

LA NOCIÓN DE CONSERVACIÓN DEL ÁREA COMO PARTE DE LA CONFORMACIÓN INSTITUCIONAL DE LA INTEGRAL DEFINIDA EN LA EDUCACIÓN BÁSICA EN MÉXICO. UN ANÁLISIS BIBLIOGRÁFICO.

Ismael Hurtado Pereida, Eduardo Carlos Briceño Solís, José Iván López Flores

hupeia@hotmail.com, ecbs71@gmail.com, ivan.lopez.flores@gmail.com

Universidad Autónoma de Zacatecas “Francisco García Salinas”

Avance de investigación

Profesionalización docente en matemáticas

Medio superior

RESUMEN

El concepto de integral definida mediante antiderivadas para calcular áreas, es insuficiente para la mayoría de los estudiantes ya que, no comprenden porqué utilizarlas para calcular áreas, limitándose a cálculos algorítmicos y adquiriendo raramente una comprensión de éste. Hacen falta estudios del desarrollo del uso del área y de qué forma permiten comprender este concepto. La investigación toma el trabajo de Cabañas-Sánchez (2011), como referente a esta reflexión, ya que se evidencia una resignificación de la integral definida mediante la conservación del área en transformaciones geométricas y analíticas. Resultado de este trabajo, nos permite plantear un análisis bibliográfico ampliado para analizar cómo es el uso de la noción de conservación del área en los distintos libros de texto (nivel secundaria, bachillerato y elemental), que podría ofrecer un marco de referencia para futuras propuestas de enseñanza de la integral definida.

PALABRAS CLAVE: Integral definida, resignificación, conservación, análisis bibliográfico.

INTRODUCCIÓN

Como resultado de un estudio y reflexión sobre la tesis doctoral de Cabañas-Sánchez (2011) y de algunas investigaciones en torno a la integral definida, se ha podido identificar la necesidad de un análisis bibliográfico que posibilite identificar las actividades que se están planteando en los niveles elemental y medio superior, que permitan una mejora en la enseñanza del concepto de integral definida. A pesar del crecimiento considerable en las investigaciones en torno a éste tema, hay un reconocimiento en cuanto a ciertas dificultades respecto a la interpretación y el hecho de que si la integral no está asociada al cálculo del área bajo la curva, se muestren grandes dificultades para su interpretación (Camacho, Depool & Garbín, 2008), además de que, sobresalen los aprendizajes memorísticos; luego, es poco el avance que se tiene en cuanto a la implementación de prácticas dentro del aula que planteen el concepto de integral definida interpretándola como área bajo la curva y con el concepto de conservación del área.

Un primer acercamiento en algunas investigaciones en torno a las problemáticas sobre el concepto de integral definida exponen: Cabañas-Sánchez (2011), reporta una resignificación del concepto de integral definida desde el punto de vista del área bajo la curva, conjugando a los usos, contextos y procedimientos del área a la matemática, con la conservación del área en transformaciones geométricas y analíticas (Ver ilustración 1).

9. Profesionalización docente en matemáticas

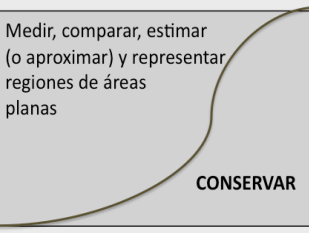
	TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS	TRANSFORMACIONES ANALÍTICAS
Usos del área	Medir, comparar, CONSERVAR , representar regiones de áreas planas	Medir, comparar, estimar (o aproximar) y representar regiones de áreas planas 
Contextos	Polígonos convexos y no convexos	Funciones polinómicas $f(x)=kx^n$, k, n ($n>0$) continuas en un intervalo $[a,b]$.
Procedimientos	Composición y descomposición de figuras, asimetrías en el plano o bien en teoremas, axiomas, propiedades de las figuras geométricas, en relaciones matemáticas generales, así como en otros conceptos matemáticos.	Procesos de aproximación, partición del intervalo, sumas de Riemann, integral definida, fórmulas básicas para el cálculo de área.

