

PARADIGMAS ALGEBRAICOS: UN APORTE A LA TEORÍA DEL ESPACIO DE TRABAJO MATEMÁTICOⁱ

Gamboa-Inostroza, M.^a, Mena-Lorca, A.^b

^aUniversidad de Concepción, ^bPontificia Universidad Católica de Valparaíso; correos electrónicos: maurigamboa@udec.cl^a, arturo.mena@pucv.cl^b

Resumen

En este trabajo se presenta la idea de configurar un “Espacio de Trabajo Matemático” (ETM) en la disciplina del álgebra, sustentado en la idea de “paradigmas algebraicos” desde antecedentes de un estudio histórico-epistemológico, análisis del currículum, y el estado del arte de la investigación frente a los fenómenos de enseñanza y aprendizaje del álgebra. Lo anterior muestra la presencia de distintos significados encerrados en una única palabra “álgebra”. Desde estos “paradigmas” se propone este ETM algebraico, con el fin de clarificar “malentendidos” cuando un profesor enseña un tema de álgebra.

Palabras clave: *Paradigmas algebraicos, Álgebra, Espacio de Trabajo Matemático.*

LA NOCIÓN DE PARADIGMA

Thomas Kuhn utiliza profusamente el término paradigma. Proveniente del griego παράδειγμα, según Kuhn hay primero una etapa pre-científica; luego se establece la ciencia normal; más adelante sobreviene una crisis; la crisis se convertirá en una revolución; se volverá entonces a la etapa de ciencia normal, ahora de otra ciencia, lo cual no es solo una versión remozada de la anterior. En la etapa pre-científica faltan acuerdos en aspectos fundamentales y hay constante debate acerca de ello, existen tantas teorías como investigadores, cada uno de estos está obligado a comenzar de nuevo. La etapa propiamente científica consiste en que todos los científicos adhieren a un mismo *paradigma*.

(...) un paradigma son “realizaciones científicas universalmente reconocidas que, durante cierto tiempo, proporcionan modelos de problemas y soluciones a una comunidad científica”, más precisamente el “Conjunto de hipótesis teóricas generales, leyes y técnicas para su aplicación, compartidas por los miembros de una comunidad científica, implicando una cierta coincidencia en sus juicios profesionales.” (Kuhn, 1971, p.13).

Paradigmas y espacio de trabajo

Kuzniak (2004) considera dos facetas del concepto de paradigma vertido por Kuhn. La primera está dada en términos generales, es decir designa el conjunto de creencias, de técnicas y de valores que comparten un grupo científico. Se fija la manera correcta de plantear un problema y de emprender la resolución, mientras que la segunda noción está propuesta desde un ámbito institucional: “[...] matriz disciplinaria que permite reagrupar las teorías y más generalmente los conocimientos de un grupo que trabaja en el mismo sujeto” (Kuzniak, 2004, p.15). Los profesores y alumnos implícitamente están posicionados en paradigmas separados: esta diferencia de posición epistemológica explica ciertos malentendidos didácticos.

En el ámbito de la Geometría un *paradigma geométrico* es la caracterización de los problemas y ejemplos significativos que se entregan a los estudiantes para que aprendan a reconocer, aislar y distinguir las diferentes entidades constitutivas de la geometría puesto en juego. La concepción de paradigma en un ETM se acoge a tres componentes: una de carácter epistemológico, otra de carácter cognitivo según los modos de pensamiento de Gonsseth (1945-55), y la de carácter filosófico (Kuhn). Estos tres ejes permiten identificar tres *paradigmas geométricos*, que coexisten

en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría. Los tres ejes antes mencionados, son considerados en forma conjunta y no son vistos aisladamente uno del otro.

EL ESPACIO DE TRABAJO MATEMÁTICO

La teoría ETM (Houdement&Kuzniak 2006; Kuzniak 2004, 2011) es una teoría de la DM que ofrece un marco explícito para considerar de manera precisa, relevante y articulada aspectos disciplinarios, cognitivos, culturales y paradigmáticos presentes en los aprendizajes de los alumnos y/o puestos en juego por un profesor en su ejercicio profesional. En particular, permite abordar explícitamente la situación de un profesor que intenta llevar a la práctica lo aprendido, integrando los aspectos disciplinares y pedagógicos. En el ETM se concibe el estudio como el fruto de una interacción entre un individuo y los problemas matemáticos de un dominio, en un ambiente *ad hoc*, mediante la articulación de dos planos, uno epistemológico, la matemática en juego, y otro cognitivo (Kuzniak, 2011; Kuzniak& Richard, 2014).

