GRAFICAR PARÁBOLAS

Barreiro, F.[a], Sancho, R.[b], Díaz, L.[c];
Universidad de Valparaíso;
florencia.barreiro@alumnos.uv.cl [a], rodrigo.sancho@alumnos.uv.cl [b], leonora.diaz@uv.cl[c]

Resumen

Se exponen los resultados de una experiencia que inicia con la pregunta orientadora ¿Quéproblemas se presentan al figurar una expresión analítico algebraica de segundo grado? Se operacionaliza ésta en reactivos que se aplican a dos estudiantes de enseñanza media. Se recurre a las categorías de herramientas, procedimientos y argumentos propias a enfoques de aprendizaje matemático desde la actividad, para analizar los desarrollos estudiantiles. Los análisis muestran que en un caso se figura una parábola despejando una variable y luego se obtiene valores que puntea en el plano cartesiano. En el otro caso se recurre a herramientas, procedimientos y argumentos de orden algebraico, inconducentes.

Palabras clave: *Graficar, parábola, aprendizajes*

INTRODUCCION

Este trabajo forma parte de una línea de investigación en curso que aborda las cuestiones que emergen desde los problemas que manifiestan estudiantes al gráficar expresiones cuadráticas. Esta gráfica es de particular interés para iniciar en lo no lineal a los estudiantes y por su presencia en modelaciones de distintas disciplinas. En documentos curriculares (Mineduc, 2009) y en la actividad usual de las salas de clases se expresa la relación entre dos variables recurriendo a tablas de valores, expresiones algebraicas y gráficos en sistemas de coordenadas. En palabras de Duval (1999) la relación se comunica en esos tres registros. Y las aulas enseñan cómo construir tales representaciones y los métodos para manipularlas, en la intención de expresar relaciones entre dos variables como funciones. Se han venido desarrollando estudios didácticos que proveen de elementos para robustecer su enseñanza y aprendizaje y más específicamente el desplazamiento entre ellos. Este estudio explora prácticas de figuración de parábolas desde expresiones algebraicas.

Marco conceptual

Pretender que un estudiante comprenda y resuelva un problema matemático o de otra área, requiere desplegar procedimientos, recurrir a herramientas, argumentando sus modos y medios de solución. Estudios reportan sobre problemáticas originadas por la ecuación, que Lehman (1989) llama parabólica, y, su figuración.Los estudiantes enfrentados a figurar la ecuación parabólica, transitarían desde comprenderla, enseguida reflexionar para posteriormente figurarla. Estas fases se corresponderían con las etapas, jerárquicas, para abordar una problemática, que son: comprensión de la problemática, concepción de un plan, ejecución del plan y visión retrospectiva (Polya, 1965). Brousseau (1986) puntualiza que un medio, sin intenciones didácticas es insuficiente para que el estudiante construya los conocimientos culturales que cada país decide en su escolaridad obligatoria. Cabe preguntarse por las intenciones didácticas que subyacen a una actividad como figurar la parábola. Por su parte Duval (1999) postula que para propiciar la construcción de los conceptos no resulta suficiente el trabajo en un solo sistema de representación, sino que es necesario inducir a los estudiantes a realizar las actividades de conversión de una representación a otra, en ambos sentidos. Más recientemente los autores Carrasco, Díaz y Buendía (2014) reportan una complejidad de elementos concurriendo con cada figura gráfica estudiantil. En su estudio los autores deconstruyen figuraciones estudiantiles que los estudiantes desarrollan para dar cuenta de modo gráfico a una caída libre. Si bien se esperaban gráficas cartesianas de coordenadas tiempo y altura, los jóvenes produjeron cómics. Más adelante también docentes elaboran cómics para dar cuenta de relaciones entre dos variables. Los autores levantan la noción de espacio epistémico de figuración para comprender producciones que estaban lejos de ser las esperadas por los investigadores, entre ellas las parábolas. Esto muestra que los estudiantes enfrentan desafíos para los que el aula no les prepara.