Ilustración 1. Esquema general de la resignificación de la integral definida (Cabañas-Sánchez, 2011)

Cabe hacer mención sobre la aportación realizada en el trabajo de Cabañas-Sánchez (2011), donde con el propósito de profundizar en el entendimiento de los fenómenos didácticos ligados al proceso de aprendizaje de la integral definida articulándola con el concepto de área, indagó cómo es presentado este objeto matemático dentro del discurso matemático escolar bajo el medio didáctico que son los libros de texto, desde nivel elemental hasta universidad, además de los programas de enseñanza de matemáticas y libros para el maestro en el caso de la educación primaria. El marco de referencia para el análisis de los libros de texto, fueron los usos del área en el discurso matemático escolar, los contextos en que se presenta el estudio del área y los procedimientos puestos en juego en dicha presentación. Interesó mostrar la trayectoria que sigue la representación del concepto de área como objeto de la geometría y del análisis en la didáctica matemática y las implicaciones que conlleva su enseñanza en torno de los cuestionamientos siguientes:

- 1.- ¿Cómo se representa el concepto de área en la geometría?
- 2.- ¿Cómo se transita el concepto de área por la medición?
- 3.- ¿Cómo transita el concepto de área de la geometría al cálculo?
- 4.- ¿Cuáles son los usos, contextos y procedimientos en que se presenta el concepto de área en el discurso matemático escolar?

Finalmente, la autora organiza los diferentes usos, contextos y procedimientos en que se presenta el área en la matemática, mostrando los siguientes resultados:

Usos, contextos y procedimientos del área en la matemática de la primaria

El concepto de área en la primaria		
Usos del área	Contextos	Procedimientos
El área es usada para:	Estático	- <i>Transformaciones sobre planos:</i>

9. Profesionalización docente en matemáticas

<ul style="list-style-type: none"> - Conservar - Comparar - Estimar - Medir - Representar 		<p>componer y descomponer, recortar, pegar, armar, relacionar, repartir, ubicar o unir.</p> <ul style="list-style-type: none"> - <i>Trazos</i>: superponer, recubrir y reproducir figuras, pintar, copiar, dibujar y unir puntos. - <i>Aproximaciones de valores</i> - <i>Conteo de unidades de área</i> - <i>Asociación de cantidades</i> - <i>Fórmulas</i>
--	--	---

Ilustración 2. Usos, contextos y procedimientos del área en la matemática de la primaria (Cabañas-Sánchez, 2011).

Usos, contextos y procedimientos del área en la matemática de la secundaria

El concepto de área en la primaria		
Usos del área	Contextos	Procedimientos
<p>El área es usada para:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Conservar, - comparar - Estimar - Medir - Representar 	<p>Estático</p>	<ul style="list-style-type: none"> - <i>Transformaciones en el plano</i>: movimientos, componer y descomponer, recortar, pegar, armar, relacionar, repartir, ubicar o unir. - <i>Trazos</i>: superponer, recubrir y reproducir figuras, pintar, copiar, dibujar y unir puntos. - <i>Aproximación de valores</i> - <i>Conteo de unidades de área</i> - <i>Uso de fórmulas</i> - <i>Relaciones geométricas</i>: relaciones de congruencia, relaciones de semejanza. - <i>Uso de ecuaciones</i>

Ilustración 3. Usos, contextos y procedimientos del área en la matemática de la secundaria (Cabañas-Sánchez, 2011)

Para el nivel medio superior, el concepto de área se estudia en el ámbito de los objetos geométricos (igualdad y proporcionalidad en torno a la congruencia, semejanza, homotecia y teorema de Pitágoras) y analíticos; se da un cambio en el lenguaje, pues los estudiantes deben pasar al puramente analítico al situar el estudio del concepto de área sobre funciones. Para el nivel superior se observa un cambio, pues su estudio se ubica en los procesos formales mostrando cambios en el lenguaje, la simbología y la forma de estudiarlos (demostraciones lógicas presentadas como teoremas o problemas potenciando las pruebas empíricas).

Turégano (1998), presenta un modelo basado en un análisis histórico para introducir a la integral definida como una continuación de la noción de área, que los estudiantes conocen desde la primaria con la medición de áreas de figuras conocidas y que debe continuar en secundaria con el estudio de áreas más especiales; Camacho, Depool y Garbín (2008), haciendo uso de CAS (*Computer Algebra System*) identifican que cuando los alumnos se enfrentan

dentro de contextos puramente matemáticos y con funciones continuas a trozos, presentan dificultades de interpretación, al igual que cuando plantean su resolución y cuando calculan las integrales; así mismo, cuando los problemas están fuera del contexto matemático y la integral no está asociada al cálculo del área bajo la curva, se muestran grandes dificultades para interpretar la integral definida como un valor que puede medir longitud como desplazamiento, o longitud de una curva.

