

# EL USO DE LAS GRÁFICAS Y EL FENÓMENO DE OPACIDAD. EL CASO DEL CONCEPTO DE DERIVADA EN LOS ESTUDIANTES DE PEDAGOGÍA EN MATEMÁTICAS EN CHILE

Claudio Opazo Arellano, Francisco Cordero Osorio

Opazoferrari\_claudio@hotmail.com, fcordero@cinvestav.mx

Cinvestav

Reporte de Investigación

Formación de Profesores

Superior

## RESUMEN

Se problematiza el discurso Matemático Escolar (dME) asumiendo su imposición hegemónica de Significados, Procedimientos y Argumentaciones, lo que deriva en la exclusión de la construcción social del conocimiento matemático en el sistema educativo (Soto, 2010). Tal situación provoca una opacidad de lo matemático, es decir; de ese conocimiento matemático desde el que aprende (Gómez, 2013). Así, esta investigación se centra en evidenciar esa opacidad en un contexto específico; en una comunidad de conocimiento, la cual corresponde a los estudiantes de pedagogía en matemáticas en un proceso de formación inicial de profesores en Chile. País que en la actualidad, enfrenta el desafío de lograr mejorar la calidad de la educación como parte de los nuevos requerimientos sociales de éste.

**PALABRAS CLAVES:** Fenómeno, Opacidad, Usos, Gráficas, Derivada.

## INTRODUCCIÓN

El presente trabajo aborda el complejo escenario que en la actualidad el dME ha generado en el proceso de enseñanza y aprendizaje. De ahí que hablamos del Fenómeno de Opacidad en la construcción social del conocimiento matemático en el cotidiano del ciudadano. Lo cual nos lleva a Identificar, Caracterizar y Ejemplificar los Significados, Procedimientos y Argumentaciones que son opacados por el *discurso matemático escolar* (dME) en la comunidad de estudiantes de pedagogía en matemáticas que son parte de las universidades de Chile. Tal que desde nuestra perspectiva, dicha comunidad posee la responsabilidad de ejercer un rol preponderante en la sociedad, y también en la educación Chilena. Todo ello mediante acciones educativas claras e intencionadas, las cuales se deben ejercer permanentemente con objeto de propiciar en los estudiantes la *construcción social del conocimiento matemático* (CSCM).

Ahora bien, es relevante indicar que la naturaleza del problema es de una alta complejidad, ello porque estamos identificando, caracterizando y denunciando a un sistema de razón que se ha impuesto en el sistema educativo. Lo cual ha generado como consecuencia el olvido y la exclusión de la construcción del conocimiento que se da en el cotidiano del ciudadano, producto de su desarrollo sociocultural (Soto, 2014).

En ese marco tiene sentido considerar que existe una epistemología del conocimiento matemático en el cotidiano no transparente en el dME. A esta idea se ha convenido en llamarle Fenómeno de Opacidad (Gómez, 2013).

De esta manera el dME afecta a comunidades de conocimiento. En este caso, dado los intereses de nuestra investigación, enfocamos la atención a los estudiantes de pedagogía en matemáticas, en Chile; desde un escenario de formación con una situación específica de las gráficas de las derivadas de las funciones. Para analizar tal cometido, se requirió desarrollar una clase de actividades en torno a la transformación de funciones y sus respectivas derivadas, ello con el objeto de reconocer los usos de las gráficas propios de esa comunidad. Lo cual formularía un marco de referencia que caracterice en forma más específica la construcción del conocimiento matemático de la comunidad en cuestión.

Así, para la confección intencionada del conjunto de actividades que se desarrollaron en el marco de nuestro trabajo, se consideró una epistemología de usos de las gráficas de las derivadas, a través de tres momentos: Uso de las gráficas en el discurso matemático escolar; Uso de las gráficas en las derivadas; Uso de las curvas en las derivadas.

Ahora bien, para el reconocimiento de los usos particulares de esta comunidad, incorporamos en la discusión los ejes centrales del *Modelo de Comunidad de Conocimiento Matemático* (MCCM), ello con objeto de identificar la Institucionalización y la Identidad que es parte de los estudiantes de pedagogía en matemáticas en Chile. Sin embargo, consideramos necesario incorporar además, una Caracterización Disciplinar en torno a la formación inicial de estos estudiantes. Ello con el objeto de lograr mayor entendimiento en relación a las prácticas matemáticas que son hegemónicas en esta comunidad.

