DESARROLLO DEL PyLV MEDIANTE UN ESCENARIO DE LABORATORIO EMPLEANDO EL BINOMIO MODELACIÓN-GRAFICACIÓN

Jaime Ramos Gaytán, Eduardo Carlos Briceño Solís
derivadamayor@hotmail.com, ecbs@74gmail.com
Universidad Autónoma de Zacatecas *"Francisco García Salinas"*
Avance de Investigación
Pensamiento y Lenguaje Variacional
Medio Superior

RESUMEN

En esta investigación involucramos elementos como la graficación, la modelación, la tecnología, y el pensamiento y lenguaje variacional (PyLV), con el objetivo de contrarrestar algunas problemáticas que se generan en torno al aprendizaje de la derivada, pues de la revisión bibliográfica concluimos que su estudio se suele restringir al empleo de métodos algorítmicos o bien se suele privilegiar el manejo de ciertas notaciones, además el hecho de que la gráfica en la mayoría de los casos solo adquiere el rol de representación. Por lo tanto, optamos por la necesidad de crear escenarios donde se resignifique el conocimiento sobre este concepto tan importante en cálculo. Particularmente, generaremos un escenario para el desarrollo del PyLV en torno a la derivada en estudiantes de bachillerato, empleando el binomio modelación-graficación en actividades experimentales de laboratorio.

PALABRAS CLAVE: Modelación, graficación, tecnología, pensamiento y lenguaje variacional, derivada.

INTRODUCCIÓN

Una perspectiva sobre la graficación desarrollada en investigaciones en matemática educativa muestra que la gráfica es argumentativa. Por ejemplo, Campos (2003) estudia la argumentación gráfica en la transformación de funciones cuadráticas, mediante una ingeniería didáctica, eludiendo la forma típica de considerar a la gráfica como una representación de una función. Cabe destacar que la confrontación entre las concepciones de curva y función desde un contexto propiamente gráfico más que analítico, generó en los alumnos un conflicto que les ayudó a considerar argumentos de comportamientos específicos de la curva y de comportamiento tendencial de las funciones, donde se resignifica la parábola mediante la variación de parámetros. Por otra parte, de la investigación desarrollada por Morales et al. (2012) resulta que el "uso de la gráfica" es considerado como un elemento de argumentación que permite identificar las variables que intervienen en la situación (velocidad, aceleración, rapidez, etc.), además la funcionalidad de la gráfica surge como un patrón de comportamiento (análisis variacional). Por lo tanto, la gráfica de una función puede ser considerada como un instrumento de construcción de conocimiento, que le sirve al estudiante no sólo para representarla, sino también para generar argumentos e identificar patrones de comportamiento (Briceño, 2013). En Rosado (2004) se formula un marco de referencia que resignifica la derivada, partiendo de la hipótesis de que el comportamiento tendencial local de las funciones será el argumento del estudiante en el contexto gráfico, que posibilitará la nueva construcción de la propiedad de linealidad del polinomio. La revisión de estos trabajos brinda una perspectiva de las gráficas como argumentaciones que permiten construir significados en situaciones. Sin embargo con el objetivo de diseñar actividades experimentales en las cuales se hagan uso de tecnología, consideramos el siguiente elemento que es la modelación.

Para Gómez-Chacón (2011) la modelización matemática en contextos tecnológicos debe ser establecida como un programa formativo, dirigido al desarrollo de competencias profesionales de los futuros profesores, centrándose en las secuencias de aprendizaje de las matemáticas con TIC´s y en el diseño y uso de las trayectorias de aprendizaje (desarrollo e implementación de escenarios multimedia de aprendizaje). Como parte de la reflexión docente la autora muestra que en la resolución de problemas con tecnología, es necesario identificar qué hace que se produzcan bloqueos y dificultades en el profesor (falta de conocimiento matemático general o específico, falta de habilidades tecnológicas, o bien, falta de expertez técnica en la modelización). Por su parte Morales et al. (2012) emplean videos de experimentos físicos mediante los cuales se toman datos de movimiento de ráfaga de imágenes, que se traducen en gráficas distancia contra tiempo. Mediante comportamientos gráficos se analiza la variación que establece la conexión de un modelo matemático (variacional parabólico) con un modelo físico (de la cinemática) donde el rol de la variable tiempo, norma la funcionalidad de las gráficas. Finalmente los autores brindan una serie de significados, procedimientos, procesos-objetos y argumentos que resultan de suma importancia en la enseñanza de las matemáticas para la formación de ingenieros y científicos.

