CONCEPCIONES DE PROFESORES DE BACHILLERATO SOBRE LA DEMOSTRACIÓN EN LA GEOMETRÍA ESCOLAR

María Victoria Ramos Abundio, Gema Rubí Moreno Alejandri, Efrén Marmolejo Vega

vick.ramath@gmail.com, alejandrimath@gmail.com, efrenmarmolejo@yahoo.com

Universidad Autónoma de Guerrero; Unidad Académica de Matemáticas

Avance de investigación

Afectividad, actitudes, concepciones, creencias y representaciones sociales

Medio Superior

RESUMEN

Este trabajo se enmarca dentro de las investigaciones sobre las concepciones del profesor de matemáticas y de aquellas relacionadas con las prácticas de la argumentación en el aula. Se busca con este proyecto reportar concepciones que evidencian profesores de Bachillerato sobre la demostración en la Geometría escolar, teniendo como referencia para el análisis de los datos las funciones que establece De Villiers (1993).

INTRODUCCIÓN

La Dirección General de Bachillerato a partir del ciclo escolar 2009-2010 incorporó en su plan de estudios los principios básicos de la Reforma Integral de la Educación Media Superior cuyo propósito es fortalecer y consolidar la identidad de este nivel educativo, en todas sus modalidades y subsistemas; proporcionar una educación pertinente y relevante al estudiante que le permita establecer una relación entre la escuela y su entorno; y facilitar el tránsito académico de los estudiantes entre los subsistemas y las escuelas.

El programa de estudio de la Dirección General del Bachillerato 2013 de la asignatura de MATEMÁTICAS II, que pertenece al campo disciplinar de MATEMÁTICAS y se integra en cuatro cursos, conforme al marco curricular común, tiene la finalidad de *"propiciar el desarrollo de la creatividad, el pensamiento lógico y crítico entre los estudiantes, mediante procesos de razonamiento, argumentación y construcción de ideas que conlleven el despliegue de distintos conocimientos, habilidades, actitudes y valores, en la resolución de problemas matemáticos que en sus aplicaciones trasciendan el ámbito escolar; para seguir lo anterior se establecieron las competencias disciplinares básicas del campo de las matemáticas, mismas que han servido de guía para la actualización del programa (7, 2013)".*

Además, algunos de los bloques en los que se subdivide el plan de estudios, específicamente dentro de las actividades de enseñanza se establece que el profesor demostrará a los alumnos "el teorema de Pitágoras", "el teorema de Thales", etc. Sin embargo, no se pide que el alumno demuestre y no se hace énfasis en enseñar, no se enseña al alumno a demostrar los teoremas. Esta situación hace necesaria la reflexión, puesto que la demostración (concepto central de la matemática como ciencia), ocupa un rol poco esclarecido en los documentos curriculares del bachillerato en la práctica dentro de su enseñanza.

En consecuencia, centrándonos en la labor docente de matemáticas en la planeación didáctica y la gestión de los procesos de aprendizaje relativos a la demostración, y su instrumentación surgen preguntas como las siguientes: ¿cómo concibe el profesor la demostración en las clases de matemáticas?, ¿qué características, en su opinión, poseen las situaciones en las que se cuestiona la validez de argumentos?, ¿cómo gestiona los procesos de argumentación y los procesos de validación?, etc.

Ahora bien, relacionado con estas cuestiones, investigaciones evidencian, al menos, tres líneas directrices: la importancia de las situaciones y procesos de validación, el desempeño de los alumnos ante el proceso de argumentación en el aula (Duval, 1999; Boero, 1999; Balacheff, 2000; Marmolejo y Moreno, 2012; Crespo, 2005), y, concepciones que tiene el profesor ante este mismo proceso (Crespo, 2005, Araujo, Giménez Rodríguez y Rosich Sala, 2006). Esta investigación se perfila en la tercera de estas líneas: busca identificar las concepciones del profesor de matemáticas de bachillerato acerca de la demostración matemática en contexto escolar.