Metodología

En un marco cualitativo, este estudio exploratorio considera un diseño de investigación acción guiado por una pregunta orientadora, con el propósito de determinar problemas que presentan estudiantes al graficar parábolas y obtener información que guie la toma de decisiones de docentes de matemáticas en el aula. Con base en la pregunta orientadora ¿Quéproblemas se presentan al figurar una expresión analítica algebraica de segundo grado? se diseñaron dos reactivos, a modo de instrumentos, para recoger la información. Esta información se constituyó por las respuestas escritas de los estudiantes a los reactivos y las notas de campo registradas por los investigadores, concurrentes a su aplicación. Los reactivos fueron:

Reactivo 1: Grafique la ecuación$6y^2 - 12x = 0$

Reactivo 2: Grafique la ecuación$y^2 - 6y - 8x + 17 = 0$

La selección de los casos, estudiantes del segundo ciclo de enseñanza media, respondió al consentimiento de participar por parte de sujetos de este nivel de la escolaridad obligatoria. Interesó analizar sus producciones en profundidad, a diferencia de un enfoque cuantitativo que procura concluir la extensión de validez de un conjunto de afirmaciones. El análisis de las producciones se levantó desde categorías a las que recurren Carrasco, Díaz y Buendía (2014) para dar cuenta de prácticas de figuración de los sujetos. Se distinguieron herramientas, procedimientos y argumentos que despliegan en sus desarrollos, configurando problemáticas que emergen cuando abordan la actividad de figurar parábolas desde expresiones analítico algebraicas. En la aplicación se solicitó a los estudiantes que graficaran las ecuaciones de cada reactivo, anotadas en la pizarra. La primera reacción de ambos fue que no recordaban esa materia, añadiendo que no sabían qué hacer. Entonces se les informó que se trataba de parábolas y se les solicitó que las graficaran. Los gráficos que debían confeccionar corresponden a parábolas abiertas hacia la derecha (sentido positivo), con su eje en el eje de las abscisas. La primera de ellas en su forma canónica y con el vértice en el origen del plano cartesiano (Lehmann, 1989). Y la segunda parábola con el vértice desplazado del origen a la derecha y hacia arriba.

Descripción e interpretación de los desarrollos estudiantiles

El primer estudiante en el ejercicio 1, despejó la incógnita x en la ecuación cuadrática dada. Hizo una tabla de valores para conseguir distintos pares ordenados que luego ubicó punteando en un plano cartesiano. Unió los puntos de forma consecutiva consiguiendo una curva de perfil parabólico. El estudiante sigue una pulcra trayectoria: se desplaza desde el registro algebraico al tabular y luego al gráfico. En particular logra el gráfico del primer reactivo, grafica con recurso de la tabla de valores que construye desde su despeje de la ecuación, conoce el perfil de la curva parabólica. Pero resultan insuficientes estos conocimientos para lograr la gráfica de la segunda ecuación. En efecto, ante la segunda ecuación señala que no se le ocurre como trabajar con ella. Implementar la estrategia desplegada con el reactivo anterior, tendría como condición necesaria iniciar con el despeje de una de las variables para este estudiante. Pareciera que de una sola mirada evalúa que debe tratar con una ecuación de la que desconoce su tratamiento, desechando su abordaje. De modo análogo a la conducción de un vehículo, el estudiante pierde la conexión con el motor de partida. No imagina modos de obtener pares de valores y tampoco gráficas, siguiendo otras trayectorias. El segundo estudiante en cambio comenzó a trabajar con las ecuaciones cuadráticas, despejando una de las variables de la ecuación en el primer ejercicio y llegando a la ecuación de la parábola en el ejercicio 2. Y mencionó que no recordaba del todo la materia. Luego de revisar el desarrollo en ambos ejercicios queda en evidencia que tenía gran manejo algebraico, pero al no recordar como representar la parábola a partir de la ecuación de ésta no pudo graficar y no encontró otro método para poder hacerlo. No obstante contar con una expresión algebraica desde la que podría desplazarse a una tabla, el procesos más simple de realizar (Duval, 1999) para entonces puntear un bosquejo de gráfica, no contempla esta opción.

Los análisis de los desarrollos estudiantiles muestran, en un caso, como herramientas a la tabla de valores y al plano cartesiano, uso de la ecuación para generar una tabla de valores y luego puntearlos en el plano cartesiano para unirlos de modo de obtener un esbozo de parábola. Basa su acción en que por tratarse de una expresión cuadrática algebraica le corresponderá una figura de tipo parábola. En el segundo caso se observa el uso de la herramienta algebraica con procedimientos que le proveen de una expresión cuadrática algebraica despejando la variable y al cuadrado. No obstante esta expresión parece esconder la parábola al estudiante y le aplica raíz. La expresión a la que arriba tampoco parece sugerirle figura alguna. Los casos se desplazaron solo desde la ecuación a la gráfica y no a la inversa, reflejando la dirección privilegiada por textos, programas y las prácticas del aula. Ambas prácticas de figuración se describen en términos de herramientas, procedimientos y argumentos (ver tablas interpretativas).

