

DEMOSTRACIONES GEOMÉTRICAS EN EL AULA

Contreras, C^a. González, D^b. Rodríguez, P.^c

Universidad Alberto Hurtado;

ccontrerasbravo@gmail.com, gonzalezchavezdaniela@gmail.com, prodriguez@miucsh.cl

Resumen

La presente investigación se enmarca en una metodología de estudio de caso, la cual tiene como objetivo contrastar los Espacios de Trabajo Matemático Geométrico (ETMg) idóneo y personales que se evidencian previamente a una experiencia de demostración geométrica realizada por estudiantes de segundo año de enseñanza media.

Se entiende por ETMg como el ambiente organizado por y para el geómetra (Kuzniak, 2011).

El ETMg Idóneo se describe en términos didácticos, es el utilizado por el profesor, mientras que el ETMg personal puede ser utilizado por el estudiante o el profesor, de tal manera que estos reflexionen en torno a los conocimientos aprendidos y puestos en práctica.

El análisis de las producciones permite, por un lado, dejar en evidencia los tránsitos que emergen a partir de la actividad de demostración y, por otro, validar y mejorar la tarea propuesta.

Palabras clave: *demostración geométrica, espacio de trabajo matemático geométrico.*

GRUPO DE ESTUDIO

Los participantes de la puesta en escena del diseño son seis estudiantes de Segundo Año Medio, de un colegio particular subvencionado en la ciudad de Santiago de Chile. Ellos han desarrollado el reactivo sin la intervención del docente a cargo.

PARADIGMAS GEOMÉTRICOS Y ESPACIO DE TRABAJO MATEMÁTICO GEOMÉTRICO (ETMG)

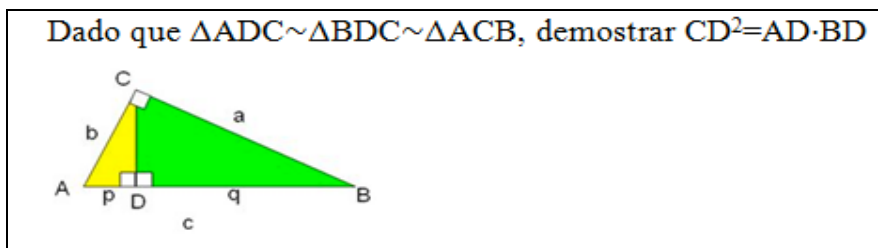
El análisis realizado se basa y sustenta en el enfoque de Paradigmas Geométricos y ETMg, el cual postula tres tipos de geometrías o Paradigmas Geométricos que residen en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría: Geometría Natural (GI), Geometría Axiomática Natural (GII) y Geometría Axiomática Formal (GIII). Los geómetras transitan desde un paradigma a otro a través de la evolución del aprendizaje de la geometría, es decir, no es un proceso natural o intrínseco de las personas, por el contrario éste debe provocarse para surgir. (Kuzniak, 2011)

El ETMg corresponde a la situación de reflexión que emerge de la interacción entre el individuo y el problema geométrico y varía respecto del paradigma dominante. Se evidencian distintos ETMg, del tipo referencial (matemático), idóneo (didáctico, utilizado por el profesor) y personal (realizado por el geómetra), a su vez se conforman de dos planos: el cognitivo y el epistemológico. En cada plano se evidencian tres componentes: en el cognitivo están presentes los planos de visualización (PV), construcción (PC) y prueba (PP), y en el epistemológico: representante (PR), artefactos (PA) y referencial (Pref).

EXPERIENCIA DE DEMOSTRACIÓN

Se propone a los estudiantes participar en la puesta en escena de un diseño de aprendizaje basado en la demostración geométrica del Teorema de Euclides. La experiencia se realizó en una sesión de 90 minutos sin intervención del profesor.

La actividad propuesta es la siguiente:



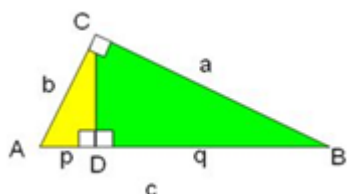
Para recoger las evidencias de sus producciones verbales y escritas se graba audio y video así como se recogen las producciones con papel y lápiz.

ANÁLISIS A PRIORI

El paradigma geométrico privilegiado para el ETMG idóneo es GII ya que la figura geométrica que se presenta en la tarea deja de ser un dibujo es aceptada y concebida como un objeto geométrico descrito por una propiedad, en este caso se presenta el triángulo rectángulo ABC y su altura \overline{CD} .