Son de suma importancia, las investigaciones relativas al estudio de las concepciones del profesor, pues, en palabras de Llinares (1999), las concepciones inciden en la forma de enseñar del profesor, reflejando así la forma en que éste aprendió. En la misma dirección, De Gamboa, Planas y Edo (2010) afirman que existen diversas causas que contribuyen a dar explicación, al por qué los alumnos llegan a manifestar dificultades para desarrollar argumentaciones matemáticas, señalando que algunas de ellas se ven reforzadas por las dificultades de argumentación que experimentan algunos maestros de matemáticas. Remarcándose así, lo esencial del papel de las prácticas argumentativas desde la perspectiva del profesor.

Ahora bien, tradicionalmente el papel de la demostración en la enseñanza, en opinión de varios autores, se ha reducido su único tratamiento sustancial: el ámbito de la geometría euclidiana (Knuth, 2002; Wu, 1996). En particular, Wu (1996) argumenta que la escasez de la demostración fuera de la geometría es una tergiversación de su naturaleza y, en general, afirma esto contribuye a la formación de una imagen totalmente falseada de las matemáticas en sí.

Sin embargo, Araujo *et al.* (2006) arguye una razón por la que posiblemente existe una gran cantidad de estudios que usan situaciones en el contexto de la geometría euclidiana para observar las situaciones y procesos de validación: *"la Geometría es una disciplina que por cierto tiempo y en algunas culturas ha sido el paradigma para mostrar estos procesos de forma solvente, puesto que casi no se ha fomentado una cultura argumentativa fuera de la demostración clásica que estableciese conclusiones a partir de premisas y definiciones anteriormente reconocidas".*

Lo anterior, aunado a la presencia explícita y de manera única de la demostración en el programa de estudios de Matemáticas II (con contenidos de Geometría y Trigonometría), este trabajo se centra en la pregunta investigación: *¿Qué concepciones sobre la demostración en la geometría escolar evidencian profesores de Bachillerato?* Así, el objetivo de la investigación es identificar y caracterizar concepciones de un grupo de profesores de Geometría en Bachillerato acerca de la demostración en contexto escolar.

MARCO CONCEPTUAL

En esta investigación, la teoría aparece reflejada a través de un marco conceptual. Es así, que asumimos la visión de Knuth (2002b) al caracterizar a las ***concepciones*** como aquellas que contienen los dominios de *"creencias y conocimiento" como elementos que se complementan*. Se entenderá por ***creencias*** a aquellos "*conocimientos subjetivos, poco elaborados, generados a nivel particular por cada individuo para explicarse y justificar muchas de las decisiones y actuaciones personales y profesionales vividas. Las creencias no se fundamentan sobre la* *racionalidad, sino más bien sobre los sentimientos, las experiencias y la ausencia de conocimientos específicos del tema con el que se relacionan, lo que las hacen ser muy consistentes y duraderas para cada individuo.» (Llinares, 1991. p. 37).*" Y por ***conocimiento*** entenderemos, en el sentido de Shulman (2005), que está caracterizado en tres tipos: el conocimiento de la materia, conocimiento didáctico del contenido y el conocimiento curricular.

Por otra parte, se asume a la demostración no sólo en el sentido formal, sino que también en sus posibles matices escolares. El interés se centrará en analizar cuál es la concepción del profesor sobre este objeto desde la enseñanza. Por último, llamaremos función de la demostración al propósito o a la utilidad que tiene la demostración para quién la propone o para quien la interpreta.

Para nuestro estudio de las concepciones sobre la demostración es de gran utilidad la caracterización que reporta De Villiers (1990) sobre las funciones de la demostración en matemáticas. De manera que, retomamos los trabajos de Knuth (2002a y 2002b) en el sentido de que, la lente principal de nuestro análisis de las concepciones de los profesores lo componen las múltiples funciones de la prueba en matemáticas. Se identificará cuáles de estas funciones están presentes en las concepciones del profesor sobre la demostración (como objeto científico y como objeto de enseñanza).

A fin de esclarecer en qué consisten las funciones sobre la demostración, a continuación se describen.

- **Verificación:** La demostración se ocupa de la veracidad de un enunciado.