Rondero y López (2013), a través de un recorrido histórico-epistemológico del cálculo de áreas bajo curvas persiguen rescatar significados de la integral definida y así propiciar su instalación en la didáctica del cálculo; esto para responder porqué los estudiantes de bachillerato tienen serias limitaciones respecto a los significados de la integral definida; por su parte Ramírez, Muñoz e Ibarra (2011), documentan que los estudiantes no logran una aprehensión conceptual de la integral definida, sino un aprendizaje mecánico además de, una aprehensión principalmente algebraica y en menor proporción una geométrica. Cordero (2005), evidencia que tanto el profesor como el estudiante se inclinan más por describir la definición de la

integral definida por medio de la resta $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, en lugar de considerarla como

el límite de una suma $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\varepsilon) \Delta x_i$, por lo que no se alcanzan a reconocer la

relación que guardan las funciones f y $F: f=F'$, en el sentido del teorema fundamental del cálculo, con lo que los profesores y estudiantes no saben explicar por qué ésta resta calcula el área bajo la curva, además de que se entiende el cálculo de primitivas como un procedimiento algorítmico.

Con el fin de evidenciar qué definiciones de la integral definida son dadas por estudiantes de bachillerato, qué imágenes de la integral definida los estudiantes usan en distintos problemas y qué concepciones erróneas (*misconceptions*) exhiben respecto a la integral definida, Rasslan & Tall (2002), documentan que una gran parte de los estudiantes no parecen ser capaces de explicar la definición de integral definida ni aplicarla para funciones especiales (en el sentido de *concept definition*) como por ejemplo, la función parte entera; no hay una comprensión del concepto de integral definida y los estudiantes no son capaces de encontrar el área entre la gráfica de la función y el eje “x”.

Kouropatov & Dreyfus (2014), documentan que los estudiantes reconocen los constructos previos y los integran durante los procesos de construcción y razonan naturalmente sobre la pertinencia sobre conceptos como longitud, área, entre otros, en términos de aproximación; además de que los procesos de construcción de los estudiantes no son lineales y toman lugar en específicos contextos sociales y personales, pues hay diferencias entre sus perfiles matemáticos, estilo de vida, apoyo requerido y tipo de colaboración. Thomas & Hong (1996), muestran que hay una tendencia a ver el cálculo integral como una serie de procesos con algoritmos asociados y en no desarrollar las comprensiones de los conceptos que ofrecerían la versatilidad necesaria del pensamiento además de que, los manipuladores simbólicos pueden ser útiles para desarrollar una comprensión de los conceptos fundamentales del cálculo evitando un ambiente pasivo dentro del salón de clase.

Cordero, Muñoz y Solís (2003) hacen una presentación del cálculo integral considerando su utilidad como instrumento matemático utilizado para resolver ciertos tipos de problemas a lo

largo de la historia y que han tenido que ver con la determinación de áreas, longitudes y volúmenes, además de predecir cambios en cantidades variables (crecimiento de la población, distancia que recorre un móvil y costos de producción), considerando las concepciones más usuales de éstas representaciones mencionadas históricamente, incluyendo algunos procedimientos para medir el área de una región acotada a través de un área conocida, algunas nociones de aproximación considerando aspectos elementales de la medición, tanto interior como exterior del área de una región acotada; se discuten algunas interpretaciones de la integral como suma: la suma de áreas de rectángulos pequeños y la suma de áreas de rectángulos a través de un proceso al límite. Manejan algunas relaciones sobre el cálculo integral y el cálculo diferencial a través de la operación inversa de la derivada $\int f(x)dx = F(x) + C$, tratando al final con algunos problemas específicos que se derivan de los fenómenos de variación y cambio dadas dos características: dadas las condiciones iniciales, encontrar la ley que cuantifica al fenómeno de variación o cambio y encontrar la ley que cuantifica al fenómeno de variación o cambio cuando no son conocidas las condiciones iniciales del problema. Todo esto con la finalidad de ayudar a precisar los conceptos del cálculo integral.

Derivado de este primer acercamiento en algunos trabajos realizados en torno a la integral definida, nos planteamos las siguientes preguntas: ¿Cuáles son los usos y procedimientos que se le dan al área dentro de los libros de texto de nivel elemental y medio superior? ¿Cuáles son los significados que llevan a calcular el concepto de área bajo la idea de conservación en los libros de texto? ¿Cuáles son los usos más comunes en que se presentan los problemas asociados al área? ¿Cuáles son los usos y procedimientos asociados con problemas de conservación del área? ¿Qué transformaciones analíticas o geométricas se presentan en los libros de texto? Todas estas cuestiones se analizan bajo la perspectiva de los nuevos esquemas basados en competencias y las reformas vigentes.