### MARCO TEÓRICO

Nuestro trabajo se enmarca en la Teoría Socioepistemológica (TS), la cual está inserta la disciplina de la Matemática Educativa (ME). Cuyo objetivo, es brindar explicaciones sobre la construcción del conocimiento matemático y las formas en que éste se institucionaliza en el sistema escolar (Soto, 2010).

En este contexto, destacamos como problemática de la TS, la confrontación entre la obra matemática y la matemática escolar, donde esta última debe reinterpretar y reorganizar la primera (Cordero, 2001). Ello con objeto de establecer un diálogo entre ambas epistemologías, las cuales son de distinta naturaleza.

Ahora bien, la TS implica considerar un conjunto de ideas como: la construcción social del conocimiento, los procesos de institucionalización, los usos del conocimiento, el lenguaje de herramientas, entre otros (Torres, 2013). De ahí que la TS, aborda la discusión desde lo Epistemológico, lo Cognitivo, lo Didáctico y lo Sociocultural. Lo cual sin duda ha permitido tener un panorama amplio, en palabras de Gómez (2009). Tal que ha colaborado en el reconocimiento del por qué un grupo humano se organiza para construir un determinado conocimiento.

Ahora bien, al cuestionar qué implicancias tiene proponer como referencia la TS en nuestro trabajo, destacamos que desde nuestra perspectiva, es hacer eco en torno al *rediseño del discurso matemático escolar* (RdME). Ello con objeto de incorporar justamente las epistemologías que en su mayoría no son consideradas en las prácticas educativas que se dan de manera permanente en el sistema educativo. De ahí que se espera incorporar a la funcionalidad del conocimiento matemático, los usos, los funcionamientos y las formas, en diferentes escenarios como por ejemplos: la escuela, el trabajo y la ciudad (Torres, 2013). Esto con objeto de reconocer las

## 9. Profesionalización docente en matemáticas

prácticas sociales que están detrás de las construcciones del conocimiento matemático y propiciar de esta manera, la descentralización de los objetos matemáticos.

Pero, por qué pensar en la descentralización de los objetos matemático. Lo relevante de este cuestionamiento, es abordar la problemática de fondo, es decir, los objetos matemáticos se han transformado en la estructura sobre lo cual se han llevado adelante los procesos de enseñanza y aprendizaje. Logrando así que la actividad humana sea puesta al servicio de la matemática, y no así la disciplina al servicio de la actividad humana (Soto, 2010).

De lo anterior, surge entonces la necesidad de mirar a las distintas comunidades de conocimientos existentes de tal manera de identificar en ellas aquellas características particulares en torno a la construcción social del conocimiento. Tal que es ahí desde nuestra perspectiva, donde se pueden identificar las identidades de una comunidad específica y por ende, valorar al humano en su rol de constructor de conocimiento. Sin embargo, surge entonces la pregunta de por qué hablar de comunidades de conocimiento. Aquí es importante tener presente como eje de discusión que cada grupo humano, posee ciertas tradiciones, las cuales son fruto de un continuo dentro de esa comunidad.

No obstante, no basta con reconocer sólo la tradición para dar cuenta de las construcciones sociales del conocimiento, sino más bien, lo relevante desde nuestro punto de vista, es el reconocimiento de los usos del conocimiento que son particulares de esa comunidad, ya que de esa manera estamos dando cuenta de la pluralidad epistemológica que existe, fruto de las diversas formas de poner en uso el conocimiento. De ahí la relevancia de pensar y proponer el MCCM para realizar tal labor.

### MÉTODO

Para lograr evidenciar los usos de las gráficas en las derivadas, se utilizó una clase de actividades que permitieron reconocer a estos. Es importante destacar que estas actividades se confeccionaron a partir de nuestra epistemología de usos de las gráficas en las derivadas, a través de tres momentos. Los cuales transitan a nuestro entender, por los diferentes procesos de construcción del conocimiento que debiera recorrer un estudiantes de la comunidad estudiada.