Por otra parte, considerando el efecto de un entorno tecnológico, encontramos el trabajo de Villa-Ochoa y Ruiz (2010) el cual muestra cómo desde dicha interacción se puede acceder a ciertos conceptos matemáticos. Sin embargo, para ellos el uso del software no es un medio para enseñar o aprender matemáticas de manera más fácil, más bien es a través de un colectivo pensante de seres humanos con esta tecnología que la construcción del conocimiento matemático es diferente. Ellos construyeron herramientas con el software, así como representaciones gráficas y algebraicas de tales relaciones, con lo que refutaron y demostraron formalmente conjeturas.

De manera similar Basurto (2011) se enfoca en la conceptualización de los parámetros en funciones polinomiales, para quien el empleo de herramientas tecnológicas potencializa la comprensión de los distintos usos de las literales (incógnitas, variables, números generales o parámetros). Complementa lo anterior en Basurto (2013) en donde presentan una ruta didáctica sobre la enseñanza de los parámetros en la educación media, tratando de atender esa polisemia que el alumno tiene sobre las literales, y que se ve reflejada en las tareas que realizan en matemáticas y otras áreas.

Respecto al estudio de la derivada, Artigue (1995) afirma que si bien se puede enseñar a los estudiantes a realizar de forma más o menos mecánica algunos cálculos de derivadas y primitivas y a resolver algunos problemas estándar; se encuentran grandes dificultades para hacerlos entrar en verdad en el campo del cálculo y para hacerlos alcanzar una comprensión satisfactoria de los conceptos y métodos de pensamiento, es decir, predomina una práctica algorítmica y algebraica en la enseñanza tradicional y la evaluación sobre competencias adquiridas en este dominio. Por su parte Castañeda (2002) realiza un estudio sobre la evolución didáctica del punto de inflexión y lo caracteriza (lugar geométrico donde ocurre un cambio de concavidad), presentando una aproximación socioepistemológica y el empleo de la segunda derivada. Al respecto, Dolores (2006) realiza un análisis acerca de la enseñanza de la derivada vista desde la perspectiva de los textos más usuales de Cálculo Diferencial y de los programas de estudio en el estado de Guerrero, su análisis se centró en la formación, tratamiento y los elementos propuestos para la fijación o asimilación del concepto de derivada, utilizando como referente fundamental el papel de la variación. Para ello parte de la premisa de que en la enseñanza de la Matemática en general se tratan conceptos y sus definiciones, relaciones o teoremas, procedimientos y actividades (ejercicios o problemas) tendientes a la asimilación del contenido. Propone varias actividades cuyo propósito es lograr un primer acercamiento a la derivada por la vía variacional, un ejemplo se muestra en la Figura 1.

La siguiente gráfica muestra el comportamiento de la función f(x). Analícela cuidadosamente y contéstese lo siguiente.

a) *¿Cuánto cambia* f *si* x *cambia de −5 a −4?*

b) *¿Cuánto cambia* f *si* x *cambia de −3 a −2?*

c) *¿Cuánto cambia* f *si* x *cambia de 1 a 2?*

d) *Suponga que* x *cambia de izquierda a derecha, es decir* $\Delta x > 0$. *¿Para qué* x *se cumplen las desigualdades siguientes?*

$f(x + \Delta x) - f(x) > 0$

$f(x + \Delta x) - f(x) < 0$

$f(x + \Delta x) - f(x) = 0.$

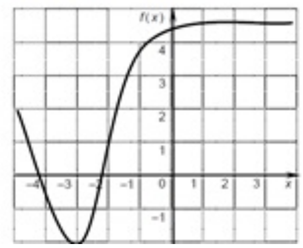

Figura 1. Actividad de cuantificación de una función

Por otra parte Sánchez-Matamoros, García y Llinares (2006) en su estudio tratan de caracterizar el desarrollo de la comprensión del concepto de derivada en el nivel de bachillerato (16- 18 años) y primer año de la universidad. Para ello se cuestionan sobre ¿cómo los estudiantes llegan a comprender el concepto derivada?, ¿cómo podemos caracterizar los niveles de desarrollo del esquema de derivada?, ¿qué relaciones y qué elementos matemáticos se manifiestan en cada nivel de desarrollo de la derivada? y ¿cómo podemos caracterizar el paso de un nivel de desarrollo al siguiente? tomando en cuenta los modos de representación (analítico y gráfico) y el carácter local o puntual (ver Figura 2), y el carácter global, también manejado como intervalo (ver Figura 3) de la derivada.