Luego, ésta investigación tiene el interés de revisar los programas de estudio y los libros utilizados en los niveles básico y medio superior con la intención de encontrar el desarrollo de la noción de conservación del área, es decir:

- Identificar cómo se está desarrollando la noción de área en los libros de texto de nivel elemental y medio superior.
- Qué tipo de ejercicios se plantean en los libros de texto para el cálculo de áreas.
- Identificar qué tipo de transformaciones se asocian a los cálculos del área.
- Observar si hay una articulación entre los usos y procedimientos que se utilizan en nivel elemental y nivel medio superior y si es así, cómo se está articulando.
- Analizar si la bibliografía de educación básica y media superior provee elementos que nos permitan asociar los usos del área en la matemática, con la conservación del área en transformaciones analíticas (Cabañas-Sánchez, 2011).

MARCO TEÓRICO

Basándonos sobre el contexto de una de las referencias principales que han motivado ésta investigación, me refiero a la resignificación de la integral definida con la conservación del área (Cabañas-Sánchez, 2011), la cual retoma conceptos como usos (formas en que es empleada determinada noción en un contexto específico), contextos (entornos situacionales en los que se considera un hecho), procedimientos (formas de organización de una situación), práctica (conjunto organizado de actividades objetivas e intencionales para resolver un problema dado),

práctica social (no es lo que hace en sí el individuo o el grupo (no es la práctica ejecutada), sino es aquello que les hace hacer lo que hacen, digamos que norma su accionar; la teoría identifica como prácticas el medir, predecir, modelar y convenir (Cantoral, 2013)), contextos, entre otros elementos por definir; se abordarán en el sentido que ofrece el marco teórico de la tesis de Cabañas-Sánchez (2011) con una perspectiva socioepistemológica, teoría que modela la construcción social del conocimiento, dado que el saber matemático se han constituido fuera socialmente en ámbitos no escolares y su introducción al sistema educativo le obliga a una serie de modificaciones que afectan su estructura y su funcionamiento de manera que afecta también, a las relaciones que se establecen entre estudiantes y profesor (Cantoral, 2013).

La teoría socioepistemológica de la matemática educativa se ocupa entonces del problema que plantea la construcción social del conocimiento matemático y el de su difusión institucional. Dado que este conocimiento se ha constituido socialmente, en ámbitos no escolares, su difusión hacia y desde el sistema de enseñanza le obliga a una serie de modificaciones que afectan directamente su estructura y su funcionamiento, de manera que afectan también a las relaciones que se establecen entre el profesor y sus estudiantes (Cantoral, 2013), donde el libro de matemáticas es un medio de validar la introducción del saber matemático al sistema educativo; luego, las matemáticas están presentes escondidas tras los pliegues de las prácticas cotidianas en los seres humanos cuando clasifican, predicen, narran, comparan, transforman, distribuyen, representan, construyen, interpretan, justifican, explican, cuentan o miden (Cantoral, 2013), las actividades propuestas dentro de los libros de texto.

MÉTODO

Se pretende realizar un análisis bibliográfico con el fin de buscar Cuáles son los usos y procedimientos que se le dan al área dentro de los libros de texto de nivel elemental y nivel medio superior, mediante cierta unidad de análisis y bajo la perspectiva de los nuevos esquemas basados en competencias, las reformas vigentes y que comprende el estudio de los libros de texto para:

Nivel escolar de primaria: los seis libros correspondientes a los grados escolares, además de los libros de ciencias naturales y geografía.

Nivel escolar de secundaria: estamos gestionando una lista con los libros más utilizados en los planteles del estado de Zacatecas para cubrir al menos el 70% de la población estudiantil.

Nivel escolar de bachillerato: se considerarán para analizar los planes oficiales de la UAZ (Universidad Autónoma de Zacatecas), COBAEZ (Colegio de Bachilleres del Estado de Zacatecas) y los libros a analizar serán los sugeridos dentro de los programas de estudio.