Esta clase de actividades, estuvo pensada para observar el uso del argumento de la primera y segunda derivada en el caso de la primera actividad. Luego se consideró trastocar el uso de la gráfica en este tipo de escenario; para ello se presentó en el segundo momento, una situación de transformación de funciones de tal manera de reconocer los patrones gráficos y analíticos, cuando se varían los parámetros de las funciones dadas. Finalmente se discute los aspectos globales del análisis de las curvas; por ello la última actividad aborda el análisis de éste tipo, a partir de transformaciones de curvas y análisis de las derivadas de éstas.

Nuestra población de estudio, es la comunidad de conocimiento de estudiantes de pedagogía en matemáticas de las universidades de Chile. Ahora bien, del total del padrón de universidades que son parte de este, sólo se tomaron en cuenta dos instituciones, las cuales son la Universidad Santiago de Chile y la Universidad Católica Silva Henríquez. Ambas instituciones se caracterizan por tener una tradición en la formación inicial de profesores, de ahí su consideración para nuestro trabajo.

Destacamos además, la consideración de un grupo por cada una de las instituciones, para el caso de la primera, se contó con el apoyo de un grupo de estudiantes de tercer año de universidad.

Ahora bien, de la segunda universidad participaron estudiantes pertenecientes al quinto año de estudio.

Finalmente indicamos que ambos grupos fueron controlados en un escenario de tres sesiones de trabajo. Ahí los estudiantes lograron debatir las ideas que fueron surgiendo en torno a cada una de las actividades.

## RESULTADO

La siguiente imagen, corresponde a la sección 1.2 de nuestra primera actividad. Destacamos que en esta parte de la actividad se discute el uso del argumento de la primera y segunda derivada desde los aspectos gráficos. Sin embargo, observamos como el estudiante que presentamos, aun cuando se ve enfrentado a un escenario gráfico, tal como se reporta en el trabajo de investigación, éste más bien formula la búsqueda de un polinomio conocido, con objeto de aplicar la regla de la derivada en una expresión algebraica.

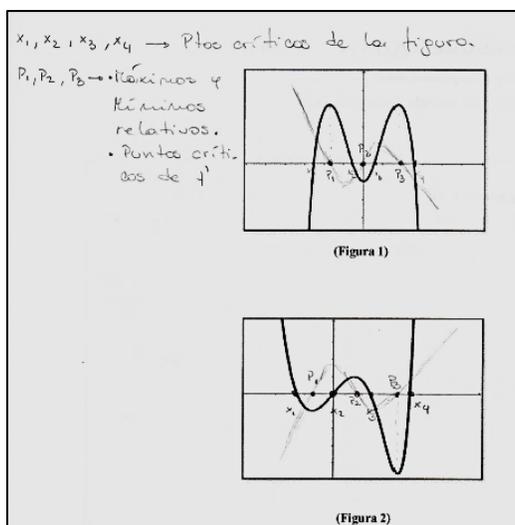
Desarrollo de la Actividad 1.2:

$\rightarrow$   $f(x) = 4$   
 $f(x) = (x + 1,21) \cdot (x + 0,27) \cdot (x - 0,27) \cdot (x - 1,21)$   
 $(x + 1,21)(x - 1,21) \cdot (x + 0,27) \cdot (x - 0,27)$   
 $(x^2 - 1,4641) \cdot (x^2 - 0,0729)$   
 $f'(x) = (x^2 - 1,4641)' \cdot (x^2 - 0,0729) + (x^2 - 1,4641) \cdot (x^2 - 0,0729)'$   
 $= 2x \cdot (x^2 - 0,0729) + 2x \cdot (x^2 - 1,4641)$   
 $= 2x^3 - 0,1458x + 2x^3 - 2,9282x$   
 $= 4x^3 - 3,074x$   
 $f' = 4x^3 - 3,074x$   
 $= x(4x^2 - 3,074)$   
 $\Delta x \quad f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0 \vee 4x^2 - 3,074 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{\pm \sqrt{3,074}}{2} = 0,875$   
 $\therefore f'(x) = x(x + 0,875)(x - 0,875)$

The image also contains a hand-drawn graph of the derivative function  $f'(x) = 4x^3 - 3,074x$ . The x-axis is labeled with  $-0,875$ ,  $0$ , and  $0,875$ . The curve passes through the origin and has local maxima and minima at these points.

Estudiante n°1: Universidad Católica Silva Henríquez

La siguiente imagen, corresponde al desarrollo de la sección 1.2 de nuestras actividades. Destacamos de esta imagen, el desarrollo que se tuvo en términos de argumentos en torno a ella. De ahí que lo relevante, es el uso de los máximos y mínimos para el análisis local que realiza el estudiante cuando se le consulta el bosquejo de la primera derivada de ambas gráficas.