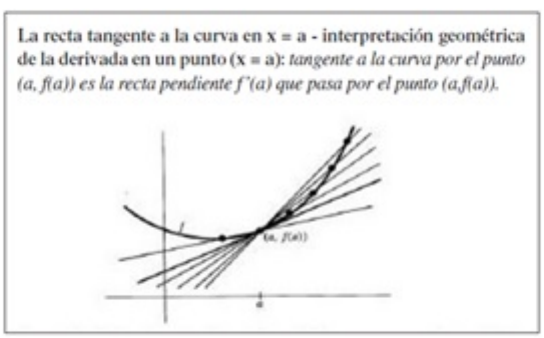

Figura 2. Elemento matemático gráfico puntual

La condición suficiente para que *f* sea una función constante, creciente o decreciente:

Si f ´(x) = 0 en (a, b) → f es constante en el intervalo (a, b).
Si f ´(x) > 0 en (a, b) → f es creciente en el intervalo (a, b).
Si f ´(x) < 0 en (a, b) → f es decreciente en el intervalo (a, b).

La condición necesaria para que *f* sea una función constante, creciente o decreciente: Sea f una función derivable en (a, b)

Si f es constante para todo x de (a, b) → f ´(x) = 0 en (a, b).
Si f es creciente para todo x de (a, b) → f ´(x) > 0 en (a, b).
Si f es decreciente para todo x de (a, b) → f ´(x) < 0 en (a, b).

Figura 3. Elementos matemáticos analíticos globales

Al respecto Font (2008) se preocupa por buscar alternativas a la definición de la función derivada por límites, es decir ¿Cómo calcular *f´(x)* a partir de *f(x)*?, rescatando de Font (2000) que este cálculo se puede interpretar como un proceso, que involucra tres subprocesos:

1) Traducciones y conversiones entre las distintas formas de representar *f(x)*.
2) El paso de una representación de *f(x)* a una forma de representación de *f ´(x)*.
3) Traducciones y conversiones entre las distintas formas de representar *f ´(x)*.

En otra investigación Sánchez-Matamoros, García y Llinares (2008) hacen una revisión y organización de algunas aportaciones hechas en Matemática Educativa respecto a la derivada como objeto de investigación, identificaron el conocimiento generado y las áreas donde es necesario contribuir con información, atendiendo seis aspectos que abarcan desde las diferentes maneras de mirar el desarrollo de la comprensión del concepto de derivada hasta la aplicación del mismo. Finalmente, Font (2009) analiza formas de argumentación para calcular la derivada de la función $f(x)=x^2$ en las que no se usa la definición de la función derivada como límite de las tasas medias de variación (condición sobre las tangentes), sino que inicia con una inducción, continúa con una abducción y termina con una deducción.

LÍNEA DE INVESTIGACIÓN SOBRE EL PYLV

Cantoral y Farfán (1998) parten del supuesto de que previo al estudio del cálculo se precisa de la adquisición de un lenguaje gráfico que posibilite, esencialmente, la transferencia de campos conceptuales virtualmente ajenos a causa de las enseñanzas tradicionales, estableciendo un isomorfismo operativo entre el álgebra básica y el estudio de curvas, mejor aún, entre el lenguaje algebraico y el lenguaje gráfico; por lo que la combinación de ambas tareas enunciadas en la metodología favorece al desarrollo del pensamiento y el lenguaje variacional. Para fortalecer estas ideas en los estudiantes, recomiendan que se debe iniciar con actividades para la construcción de un universo de formas gráficas que sea a la vez, amplio y estructurado (ver Figura).