  De Villiers sostiene que la demostración no es un prerrequisito para la convicción, sino que, por el contrario, frecuentemente sucede que la convicción es un prerrequisito bastante más frecuente para la búsqueda de la demostración, por lo que proporciona la motivación para encontrar una demostración. Si bien, en matemáticas la certeza absoluta es inalcanzable, por lo que la convicción personal depende de los siguientes factores: intuición, verificación cuasi-empírica y demostraciones no necesariamente rigurosas. Además, afirma que no se debe quitar importancia a la demostración como método de verificación, especialmente en el caso de los resultados sorprendentemente intuitivos y dudosos.

  Un papel principal de la demostración en la matemática es el de verificar la exactitud de un resultado o de la verdad de un enunciado. Hay quienes opinan que una demostración para el matemático proporciona certeza absoluta y, por lo tanto, se convierte en autoridad absoluta en el establecimiento de la validez de una conjetura. Se parece tener la visión ingenua descrita por Davis y Hersh (1986:65) que detrás de cada teorema en la literatura matemática se incrementa una secuencia de transformaciones lógicas de hipótesis para concluir de manera comprensible la verdad irrefutable que garantiza. Sin embargo, esta visión es completamente falsa. La prueba no es necesariamente un requisito previo para la crítica – de lo contrario, la crítica es, probablemente, mucho más frecuentemente un requisito previo para el hallazgo de una prueba.

  Por otro lado, las experiencias de estudiantes con la demostración muestran que, a menudo, se limitan a comprobar la veracidad de las declaraciones que saben que ya han sido probadas antes. Tales experiencias a menudo llevan a los estudiantes a ver las pruebas como un procedimiento para la confirmación de lo que ya se sabe que es verdadero (Schoenfeld, 1994); como consecuencia, la prueba se reduce a "sólo un juego porque ya sabes lo que el resultado es" (Wheeler, 1990).

- **Explicación:** La demostración proporciona información sobre por qué es cierto determinado enunciado.

  Aunque es posible alcanzar un alto grado de confianza en la validación de una conjetura por verificación cuasi-empírica, esto no proporciona generalmente una explicación satisfactoria de por qué puede ser cierto. Simplemente confirma que es verdad, incluso cuando consideración de más y más ejemplos puede aumentar la confianza, no da el sentido, psicológicamente satisfactoria, de iluminación, esto es, una visión desde dentro o meterse dentro en el cómo surge como consecuencia de otros resultados ya familiares.

  Este rol de la demostración en el contexto escolar podría explicar el por qué es percibida por los estudiantes como un ejercicio formal y, a menudo sin sentido, pues en ocasiones los métodos de demostración y reglas de implicación son completamente ajenos a lo que les convence (Harel y Sowder, 1998).

- **Sistematización:** Otra función es la de organizar varios resultados en un sistema deductivo de axiomas, los principales conceptos y teoremas.

  Algunas de las más importantes funciones de la sistematización deductiva de resultados conocidos se dan a continuación (De Villiers, 1986):

  - Ayuda a identificar inconsistencias, razonamientos circulares y suposiciones ocultas o no explicitas
  - Verifica y simplifica las teorías matemáticas, integrando conceptos, afirmaciones y teoremas entre sí, consiguiendo una presentación económica de los resultados
  - Proporciona una útil perspectiva global o a vista de pájaro de cada tema, exponiendo su estructura axiomática subyacente, a partir de la cual pueden deducirse las demás propiedades.
  - Ayuda a las aplicaciones, tanto dentro como fuera de las matemáticas, pues ayuda a comprobar la aplicabilidad de la compleja estructura global de la teoría, mediante la simple evaluación de conveniencia de sus axiomas y definiciones
  - A menudo da lugar a sistemas deductivos alternativos que proporcionan nuevas perspectivas; y/o resultan ser más económicos elegantes y potentes que los ya existentes.

  Algunos elementos de verificación también están obviamente presentes aquí, el primer objetivo no es, desde luego, “comprobar si ciertas afirmaciones son realmente verdaderas”, sino organizar lógicamente enunciados individuales no relacionados, que de antemano se sabe que son ciertos, dentro de un “todo coherente y unificado”.