Estudiante n°4: Universidad Católica Silva Henríquez

## CONCLUSIONES

El trabajo aborda la problemática del dME, el cual hoy centra la atención en los objetos matemáticos como fuente de exclusión en términos de construcción del conocimiento matemático. De ahí surge entonces la necesidad de reconocer las influencias actuales del dME en el sistema educativo, y particularmente en la comunidad de conocimiento de estudiantes de pedagogía en matemáticas de Chile.

Por lo anterior, se reconoció el Fenómeno de Opacidad en el uso de las gráficas en las derivadas, en la comunidad de conocimiento estudiada. Para tal cometido, se confeccionaron una serie de actividades que permitieron conocer los usos particulares que son parte de esta comunidad de conocimiento. Esto mediante la conformación de una epistemología del uso de las gráficas en las derivadas, fruto de la resignificación del trabajo de Cordero y Flores (2007) y Cordero, Cen y Suárez (2010).

Ahora bien, el trabajo se desarrolló bajo el marco Teórico de la Socioepistemología. Esto con objeto de dar valor de uso al conocimiento que las comunidades van construyendo al paso del tiempo, las mismas que en la actualidad son olvidadas por el sistema educativo, al soslayar la pluralidad epistemológica en el proceso de enseñanza y aprendizaje. Generando así, una desvinculación de la *construcción social del conocimiento matemático* (CSCM).

Por ello se establecieron tres ejes principales en nuestro trabajo, los cuales son: Una Caracterización Disciplinar de la Comunidad de Estudiantes de Pedagogía en Matemáticas. Junto con Una epistemología del Uso de las Gráficas en las Derivadas, lo cual permitió conformar las actividades y analizar las producciones de los estudiantes. Y finalmente, se consideró a los dos ejes del MCCM, los cuales a nuestro parecer, nos permitieron dar mayor puntualidad en el análisis y entendimiento de los resultados. De ahí por tanto que se han considerado a estos tres elementos, para confeccionar un modelo que intentara estos elemento, con objeto de obtener una descripción y entendimiento de los usos de las gráficas de manera más puntual, en torno a la comunidad de estudiantes de pedagogía en matemáticas en Chile.

## 9. Profesionalización docente en matemáticas

Destacamos en este contexto que es a partir de la caracterización disciplinar desde donde se logran identificar, la presencia de tres disciplinas en torno al proceso de formación inicial de este grupo de estudiantes. Siendo la matemática y la pedagogía, las disciplinas que se logran desarrollar con mayor fuerza en el proceso de formación inicial en Chile, tal que ambas escuelas de pensamiento han provisto de manera independiente por muchos años, ciertos elementos cognitivos en torno a una formación homogénea de profesores. Lo cual ha contribuido al fortalecimiento del dME en la formación inicial.

Asimismo, destacamos a la ME mediante la inserción de la didáctica de las matemáticas, como aquella disciplina nueva dentro de las otras que dan cuerpo a los programas de formación inicial. Lo cual se logra evidenciar al no contar con una claridad de ella tanto por parte de los profesores que forman a los estudiantes de nuestra comunidad de estudio, como también por los mismos estudiantes que llevan tal asignatura.

Desde nuestra perspectiva, lograr reconocer las disciplinas que están sustentando la formación inicial de estudiantes de pedagogía en matemáticas, nos permite reconocer con mayor puntualidad, cómo vive el dME en tal proceso. Ello en la medida de cuantificar cuanto ha pesado la Matemática en las escuelas de pedagogía, tal que si observamos los perfiles profesionales de los profesores de estas escuelas de pensamiento, nos damos cuenta cómo ellos proveen de argumentos preferentemente matemáticos a los estudiante, en términos del conocimiento que construyen. Soslayando de esta manera, las construcciones particulares de los estudiantes, lo cual favorece el desarrollo del dME a partir de la centración en los objetos matemáticos.