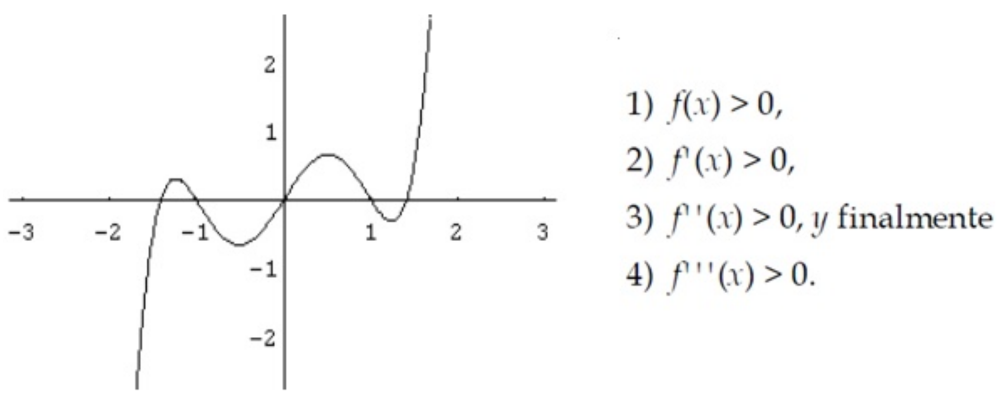

Figura 4. Actividad tipo variacional

Por su parte Cantoral, Molina, y Sánchez (2005) resumen los planteamientos del Taller "Socioepistemología de la Predicción", presentado a través de reflexiones teóricas y de una variedad de ejemplos didácticos usando recursos tecnológicos. Resaltan el papel que juega la predicción en la construcción de conocimiento matemático e identifican patrones gráficos asociados a las derivadas de orden mayor o igual a 1. Mientras que Sánchez y Molina (2006) presentan una descripción del taller denominado "pensamiento y lenguaje variacional, una aplicación al estudio de la derivada". En la primera parte del taller se buscó provocar la emergencia del concepto de diferencia; esto es, el residuo de la sustracción $E_2 - E_1$; en la segunda parte del taller se trató de mostrar la utilidad de esas diferencias en el estudio del concepto de derivada en un contexto numérico, utilizando la actividad matemática contenida en el trabajo de Cantoral y colaboradores (Cantoral, Molina y Sánchez, 2005). Entendiendo ahora el concepto de variación como una cuantificación del cambio (Cantoral et al. 2005) y además se deben considerar diferencias sucesivas para identificar si se trata de una función lineal, cuadrática o cúbica.

Por otra parte Cabrera (2009) realiza un estudio en el marco de la Reforma Integral de Bachillerato, sugiriendo que el profesor podría utilizar las estrategias variacionales de predicción, comparación, seriación y estimación, como elementos alrededor de los cuales reestructurar su desempeño docente, en otras palabras, se tendría que precisar ¿hasta qué punto la línea de investigación pensamiento y lenguaje variacional puede proporcionar elementos didáctico-metodológicos que ayuden a la implementación del currículo basado en competencias propuesto en la RIEMS?

Finalmente Cantoral (2013) describe, más a detalle, y ejemplifica la línea de investigación: Desarrollo del Pensamiento y Lenguaje Variacional. Esta visión rompe con el esquema clásico de enseñanza según el cual, el maestro enseña y el alumno aprende, provechando las formas naturales en que estos últimos razonan sobre matemáticas y sobre lo que aporta a este respecto la investigación en Matemática Educativa. Parte de la hipótesis de que el PyLV desarrollado por los estudiantes brinda herramientas para, entre otros aspectos, reconocer variaciones referidas a elementos que a su vez varían, estudiar los elementos constantes y variables de ciertas familias de gráficas, establecer relaciones entre la variación de una función y las funciones derivadas sucesivas.

Después de la revisión de algunas investigaciones y de la experiencia personal al impartir la materia de cálculo, he detectado problemas respecto a la enseñanza y el aprendizaje del concepto de la derivada, predomina una ausencia de significados de dicho concepto en los cursos de cálculo del bachillerato, por lo que es necesario buscar alternativas de acercamiento a su definición (Artigue (1995) ; no basta lo presentado en los libros de texto de cálculo, en los cuales se suele privilegiar sólo ciertas representaciones de la misma (Font, 2008), al igual que los argumentos y procedimientos algorítmicos (Rosado, 2004; Cantoral y Farfán, 1998). Es necesario contextualizar los problemas sobre el cálculo de derivadas (Font, 2009), relacionando, en la medida de lo posible, lo tabular, la tangente, la subtangente, la concavidad, y sus posibles significados físicos (tiempo, velocidad, rapidez.

Por otra parte, existe una ausencia de desarrollo del pensamiento variacional en el nivel de bachillerato (Cantoral, Farfán, Cordero, Alanís, Rodríguez y Garza, 2000; citados en Sánchez y Molina, 2006), por lo que es necesario establecer marcos de referencia que ayuden a resignificar el concepto de derivada, proponiendo su estudio mediante situaciones y fenómenos en los que se vea involucrado el cambio y la necesidad de predecir estados futuros (Caballero y Cantoral, 2013).