- **Comunicación:** La demostración comunica conocimiento matemático.

  El énfasis recae así sobre el proceso social de informar y diseminar el conocimiento matemático en la sociedad. La demostración como forma de interacción social involucra así también la negociación subjetiva de no sólo los significado de los conceptos concernidos, sino también, implícitamente, los criterios para una argumentación aceptable. A su vez, tal filtro social de la demostración en las diferentes comunidades contribuye a su refinamiento e identificación de errores, así como, a veces, a su rechazo por el descubrimiento de un contraejemplo.

La prueba es, también, vista como una construcción social y el producto del discurso matemático. A este respecto, Balacheff (2000) afirma que "si, en principio, una demostración señala criterios lógicos por medio de un discurso, en la realidad, los procesos sociales en el seno de la comunidad matemática juegan un papel importante: una demostración se convierte en tal, después del acto social de 'aceptar que lo es'."

La función comunicativa de la demostración funciona como un medio de interacción social entre los individuos involucrados (profesores-alumnos) para comunicarse los resultados matemáticos entre profesor-alumno y entre alumno-alumno.

- **Descubrimiento:** La demostración juega un papel importante en el descubrimiento o la invención de nuevos resultados.

  A menudo se dice popularmente, por los críticos de la cantidad de rigor deductivo a nivel de la escuela, que la deducción en general (y la prueba en particular) no es un recurso heurístico especialmente útil en el descubrimiento real de nuevos resultados matemáticos. Sin embargo, De Villiers (1999) señala que "hay numerosos ejemplos en la historia de las matemáticas, donde se descubrieron o inventaron nuevos resultados de una manera puramente deductiva [por ejemplo, la geometría no euclidiana".

  El papel de la demostración en la creación de nuevas matemáticas, en contexto escolar, está empezando a desempeñar un papel más importante en geometría de la escuela secundaria, en particular aquellas aulas en las que los estudiantes están utilizando software de geometría dinámica (Larios, 2006). A través de sus exploraciones, los estudiantes generan conjeturas y luego tratan de verificar la verdad de las conjeturas al producir pruebas deductivas. En este caso, los estudiantes están utilizando la prueba como un medio para crear nuevos resultados.

Aunque las cinco funciones pueden ser diferenciadas unas de otras, a menudo están intrínsecamente relacionadas en casos específicos. En algunos, ciertas funciones pueden dominar sobre otras, en otros casos, algunas de estas funciones son inexistentes. Las cuales son nuestras lentes para el análisis de los datos recolectados.

METODOLOGÍA

En este apartado asumimos de Knuth (2002a y 2002b) la metodología que ha utilizado en su trabajo, considerando dos fases para estudiar las concepciones de los profesores: primero, desde la postura del profesor como alguien que tiene conocimiento de la matemática y segundo, desde la postura como profesor que enseña esta ciencia. Nuestra atención se centra en la segunda fase, sin embargo los resultados de la primera fase son de interés en el análisis de la segunda.

Sujetos de estudio

Los participantes fueron 3 profesores de matemáticas en servicio de Nivel Bachillerato de los cuales se consideraron las siguientes características:

- Cuya formación les haya proporcionado cierta experiencia con la demostración matemática

- Con el fin de acotar la muestra y clarificar el perfil del participante, se eligieron adscritos al Colegio de Bachilleres
- Que tuvieran más de 4 años de experiencia docente en Matemáticas en ese nivel
- Que hubiesen impartido Geometría y Trigonometría

Proceso metodológico para la recolección de datos

La fuente de datos consistió en entrevistas semi-estructuradas. El proceso metodológico para la recolección de datos se llevó a cabo en dos fases distintas. Se grabó en audio y video.

