que cada matemático brindó para la demostración.
Tercera fase	Trabajar en el marco teórico dentro de la teoría socioepistemológica. Tomar en cuenta los trabajos más recientes en la teoría pues puede brindar aportaciones al tema estudiado.
Cuarta fase	Nos enfocaremos en la época de Picard y la didáctica que utiliza cuando enseñaba el curso de análisis, pues en ese momento la matemática y su enseñanza estaban en estrecha relación, casi o igual que una misma práctica. Se estudiarán las obras cuando Picard era estudiante, además de su contexto sociocultural y epistémico.
Quinta fase	Ofrecer aportaciones para el aprendizaje de este teorema, además de dar una prueba con las ideas que forman parte de la esencia de lo investigado. Se quiere dar una propuesta para que el aprendizaje de este teorema quede más comprensible. No se busca una demostración formal y estricta como matemático, sino que a partir de una estrategia brindar una la estudiante las ideas principales que se determinan en la demostración y sus ejercicios. Se desean obtener reflexiones y conclusiones del estudio realizado.

REFERENCIAS

- Braun, M. (1993). *Differential Equations and their Applications* (4th ed.). New York: Springer-Verlag.
- Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre la construcción social del conocimiento*. (E. Gedisa, Ed.). México.
- Cauchy, L., & Moigno. (1844). *Lecons de Calcul Différentiel et de Calcul Intégral*. (I.-L. de L. P. Bachelier, Ed.). Paris.
- Lipschitz, R. (1880). *Lehrbuch der Analysis*. (V. von M. C. & Sohn, Ed.). Bonn.
- Picard, E. (1886). *Cours D'Analyse* (pp. 292–294). Faculté des Sciences de Paris.
- Simmons, G. (1993). *Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones y Notas Historicas* (2nd ed.). España: Mc Graw Hill.



1. Aproximaciones Teóricas en Matemática Educativa

Simmons, G. (1996). *Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones y Notas Historicas* (Segunda ed.). España: Ma Graw Hill.

Zill, D. (1997). *Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones* (3rd ed.). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