El *plano epistemológico* está constituido por tres *componentes*: *representamen*, *artefacto* y *referencial*. El *plano cognitivo* está también conformado por tres componentes: correspondientemente, los procesos de *visualización*, *construcción* y *prueba*.

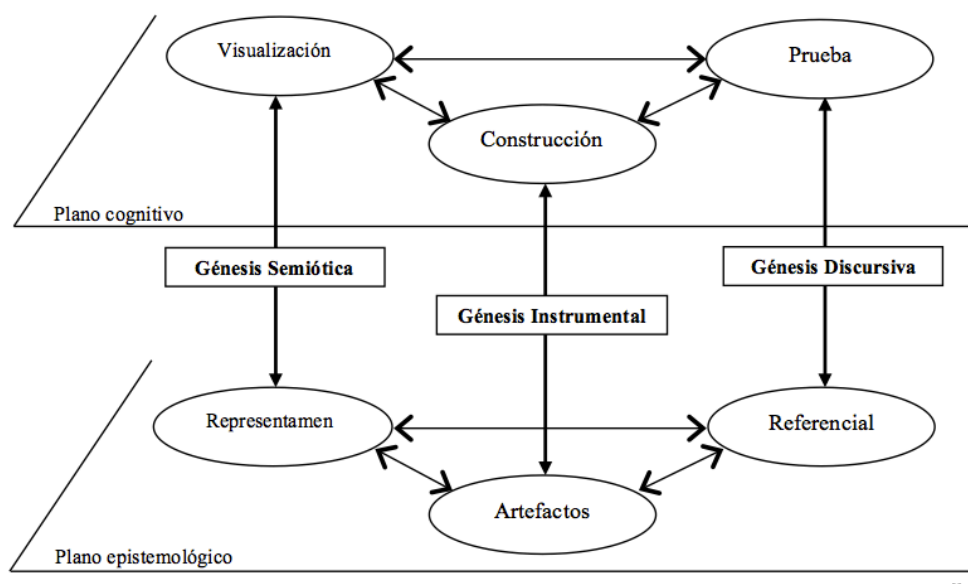


Figura 1: El Espacio de Trabajo Matemático y sus Génesis (Kuzniak, 2011)

De esa manera, la teoría pone de relieve tres aspectos de importancia en la matemática (los signos que ocupa, las ‘herramientas’ que utiliza, y la manera en que alcanza sus conclusiones) y sus correlatos en el proceso cognitivo del aprendiz (de qué manera percibe la disciplina, qué recursos ocupa, cómo argumenta, etc.).

Para describir la articulación de los planos se considera un conjunto de *génesis* que permiten relacionarlos: *instrumental* (de los artefactos a la construcción), *semiótica* (del *representamen* a la visualización), y *discursiva* (del referencial al proceso de prueba) las cuales son interdependientes y que involucran a todas las componentes epistemológicas y a los procesos cognitivos (Kuzniak y Richard, 2014). De tal manera, el proceso de construcción de las diversas dimensiones que comporta el espacio de trabajo está descrito por las diferentes génesis, en esta la génesis instrumental hace funcional a los artefactos en el proceso de construcción, por ejemplo en la geometría, la génesis instrumental da cuenta de cómo un *artefacto* se convierte en un *instrumento* (Artigue, 2002) al servicio del estudiante; la génesis semiótica se basa particularmente en los registros de representación semiótica, y asegura el establecimiento de la relación entre

sintaxis, semántica, función y estructura, de los signos; y la génesis discursiva utiliza las propiedades del referencial teórico para ponerlas en sintonía con el razonamiento matemático y los procesos de validación. Es también de esa manera que un individuo configura un constructo teórico acerca de un objeto. La incidencia del tipo de tarea es fundamental, pues esta debe proponer que se activen todas las génesis, de esta manera el estudiante hará una construcción suficientemente completa del objeto en estudio (Montoya, Mena y Mena, 2014). Una tarea que se limite a la génesis semiótica, por ejemplo, puede obstruir los aspectos operativos que ofrece y/o requiere el contenido en cuestión, o la validación de tal objeto.