<table>
<tr><td colspan="2">Primera Fase
Esta fase se centró en las concepciones de los profesores sobre la demostración en la disciplina de las matemáticas, es decir, que el participante debía adoptar la postura de alguien que tiene cierto conocimiento de la demostración. Para lo cual, se consideraron los siguientes puntos:</td></tr>
<tr><td>Primera etapa</td><td>Las preguntas de opinión se centraron en la naturaleza y el papel de la prueba en la matemática.
1. Para ti, ¿qué es una demostración?
2. Para ti, ¿qué significa que sea demostrado algo?
3. En matemáticas, ¿para qué crees que se usa la demostración?
4. ¿Cómo, en tu opinión, puede convertirse un argumento en una demostración?
5. ¿Consideras que una demostración puede dejar de ser válida? ¿Por qué?</td></tr>
<tr><td>Segunda etapa</td><td>Para indagar sobre la comprensión de lo que para los maestros constituye una demostración, se les pedirá que evalúen dos series de argumentos que pretendan demostrar alguna proposición. Los argumentos varían en cuanto a su validez como demostración y se elegirán de tal manera que los conceptos matemáticos subyacentes no sean elevados. Se les solicitó contestar, lo siguiente:
1. Desde tu perspectiva, ¿cuáles representan una demostración y cuáles no?
2. ¿Cuál te parece más convincente? ¿Por qué?</td></tr>
</table>

Tabla 1. Fase 1 del proceso metodológica para la recolección de datos

<table>
<tr><td colspan="2">Segunda Fase
Esta fase se centró esencialmente en sus concepciones de la demostración en el contexto escolar, es decir, que el participante debía adoptar la postura como profesor que asume una postura respecto a la enseñanza de la demostración. Aquí se consideraron los siguientes puntos:</td></tr>
<tr><td>Primer a etapa</td><td>Las preguntas de opinión se centraron en la naturaleza y el papel de la demostración en el contexto de las matemáticas de Bachillerato y sus expectativas de la demostración para los estudiantes.</td></tr>
</table>

	1. Para ti como profesor, ¿en qué consiste la demostración matemática en el contexto del Bachillerato? 2. Como profesor, ¿consideras que tiene alguna función la demostración en la enseñanza de la Matemática? ¿Cuál(es) dirías que es (son)? 3. En tu opinión, como profesor de matemáticas, ¿en qué momento deben los estudiantes introducirse a las demostraciones? 4. ¿Conoces el Programa de Estudios de Matemáticas de la Dirección del Bachillerato General 2013? ¿Qué opinas de las parte que ahí se presentan a este respecto? ¿Cómo lo interpretas en tu práctica docente?
Segunda etapa	Relata cómo le haces para introducir un teorema o propiedad nueva (que herramientas didácticas usas, desarrollo de la clase, que es lo que esperas que los alumnos hagan, etc.). Ejemplifica.
Tercera etapa	Para indagar sobre la comprensión de lo que para los maestros constituye presentar una demostración de un teorema a sus alumnos, se les pidió que evaluaran dos series de argumentos que pretendan demostrar los teoremas que están explícitos en el programa de estudios. Los argumentos deberán variar en cuanto a su validez como demostración. Los argumentos se elegirán de tal manera que los conceptos matemáticos subyacentes no sean difíciles. 1. Desde tu perspectiva, ¿cuáles representan una demostración en contexto escolar y cuáles no? 2. ¿Cuál te parece más convincente para los alumnos? ¿por qué?
Cuarta etapa	Finalmente, con el fin de analizar cómo juzgan las argumentaciones de sus alumnos respecto a la veracidad o falsedad de un enunciado, se le presentan un par de situaciones a evaluar, con la siguiente estructura: *“A los siguiente alumnos se les propuso juzgar la veracidad o falsedad de un enunciado (elegido del programa de estudios), hubo 6 argumentaciones diferentes. Evalúa sus argumentos… ¿cuáles de sus respuestas es un mejor razonamiento o argumentación para probar que es verdadero o es falso?, ¿por qué?”*