De esta manera, abrimos el debate en relación a la construcción del conocimiento matemático de esta comunidad, es decir, uno que está limitado de entrada por dos fuertes disciplinas de las cuales incluso, se aprecia cómo una está por sobre la otra. Lo cual ha generado una cierta dominancia en virtud de las imposiciones de Significados, Procedimientos y Argumentaciones (Soto 2010). Esta situación se logra evidenciar a nuestro parecer, con los ejemplos que ofrecemos en el análisis de resultados. Instancia donde se observa justamente la centración en los objetos matemáticos a partir del análisis local de los comportamientos de la gráfica mediante el uso del argumento de la primera y segunda derivada, por sobre el desarrollo de un análisis global de los comportamientos que se dan en la gráfica mediante la simultaneidad de las derivadas. Situación que logra entendimiento a partir de los ejes de Institucionalización e identidad que son parte del MCCM, así como también a partir de nuestra epistemología confirmada en torno a los usos de las gráficas en las derivadas.

Es decir, desde nuestro punto de vista, poseer la noción de la simultaneidad de las derivadas, permitiría valorar una concepción distinta de la derivada y por tanto de su gráfica. Eso en términos de observarla a la derivada, como una que solo tiene sentido, cuando se logra apreciar de manera simultánea las distintas variaciones, tal como lo aborda Cantoral y Farfán (1998), González (1999) y Montiel (2005). De esta forma, podríamos hablar por tanto de la simultaneidad de las derivadas, tal como lo desarrolla Morales y Cordero (s.f). Trabajo que permite evidenciar los aspectos que la simultaneidad nos provee en términos de concebir a la Serie de Taylor (ST) desde un estatus muy distinto al que se propone en el dME.

Es decir, estamos dando cuenta del Fenómeno de opacidad en términos de que aquellas construcciones de conocimiento que son opacadas en esta comunidad, fruto de las imposiciones del dME. Esto se logra apreciar en nuestro trabajo, cuando observamos como el estudiante de nuestra comunidad de estudio, pone en juego a la hora de realizar un análisis de tipo local, el

desarrollo de los máximos y mínimos, por sobre la argumentación con base al desarrollo algebraico de polinomios conocidos. Situación que si bien se dejan ver en nuestros resultados, estos se van dejando atrás al paso del desarrollo de nuestras actividades.

De lo anterior rescatamos además, el hecho de observar la necesidad de trabajar una concepción distinta del concepto de derivada, tal que sólo se logra apreciar a ésta, desde una perspectiva utilitaria, es decir una que más bien responde a tablas de derivación y no así, a la construcción social del conocimiento matemático. De ahí que proponemos el desarrollo de un futuro trabajo, con objeto de resignificar el uso de las gráficas en las derivadas a partir de un análisis global, desde lo local, gracias al desarrollo de la simultaneidad de las derivadas.

### REFERENCIAS

- Cordero, F. (2001). La distinción entre construcciones del cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 4(2), 103-128.
- González, R. (1999). *La derivada como una organización de las derivadas sucesivas: Estudio de la puesta en funcionamiento de una ingeniería didáctica de resignificación*. Tesis de maestría no publicada, Centro de investigaciones y de estudios avanzados del IPN, México.
- Gómez, K. (2009). *Los procesos de difusión del conocimiento matemático en el cotidiano. Un estudio Socioepistemológico*. Tesis no publicada, Centro de investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, D.F., México.
- Gómez, K. (2013). *La Socialización de la Función del Conocimiento Matemático: Pluralidad Epistemológica y Opacidad del Cotidiano*. Memoria Pre-Doctoral no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, D.F., México.
- Montiel, G. (2005). Interacciones en un escenario en línea. El papel de la Socioepistemología en la resignificación del concepto de derivada. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 8(2), 219-325.
- Morales, A. & Cordero, F. (s.f.). La graficación- modelación y la serie de Taylor. Una Socioepistemología del cálculo. Artículo aceptado en la *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, en proceso de publicación.
- Torres, L. (2013). *Usos del conocimiento matemático. La simultaneidad y estabilidad en una comunidad de conocimiento de ingeniería en un escenario de trabajo*. Tesis de Maestría no publicada, Centro de investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, D.F., México.
- Soto, D. (2010). *El discurso matemático escolar y la exclusión. Una visión Socioepistemológica*. Tesis de maestría no publicada, Centro de investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, D.F., México.
- Soto, D. (2014). *La dialéctica exclusión-inclusión entre el discurso matemático escolar y la construcción social del conocimiento matemático*. Tesis de doctorado no publicada, Centro de investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, D.F., México.