Demostración idónea

Dado que $\triangle ADC \sim \triangle BDC \sim \triangle ACB$, demostrar $CD^2 = AD \cdot BD$

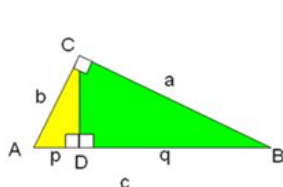


$$\triangle CBD \sim \triangle ACD \quad \Rightarrow \quad \frac{CD}{AD} = \frac{DB}{DC}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{h}{q} = \frac{p}{h}$$

$$\Rightarrow h^2 = p \cdot q \quad \therefore CD^2 = AD \cdot BD$$

Demostración personal 1



$$AD=9$$

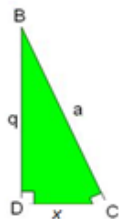
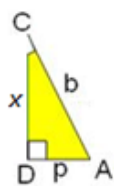
$$DB=2 \cdot 9=18$$

$$CD^2=AD \cdot DB$$

$$CD^2= 9 \cdot 18$$

$$CD^2= 162$$

Demostración ETMG Personal 2



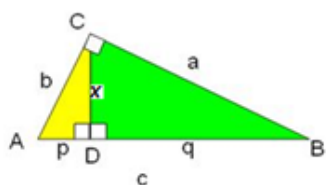
De $\triangle DAC$ se tiene que:

$$b^2 = p^2 + x^2$$

De $\triangle DCB$ se tiene que:

$$x^2 + q^2 = a^2$$

$$\Leftrightarrow q^2 = a^2 - x^2$$



De $\triangle ABC$ se tiene que:

$$b^2 + a^2 = (p+q)^2$$

$$\Leftrightarrow b^2 + a^2 = p^2 + 2pq + q^2$$

Reemplazando con resultados anteriores:

$$\Leftrightarrow (p^2 + x^2) + a^2 = p^2 + 2pq + (a^2 - x^2)$$

$$\Leftrightarrow p^2 + x^2 + a^2 = p^2 + 2pq + a^2 - x^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x^2 = p^2 - p^2 + 2pq + a^2 - a^2$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 = 2pq$$

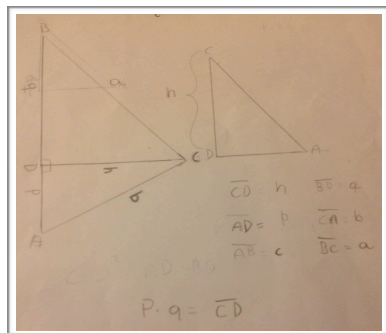
$$\Leftrightarrow x^2 = pq$$

$$\therefore CD^2 = AD \cdot DB$$

ANÁLISIS A POSTERIORI

El análisis surge a partir de las textualidades de los estudiantes que han realizado la tarea, éstas darán cuenta de ciertas tendencias en las acciones a seguir en el ETMg personal de cada uno lo que permite realizar una agrupación.

De acuerdo al contraste realizado se evidencia que la mayoría de los géómetras privilegia el paradigma geométrico G2 vislumbrando la comprensión de las propiedades del objeto de la tarea y la utilización de definiciones (teoremas) para la validación de esta, lo que deja de manifiesto que los estudiantes se acercaron considerablemente al ETMg idóneo.



A continuación se presentan las textualidades:

Geómetra 1

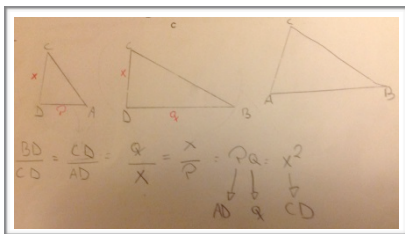
El paradigma geométrico privilegiado es G2/g1, dado que el objeto geométrico es considerado como una figura geométrica con propiedades y características. En este caso un triángulo rectángulo, con una altura y segmentos determinados, se puede observar ya que, el géómetra al realizar transformaciones respeta

características, tales como: vértices, lados y ángulos. Sin embargo, no se observa instrumentalización ni validación de la tarea.

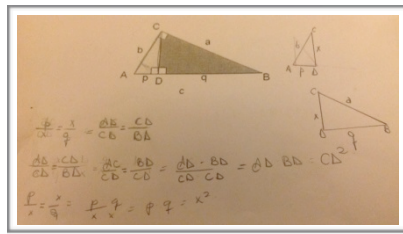
La acción del geómetra comienza en el plano cognitivo, específicamente en la visualización (PV) que realiza sobre la figura entregada en la tarea (triángulo rectángulo), la acción sobre la figura es la representación de dos triángulos rectángulos que componen el triángulo inicial a través de un proceso no-icónico del tipo constructor, en este proceso se activa la GS.

No se evidencia un tránsito hacia la génesis instrumental ni la génesis discursiva, dado que el geómetra se centra en describir los elementos del objeto a través de distintos registros.