Tabla 2. Fase 2 del proceso metodológica para la recolección de datos

Proceso metodológico para el análisis de datos

El análisis de datos se basará en la codificación a partir del uso de códigos externos e internos, para posteriormente clasificarlo, acorde a temas relevantes. Para ello, se utilizará el conjunto de códigos (externos) que identificamos antes de la recolección de datos y que se derivaban del marco conceptual, es decir, nos referimos a las cinco funciones de la demostración establecidas por De Villiers (1990), aunque estas funciones fueron propuestas en términos de la demostración formal, resultan ser útiles para considerar a la demostración en contexto escolar. Así que, en la medida en que se examinen los datos, puede que estos generen la propuesta de varios códigos nuevos (por ejemplo, la función de visualización del pensamiento de los estudiantes como una función de la demostración). Este proceso de análisis se realizará una y otra vez por cada uno de los que conformamos este equipo, es decir, se examinarán los datos y re-codificarán nuevos códigos, con la finalidad de comprobar la fiabilidad de la codificación. Actualmente nos encontramos en este proceso de análisis de datos. Se espera que para la presentación de este trabajo se den a conocer los resultados obtenidos de este trabajo de investigación.

BIBLIOGRAFÍA

Araujo, J., Giménez, J. y Rosich, N. (2006). Afectos y demostraciones Geométricas en la formación inicial docente. *Enseñanza de las ciencias,* 2(3), pp. 371-386.

Balacheff, N. (1999). ¿Es la argumentación un obstáculo? Invitación a un debate. *Preuve*. Recuperado de: http://www.lettredelapreuve.it/OldPreuve/Newsletter/990506Theme/990506ThemeES.html

Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas.* Recuperado de: http://hal.archives-ouvertes.fr/docs/00/52/01/33/PDF/Balacheff2000Proceso.pdf

Boero, P. (1999). Argumentación y demostración. Una relación compleja, productiva e inevitable en la Matemáticas y la Educación Matemática. *Preuve*. Recuperado de: http://www.lettredelapreuve.it/OldPreuve/Newsletter/990708Theme/990708ThemeES.html

Crespo, C. R. (2005). La importancia de la argumentación matemática en el Aula. *Revista Premisas,* 24, 23-29. Recuperado de: http://www.soarem.org.ar/revistapremisa.htm#

Crespo, C. R. y Ponteville, C. C. (2004). Las concepciones de los docentes acerca de las Demostraciones. En Moreno, L. (Ed.), *Acta Latinoamericana de la Matemática Educativa,* 17, 560-564. México D. F.: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Crespo, C. R. y Ponteville, C. C. (2005). Las Funciones de la Demostración en el Aula de Matemática. En Lezama, J., Sánchez, M. y Molina, J. (Eds.), *Acta Latinoamericana de la Matemática Educativa,* 18, 307-312. México D. F.: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

De Villiers, M. (1993). El papel y la función de la demostración en matemáticas. Épsilon, 26, 16-30.

Duval, R., (1999). *Argumentar, demostrar, explicar: ¿Continuidad o ruptura cognitiva?* México, D. F.: Grupo Editorial Iberoamérica.

Duval, R., (1999). Algunas cuestiones relativas a la Argumentación. *Preuve.* Recuperado de: http://www.lettredelapreuve.it/OldPreuve/Newsletter/991112Theme/991112ThemeES.html

Godino, J. y Recio A. (1997). Significado de la demostración en educación matemática. *Preuve.* Recuperado de: http://www.lettredelapreuve.it/OldPreuve/Resumes/Godino/Godino97ES.html

Knuth, E. (2002a). Secondary school mathematics teachers' conceptions of proof. Journal for Research in Mathematics Education, 33(5), 379–405.

Knuth, E. J. (2002b). Teachers' conceptions of proof in the context of secondary school mathematics. Journal of Mathematics Teacher Education, 5(1), 61–88.

Marmolejo, E. y Moreno, G. (2012). La demostración en contexto escolar: Argumentación en la "Demostración". Trabajo presentado en XIV Evento Internacional "MATECOMPU 2012", Noviembre, Cuba.

Shulman, L. (2005). Conocimiento y enseñanza: Fundamentos de la nueva reforma. *Profesorado. Revista de curriculum y formación del profesorado*, 9 (2),1-30.

SEP (2013). Programa de Estudio de Matemáticas II de la Dirección General del Bachillerato. México, D. F.