De esta manera surge el interés de abordar las siguientes preguntas de investigación:

- ¿Qué tipo de significados se obtienen sobre la derivada con el uso de tecnología, en un escenario de laboratorio experimental?
- ¿Qué tipo de reflexiones se tiene sobre la práctica docente, al organizar, crear e implementar un laboratorio de modelación experimental para alcanzar las competencias matemáticas?

Para ello se plantea como objetivos:

- Establecer un acercamiento a la noción de derivada mediante la línea de investigación del PyLV.

- Que el alumno de bachillerato construya, interprete, explique, justifique y argumente los resultados de un modelo matemático (numérica, gráfica y analíticamente referente a un fenómeno real) que involucre a la derivada, mediante la modelación y graficación utilizando un enfoque de PyLV.

- Diseño de actividades experimentales de laboratorio de modelación.

- Reflexión sobre la práctica docente en la implementación de un laboratorio experimental de modelación, pues el trabajo final de maestría corresponde a una práctica profesional.

Partiremos de la Hipótesis: La gráfica concebida como argumento en actividades experimentales de modelación bajo la línea de pensamiento y lenguaje variacional, provee una riqueza de lenguaje y significados para resignificar la derivada.

MARCO TEÓRICO

Se pretende trabajar bajo el marco teórico de la Socioepistemología, ya que provee marcos de referencia del uso del conocimiento concibiéndose en prácticas que norman la construcción de conocimiento matemático. Además considera la creación de escenarios socioculturales como el lugar donde el humano usa el conocimiento y lo resignifica, de tal forma que no se enfoca en los conceptos como tal, sino en aquello que norma el aprendizaje de esos conceptos.

MÉTODO

- Se realizará una revisión de los libros de texto que se emplean como apoyo para el curso de cálculo diferencial, con el objetivo de tener un panorama sobre los enfoques que emplean para abordar el concepto de derivada.
- Se diseñará e implementará una situación específica contextualizada, referente a un fenómeno físico, mediante la graficación, la modelación y la tecnología.
- Se desarrollará una metodología de análisis acorde con nuestro marco teórico.

REFLEXIONES

De las investigaciones revisadas incorporaremos algunos elementos que contribuirán en el diseño, implementación y análisis de una situación específica en un escenario de laboratorio. Para nosotros la gráfica de una función será un instrumento de construcción de conocimiento, que en la práctica le permita al alumno generar argumentos y la identificación de patrones de comportamiento. Además, trataremos de enriquecer sus argumentos mediante la implementación de situaciones de modelación, empleando recursos tecnológicos; con lo que el binomio modelación-graficación cobrará vida y jugará un papel importante en este intento de dotar de utilidad y funcionalidad al concepto de derivada.

Coincidimos con los investigadores mencionados en que es necesario buscar alternativas de acercamiento al concepto de derivada en el nivel de bachillerato, el empleo de la definición formal resulta insuficiente para su comprensión; lo mismo ocurre cuando se da mayor importancia a ciertas representaciones de la misma, o cuando se promueve en los estudiantes la generación exclusiva de argumentos analíticos y la memorización de procedimientos algorítmicos. Por lo que debemos enfocarnos en cómo generar escenarios de laboratorio en donde el estudiante desarrolle la variación como el antecedente necesario de la noción de derivada, es decir, que trabaje su acercamiento a este concepto en un laboratorio experimental, en el cual el uso de la gráfica y la modelación servirán de soporte para generar un pensamiento y lenguaje variacional, y con ello dotar de significado físico a la derivada.

Finalmente, como mencionan Caballero y Cantoral (2013) el pensamiento y lenguaje variacional (PyLV), más allá de ser una línea de investigación, es identificado como una forma de pensamiento, que se caracteriza por proponer el estudio de situaciones y fenómenos en los que se ve involucrado el cambio, y donde la necesidad de predecir estados futuros motiva el estudio y análisis de la variación. Este será el eje rector de la investigación y el referente para la reflexión personal de la práctica profesional que desarrollaremos con alumnos de bachillerato.