Se puede observar el carácter paradigmático de la teoría; un paradigma se instituye cuando una comunidad de individuos acuerda formular problemas, así como organizar sus soluciones, privilegiando ciertas herramientas o ciertas formas de pensamiento. Al espacio de trabajo “paradigmático”, tal como es definido por esta comunidad, se le llamará ETM *de referencia*. La teoría considera una distinción además, entre el ETM *personal*, que es el que usa un individuo (estudiante, profesor) en su propia construcción de conocimiento, y el ETM *idóneo* que sería el que utiliza un profesor o enseñante para cooperar en la construcción del ETM *personal* de un aprendiz. El diseño del ETM *idóneo* por parte del profesor va a depender de su ETM *personal*, mientras que el ETM personal de un estudiante se pondrá en evidencia cuando este se enfrente a una situación problemática

PARADIGMAS EN EL ÁLGEBRA: LO QUE SE PRETENDE ESTUDIAR

Basados en la teoría del ETM, en una primera instancia nos preguntamos acerca la factibilidad e importancia de considerar un “espacio de trabajo algebraico”, explicitando algunas similitudes y diferencias en relación al trabajo geométrico (ETG). Para sustentar lo anterior se presentan antecedentes histórico-epistemológicos en relación al álgebra, los que muestran la presencia de distintos estadios en cuanto al trabajo algebraico, los cuales coinciden (*a priori*) con la idea de paradigma en la teoría del ETM, según lo explicitado en un principio.

En vista de lo anterior tomando como base el aporte de Mena, Mena, Morales y Montoya (2012) y en base a un estudio histórico-epistemológico, se proponen como hipótesis los siguientes paradigmas algebraicos:

A1: como la etapa de la *aritmética elemental*, en dónde ya hay números y algún lenguaje numérico, incluso escrito.

A2: como la etapa del *Álgebra elemental*, ya presenta una posibilidad de trabajar con letras, variables, incógnitas, parámetros.

A3: sería la etapa de las *estructuras algebraicas*, el cual es un estadio avanzado y contemporáneo, que corresponde además a ideas generales de conjuntos y de estructuras algebraicas.

Basado en lo anterior, el objetivo general que se persigue (y necesario para poder configurar un ETM en el álgebra) es el de validar los paradigmas A1, A2 y A3 antes mencionados, para luego analizar los problemas que se generan en la transición entre cada uno de ellos, focalizándose específicamente en A1 y A2, es decir la ruptura entre la *aritmética* y el *álgebra elemental*, y cómo en esta ruptura influye el conflicto entre el ETM personal e idóneo del profesor.

Validación de los paradigmas algebraicos

En el caso de la geometría, la emergencia de los paradigmas nace desde una mirada al currículum y diversas miradas desde un primer supuesto paradigmático a la práctica docente; no obstante lo anterior, detectamos que tras el levantamiento de los paradigmas geométricos estos se relacionaban directamente con el desarrollo histórico de la geometría. En nuestro caso, consideramos oportuna

una mirada histórica en relación al álgebra, es decir un estudio histórico-epistemológico del álgebra. Pero basarnos en lo anterior para hacer un levantamiento como el que queremos no parece suficiente, por lo anterior consideramos necesario hacer una triangulación de fuentes en el marco de una investigación de tipo cualitativa.

Para ello se tomará consideramos como primera fuente nuestro estudio histórico epistemológico al álgebra. Otra fuente corresponde al desarrollo actual del currículum con respecto a la disciplina del álgebra. Las hipótesis presentadas respecto a los paradigmas en el álgebra emergen desde el estudio histórico-epistemológico, pero el contraste con lo que es el desarrollo del currículum dará más fuerza y validez al levantamiento. Además de esto se contrastará con el estado del arte respecto a la investigación acerca de los fenómenos ligados a la enseñanza del álgebra. Juntamente con lo anterior, se hará un levantamiento de datos. En este levantamiento de datos se pretende también fundamentar los paradigmas, aunque la persecución de la toma de datos apunte a especificar el comportamiento de los elementos de un espacio de trabajo en cada paradigma.