Tabla interpretativa, estudiante 1, ejercicio 1

Herramientas	Tabla de valores, plano cartesiano.
Procedimientos	Despeja la variable x. Obtiene coordenadas a partir de la tabla de valores. Ubica los pares ordenados en el plano. Une los puntos formando una curva.
Argumentos	La función cuadrática como relación especial de pares ordenados que obedecen a la regla de asignación.

Tabla interpretativa, estudiante 2, ejercicios 1 y 2

Herramientas	Manejo algebraico.
Procedimientos	Despeja la variable y (primer reactivo). Trabaja algebraicamente con la ecuación cuadrática hasta llegar a la ecuación de la parábola (segundo reactivo)
Argumentos	La cuadrática como una herramienta de representación de curvas parabólicas o lugares geométricos a partir de la variación de sus parámetros (vértice, foco. directriz)

A MODO DE CONCLUSIONES

Una de las cuestiones que se ha observado en el trabajo directo con los estudiantes, es que éstos no relacionan la expresión algebraica de una función cuadrática con las características de su representación gráfica. La naturaleza de procedimientos y argumentos es mecánica y operativa y no favorece el desarrollo de un pensamiento cuadrático. No logran construir significados para lo cuadrático desde estrategias de carácter técnico, ni en lo algebraico ni en lo gráfico**,** En lo que sigue interesa responder a preguntas como las siguientes ¿El estudiante comprende finalidades de desarrollos algebraicos en el proceso de elaborar la gráfica? ¿Cómo varían los procesos de entendimiento para graficar con base en diferentes expresiones analítico algebraicas?

Referencias

Bouciguez, M., Irassar, L. y Suárez, M. (2008). Análisis de estrategias: un estudio de caso para la función cuadrática. En Actas de la I Reunión Pampeana de Educación Matemática, II REPEM. Recuperado de http://repem.exactas.unlpam.edu.ar/cdrepem08/memorias/comunicaciones/Trabinvest/C29.pdf

Brousseau, G. (1986). Fundamentos y métodos de la didáctica de la matemática. Editado en castellano para fines académicos por Martha Villalba y Víctor Hernández desdeFondaments et méthodes de la didactique des mathematiques. Recherches en Didactique de Mathématiques. Vol 7 Nº 2, pp. 33-115. Recuperado de http://www.uruguayeduca.edu.uy/Userfiles/P0001%5CFile%5CFundamentosBrousseau.pdf

Carrasco, E., Díaz, L. y Buendía, G. (2014) Figuración de lo que varía. Enseñanza de las Ciencias, 32.3, pp. 365-384. Recuperado de http://ensciencias.uab.es/article/view/1201.

Díaz, M.E., Haye, E., Montenegro, F. y Córdoba, L. (2013). Dificultades de los alumnos para articular representaciones gráficas y algebraicas de funciones lineales y cuadráticas. En Actas del I Congreso de Educación Matemática de América Central y de El Caribe. República Dominicana.

Duval, R. (1999). Semiósis y pensamiento humano. Traducido al español por Myriam Vega Restrepo. España: GEM.

González, M.T., Martín, E. (2004). Dificultades y concepciones de los alumnos de educación secundaria sobre la representación gráfica de funciones lineales y cuadráticas. En actas de XVI Simposio Iberoamericano de enseñanza Matemática "Matemáticas para el Siglo XXI".Recuperado de www.iberomat.uji.es/carpeta/comunicaciones/77_teresa_gonzalez_2.doc

Lehmann, Ch. (1998). Geometría Analítica. Traducción al español de Rafael García Díaz. Ciudad de México: Limusa.

Mineduc (2012). Guia N2 Matematica II Ciclo de EM. Recuperado de: http://www.mineduc.cl/usuarios/adultos/doc/GuiaN2MatematicaIICiclodeEM.pdf.

Polya (1965). Cómo plantear y resolver problemas. México: Trillas.