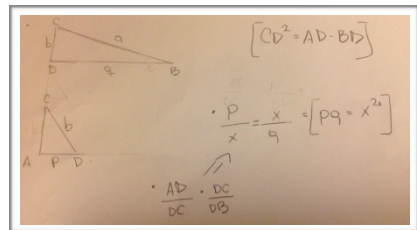
Geómetra 2, 3 y 5



Geómetra 1



Geómetra 2



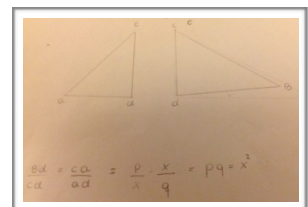
Geómetra 3

Los geómetras 2 y 3 presentan rasgos de ETMg Idóneo tales como; paradigma, razonamiento de validación y génesis instrumental. En cuanto a la circulación se evidencian las siguientes diferencias: en la génesis semiótica, los geómetras realizan una deconstrucción no-icónica del modelo y en la génesis discursiva no presentan aspectos formales en el lenguaje de validación (no mencionan las propiedades, pero si las utilizan y el desplazamiento de la demostración no es bidireccional)

Por otro lado, el geómetra 5, muestra diferencias en la génesis instrumental, dado que al deconstruir el objeto reordena los vértices, sin embargo en la instrumentación respeta el orden original de estos.

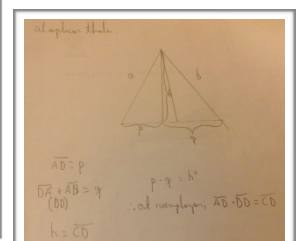
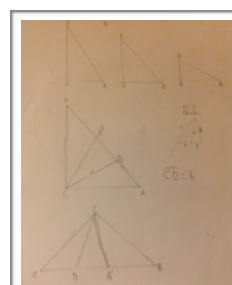
Geómetra 4

Las acciones del geómetra no se consideran en el estudio de caso debido a que presenta claras muestras de plagio, lo cual no aporta al análisis.



Geómetra 6

Se evidencian acciones asociadas al paradigma geométrico G1, ya que el objeto de la tarea es trabajado como un dibujo carente de propiedades y características particulares.



La circulación se limita a la génesis semiótica dado que el geómetra realiza una deconstrucción no-icónica del tipo constructor, sin embargo, en esta acción no respeta las características del objeto y realiza una reordenación de los vértices.

CONCLUSIONES

El análisis de las evidencias arrojó importantes resultados en cuanto al contraste con los ETMg idóneo y personales presentados al comienzo del estudio de caso.

Se esperaba encontrar en las producciones de los estudiantes acciones relacionadas o similares al ETMg personal 1, es decir que el paradigma privilegiado fuese G1, que el razonamiento de validación se fundase en la prueba, dando medidas a los lados del objeto en cuestión y que el énfasis se diera en la GS, debido a la ausencia de actividades relacionadas con demostraciones en los textos de estudio actuales propuestos por el ministerio de educación. Sin embargo, la mayoría de las textualidades analizadas mostró privilegiar el paradigma geométrico G2 vislumbrando la comprensión de las propiedades del objeto de la tarea y la utilización de definiciones (teoremas) para la validación de esta, lo que deja de manifiesto que los estudiantes se acercaron considerablemente al ETMg idóneo.

En cuanto a la tarea, el análisis permite dar cuenta que la actividad propuesta favorece el tránsito desde un paradigma geométrico G1 instaurado en el aula de matemática como una práctica tradicional, es decir, la aplicación de teoremas en base a su desarrollo aritmético y algebraico (despejar ecuaciones) a un paradigma G2 donde el razonamiento de validación nace a partir de definiciones y propiedades.

En base a la experiencia realizada, se recomienda para una futura aplicación favorecer el trabajo colaborativo, donde los estudiantes puedan discutir puntos de vista y construir soluciones en conjunto, aportando además a los objetivos transversales.

Bibliografía

- Henríquez, C. (2013). *Paradigmas Geométricos y Espacio de Trabajo Geométrico. Documento de estudio. Universidad Alberto Hurtado. Chile.*
- Henríquez, C.; Montoya E. (2015). *Espacios de trabajo geométrico sintético y analítico de profesores y su práctica en el aula. Revista Enseñanza de las Ciencias, pp.51-70. Instituto de Matemáticas. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Chile.*
- Kuzniak, A. (2011). *El espacio de trabajo matemático y su génesis. Revista Annales de Didactique et de Sciences Cognitives. Volumen 16, pp. 9-24. Francia.*
- Ministerio de Educación (2011). *Programa de Estudio Segundo Año Medio. Chile.*