A MODO DE CONCLUSIÓN: RESULTADOS PRELIMINARES

Un primer resultado tiene que ver con el considerar a la aritmética como parte del álgebra, lo cual es fundamental para considerar válido el paradigma A1, por ejemplo Drijvers y Hendrikus (2003), entre otros autores, exponen que Álgebra tiene sus raíces en la Aritmética y depende fuertemente de su fundamentación Aritmética, puesto que la aritmética tiene muchas oportunidades para simbolizar, generalizar y razonar algebraicamente. Para Schliemann, D. Carraher y B. Brizuela (2003) “la aritmética es una parte del álgebra, a saber, la parte que se ocupa de los sistemas de números, la recta numérica, las funciones numéricas, etc.”. Además, las investigaciones concuerdan con que la aritmética es fundamental para poder iniciarse en el álgebra elemental (simbólica); en este sentido J. Novotná y B. Sarrazy exponen que las dificultades que se generan en el álgebra son producto de no tener claridad en los aspectos estructurales de la aritmética:

“the difficulties in the approach to algebra are rooted in the scarce attention paid to the relational or structural aspects of arithmetics which constitute the basis of elementary algebra”

(Novotná y Sarrazy, 2005)

Otra idea que refuerza el paradigma A1, proviene desde el estudio del currículum. El NCTM (2000), recomienda que el desarrollo del pensamiento algebraico sea abordado desde los primeros años de escolarización. Una idea similar nace de tendencias como el “Early álgebra” y “Pre-álgebra” en el sentido desde el desarrollo del temprano del álgebra en el currículum (Drijvers y Hendrikus, 2003). Frente a esto es necesario mencionar que desde la década de los ochenta diferentes autores, como por ejemplo Davis (1985), argumentaban la necesidad de iniciar una enseñanza del Álgebra, desde la Educación Primaria, que preparase a los alumnos para abordar los aspectos epistemológicos involucrados en la transición de la Aritmética al Álgebra que se daban en la Secundaria.

Para finalizar, es necesario explicitar se está convergiendo hacia una fundamentación científica de los paradigmas A1, A2 y A3 en el sentido de su viabilidad para constituir un ETM algebraico. Con lo anterior se pretende estudiar qué elementos permitirán establecer de mejor manera la transición entre estos.

Referencias

- Artigue, M. (2002). *Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work*. *Int. Journ. of Computers for Mathematics Learning*, 7, 245–274.
- Davis, R. B. (1985). *ICME–5 Report: Algebraic thinking in the early grades*. *Journal of Mathematical Behaviour*, 4, 195-208.
- Drijvers, P. y Hendrikus, M. (2003). *Learning algebra in a computer algebra environment: design research on the understanding of the concept of parameter*. Tesis doctoral no publicada. Utrecht: Universidad de Utrecht.
- Gonseth, F. (1945-1955). *La géométrie et le problème de l'espace*. Éditions du Griffon, Lausanne.
- Houdement, C. & Kuzniak, A. (2006). *Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie*. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 11, 175-193.
- Kuhn, T. (1971). *La estructura de las Revoluciones Científicas*. México: Fondo de Cultura económica.
- Kuzniak, A. (2004). *Paradigmes et espaces de travail géométriques. Note pour l'habilitation à diriger des recherches*. Institute de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, Université de Paris VII – Diderot.
- Kuzniak, A. (2011). *L'Espace de Travail Mathématique et ses Genèses*. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 16, 9-24
- Kuzniak, A. & Richard, P. (2014). *Espacios de Trabajo Matemático. Puntos de vista y perspectivas*. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME*, número especial, 5-15.
- Mena, A.; Mena, J.; Morales, A. y Montoya, E. (2012). *Hacia una noción de espacio de trabajo algebraico*. *Tercer Simposio Espacio de Trabajo Matemático, Universidad de Montreal, Canadá, noviembre*.
- Montoya, E.; Mena, A; y Mena, J. (2014). *Circulaciones y génesis en el Espacio de Trabajo Matemático*. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME*, número especial, 181-198.
- Sarrazy, B. & Novotná, J. (2005). *Didactical contract: Theoretical frame for the analysis of phenomena of teaching mathematics*. In J. Novotná (Ed.), *SEMT 05* (pp. 33-45). Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta.
- Schliemann, A. D., Carraher, D. W., Brizuela, B. M., Earnest, D., Goodrow, A., Lara–Roth, S. et al. (2003). *Algebra in elementary school*. En N. Pateman, G. Dougherty y J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and the 25th Conference of Psychology of Mathematics Education North America*, Vol. 4 (pp. 127-134). Honolulu, Hawaii: CRDG, College of Education, University of Hawaii.

ⁱFinanciado por el programa de Becas Conicyt: Doctorado Nacional 2015.