ANEXO 1 Desarrollo esperado de los reactivos

<table>
<tr>
<td>

Reactivo 1

$$6y^2 - 12x = 0$$

$6y^2 = 12x$

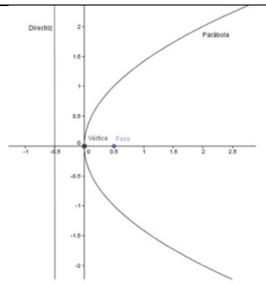
$y^2 = 2x$ Ecuación de la parábola

Vértice: $(0,0)$

Foco: $(0.5,0)$

Directriz: $x = -0.5$

</td>
<td>



</td>
</tr>
<tr>
<td>

Reactivo 2

$y^2 - 6y - 8x + 17 = 0$

$(y^2 - 6y + 9) - 9 - 8x + 17 = 0$

$(y^2 - 6y + 9) = 8x + 9 - 17$

$(y^2 - 6y + 9) = 8x - 8$

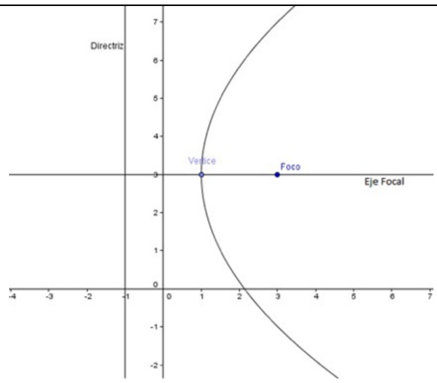
$(y-3)^2 = 8(x-1)$Ecuación de la parábola

Vértice: $(1,3)$

Foco: $(3,3)$

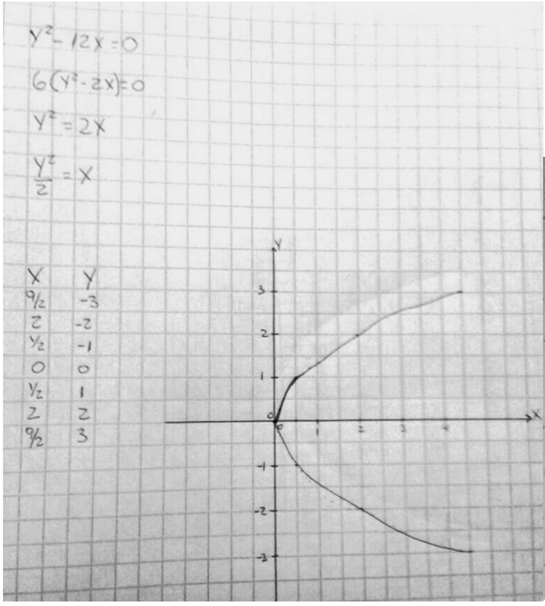
Directriz: $x = -1$

</td>
<td>



</td>
</tr>
</table>

ANEXO 2 Desarrollos estudiantiles de los reactivos



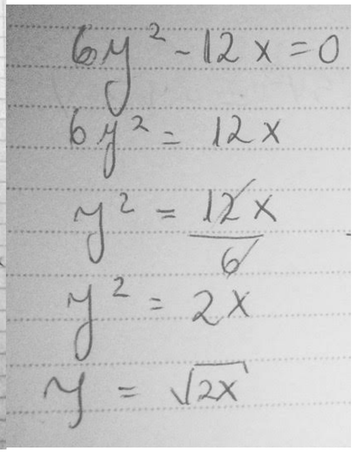


Figura 26. Desarrollo primer estudiante, ejercicio 1.

Figura 2. Desarrollo segundo estudiante, ejercicio 1.

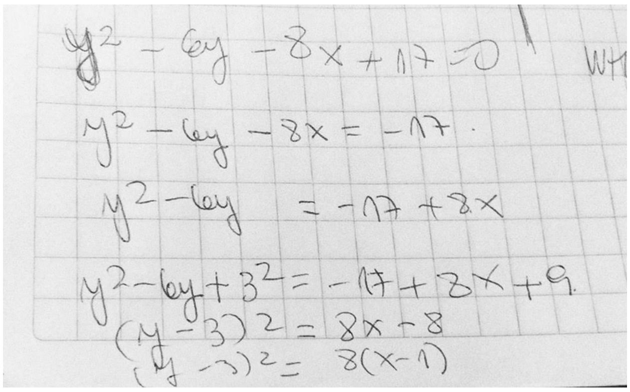


Figura 3. Desarrollo segundo estudiante, ejercicio 2