REFERENCIAS

Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., y Gómez, P. (1995). Ingeniería didáctica en educación matemática. *México: Grupo Editorial Iberoamérica*, 97-140.Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En P. Gómez (Ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática (un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas* (pp. 97-140). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Basurto, E. (2011). Conceptualización de los parámetros en funciones polinomiales vía TI-Nspire. *Conferencia dictada en la XIII CIAEM*, Recife, Brasil.

Basurto, E. (2013). Una ruta didáctica para la enseñanza de los parámetros. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 8.* (11), 317-338. Costa Rica.

Briceño, E. (2013). *El uso de la gráfica como instrumento de argumentación situacional con recursos tecnológicos*. Tesis doctoral no publicada, Cinvestav-IPN, México.

Caballero M. y Cantoral R. (2013). Una caracterización de los elementos del pensamiento y lenguaje variacional. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 26*, 463-468.

Cabrera, L. (2009*). El Pensamiento y Lenguaje Variacional y el desarrollo de Competencias. Un estudio en el marco de la Reforma Integral de Bachillerato.* Tesis de maestría no publicada. Centro de Investigaciones y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Campos, C. (2003). *La argumentación gráfica en la transformación de funciones cuadráticas. Una aproximación socioepistemológica*. Tesis de Maestría no publicada, Departamento de Matemática Educativa Cinvestav-IPN, México.

Cantoral, R. (2013). *Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional*. DF, México: Subsecretaría de Educación Media Superior, Secretaría de Educación Pública. ISBN: 978-607-9362-03-4.

Cantoral, R. y Farfán, R.M. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Epsilon*, *42*(3), 854-856.

Cantoral, R., Farfán, R.M., Cordero, F., Alanís, J.A., Rodríguez, R.A. y Garza, A. (2000). *Desarrollo del Pensamiento Matemático*. México: Trillas.

Cantoral, R., Molina, J., y Sánchez, M. (2005). Socioepistemología de la predicción. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *18*(1), 463-468.

Castañeda, A. (2002). Estudio didáctico del punto de inflexión; una aproximación socioepistemológica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 5(1)*, 27-44.

Dolores, C. (Ed.). (2006). *Matemática educativa: algunos aspectos de la socioepistemología y la visualización en el aula.* Ediciones Díaz de Santos.

Font (2008). Rappesentazioni attivate nel calcolo Della derivata, in G. Arrigo (ed.) *Atti del Convegno dididáctica Della matematica 2008* (13-24). Alta Scuola Pedagogica: Locarno, Suiza.

Font, V. (2000), Representaciones ostensivas que pueden ser activadas en el cálculo de f'(x). El caso de la función seno. *Uno, 25*, pp. 21-40.

Font, V. (2009). Formas de argumentación en el cálculo de la función derivada de la función $f(x)=x^2$ sin usar la definición por límites. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática 18*, 15-18.

Gómez-Chacón, I. Mª (2011) *Modelizaciones dinámicas en Matemáticas. Usos del GeoGebra.* Publicaciones Instituto GeoGebra de Madrid. Cátedra Miguel de Guzmán, Facultad de Ciencias Matemáticas, Universidad Complutense de Madrid. Cd-Rom.

Morales, A., Mena, J., Vera, F. y Rivera, R. (2012). El rol del tiempo en un proceso de modelación utilizando videos de experimentos físicos. *Enseñanza de las Ciencias, 30* (3), pp 237-256.

Rosado, P. (2004). *Una resignificación de la derivada. El caso de la linealidad del polinomio en la aproximación socioepistemológica*. Cinvestav-IPN, México: Tesis de maestría no publicada.

Sánchez, M. y Molina, J. (2006). Pensamiento y lenguaje variacional: una aplicación al estudio de la derivada. En G. Martínez Sierra (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 19*, 739-744. México: Clame.

Sánchez-Matamoros García, G., García Blanco, M., y Llinares Ciscar, S. (2006). El desarrollo del esquema de derivada. *Enseñanza de las Ciencias, 24*(1), 85-98.

Sánchez-Matamoros, G., García, M., y Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 11*(2), 267-296.

Suárez, L., y Cordero, F. (2010). Modelación-graficación, una categoría para la matemática escolar. Resultados de un estudio sociepistemológico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 13*(4-II), 319-333.

Villa-Ochoa, J. A., y Ruiz Vahos, H. M. (2010). Pensamiento variacional: seres-humanos-con-GeoGebra en la visualización de noción variacional. *Educação Matemática Pesquisa*, *12*(3), 514-528.