REFLEXIONES / CONCLUSIONES

A partir del análisis de los antecedentes en torno a la integral definida, hay planteamientos que presentan modelos para introducir el concepto de integral definida como una continuación del área en niveles previos al estudio formal del cálculo integral con el uso de tecnologías informáticas; incluso, a través de un recorrido histórico-epistemológico con el cálculo de áreas bajo curvas, con la intención de rescatar significados de la integral definida que propicien su instalación en la didáctica del cálculo quedando de relieve también, serias limitaciones que tienen los estudiantes respecto a los significados de la integral definida. Por otra parte, si la integral definida no está asociada al cálculo del área, se muestran grandes dificultades para su interpretación y esto lleva a considerar ¿Será más problemática la enseñanza de la integral

definida asociada al área, que asociada a la idea de conservación del área? Parte de nuestros estudios a futuro, estarán orientados a reflexionar a profundidad esta pregunta.

Luego, hay concordancia en el hecho de que los estudiantes no logran una aprehensión conceptual de la integral definida, sino solo, aprendizajes mecánicos y comprensiones algebraicas sobre todo la geométrica, además de que, parecen no ser capaces de explicar la definición de integral definida ni aplicarla; en contraste, se exhibe también que los estudiantes son capaces de utilizar y reconocer los constructos o conocimientos previos y son capaces de integrarlos durante los procesos de construcción con una moderada ayuda del profesor además de que, razonan naturalmente sobre la pertinencia de conceptos como el área (Kouropatov & Dreyfus, 2014).

Debemos reflexionar sobre qué elementos intervienen para que estos conceptos previos como el área o la longitud, emerjan de manera natural y sean usados bien o mal por los estudiantes y si también el currículo, la escuela, el profesor, los libros de texto o el entorno sociocultural de cada estudiante han contribuido para que esos elementos aparezcan; un elemento fundamental que guía dentro de las prácticas escolares son los libros de texto, luego, esto me lleva a cuestionarme ¿Hay acercamientos en los libros de texto que vayan más allá de la noción de área, es decir, con la noción de conservación del área?

REFERENCIAS

- Cabañas-Sánchez, G. (2011). *El papel de la noción de conservación del área en la resignificación de la integral definida. Un estudio socioepistemológico*. Tesis de doctorado no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México, D.F.
- Camacho, M., Depool, R., y Garbín, S. (2008). Integral Definida en diversos contextos. Un estudio de casos. *Educación Matemática*, 20(3), 32-57.
- Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre la construcción social del conocimiento*. Barcelona, España: Gedisa.
- Cordero, F. (2005). El rol de algunas categorías del conocimiento matemático en educación superior. Una mirada socioepistemológica de la integral. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 8(3), 265-286.
- Cordero, F., Muñoz, G., y Solís, M. (2003). La integral y la noción de variación. Serie: Cuadernos de Didáctica. *Grupo Editorial Iberoamericana, México*.
- Juárez, F.P. y Cabañas-Sánchez, G. (2011). Prácticas matemáticas asociadas al desarrollo de usos del área en el estudio de la integral definida. En L. Sosa, R. Rodríguez y E. Aparicio (Eds.). *Memorias de la décima Escuela de Invierno en Matemática Educativa* (pp. 184-190). En México: Red de Centros de Investigación en Matemática Educativa A. C.
- Kouropatov, A., & Dreyfus, T. (2014). Learning the integral concept by constructing knowledge about accumulation. *ZDM*, 46(4), 533-548. doi: 10.1007/s11858-014-0571-5
- Ramírez, P., Muñoz, M. e Ibarra, K. (2011). Aprendizaje de la Integral Definida en estudiantes de Ingeniería. *ReCalc*, 3, 32-42.

9. Profesionalización docente en matemáticas

- Rasslan, S. & Tall, D. (2002). Definitions and Images for the Definite Integral Concept. In: Anne D. Cockburn & Elena Nardi (Eds.). *Proceedings of the 26th Conference of International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Norwich, UK, 4, pp. 89-96.
- Rondero, C., y López, R. (2013). Otros significados epistemológicos de la integral definida. En Flores R. (Ed.). (2013). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, Vol. 26, 1085-1092*. México, DF: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.
- Thomas, M. O. J., & Hong, Y. Y. (1996). The Riemann integral in calculus: Students' processes and concepts. In P. C. Clarkson (Ed.), *Proceedings of the 19th Mathematics Education Research Group of Australasia Conference* (pp. 572-579). Melbourne, Australia.
- Turégano, P. (1998). Del área a la integral. Un estudio en el contexto educativo. *Enseñanza de las ciencias, 16(2)*, 233-249.

