CONSTRUCCIÓN DIDÁCTICA DE LOS NÚMEROS ENTEROS DESDE LA TEORÍA LOS MODOS DE PENSAMIENTO.

Bonilla Barraza,D[a.] yParraguezGonzález,M.[b]

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (Chile)
danielabonillab@gmail.com, marcela.parraguez@ucv.cl

Resumen
El presente reporte de investigación, tiene por objetivo mostrar los elementos de una construcción didáctica y matemática para el sistema de los números enteros (Z), como una propuesta de enseñanza – aprendizaje en la formación inicial de profesores desde la teoría de los modos de pensamiento de Anna Sierpinska; desde este referente comprendemos Z desde tres perspectivas, (AE): como un representante de una clase de equivalencia, (AA): como un conjunto de números positivos, negativos y el cero, y (SG): como un punto en la recta numérica. Se sustentan las evidencias que muestran la articulación de los tres modos de pensar Z.

Palabras claves: *Números enteros, recta numérica, profesores.*

Antecedentes y objetivos de investigación

El presente reporte de investigación, tiene por objetivo mostrar los elementos de una propuesta de enseñanza – aprendizaje para el sistema de los números enteros (*Z*), en la formación inicial de profesores.
El marco teórico sobre el cual se basa este estudio es *los modos de pensamiento* propuestos por Anna Sierpinska (2000), donde se distinguen tres modos de pensar un concepto: analítico-estructural (AE) –a partir de su definición formal–, analítico-aritmético (AA) –donde los objetos son pensados a través de relaciones numéricas–, y sintético-geométrico (SG) –como figuras que lo representan–.
Los modos de pensamiento son formas de ver y entender los objetos matemáticos. Estos dependen de los tipos de relaciones y objetos que evoquemos al momento de pensar en un objeto algebraico o al intentar resolver una tarea. Indudablemente el tipo de tarea que se le presenta a un estudiante guarda estrecha relación con el modo de pensamiento que éste utiliza para resolverla.

La principal diferencia entre los modos 'sintético' y 'analítico' es que en el modo sintético, los objetos son dados directamente para ser descritos por la mente, la cual trata dedescribirlos, es decir, de manera natural, mientras que en el modo analítico estos objetos son dados indirectamente, de hecho son construidos solamente por la definición de las propiedades de los elementos (Sierpinska, 2000).

Situamos entonces, a partir de los elementos que nos brinda el referente teórico, el sistema de los números enteros desde tres perspectivas, (AE): como un representante de una clase de equivalencia, (AA): como un conjunto de números positivos, negativos y el cero, y (SG): como un punto en la recta numérica (Figura 1).

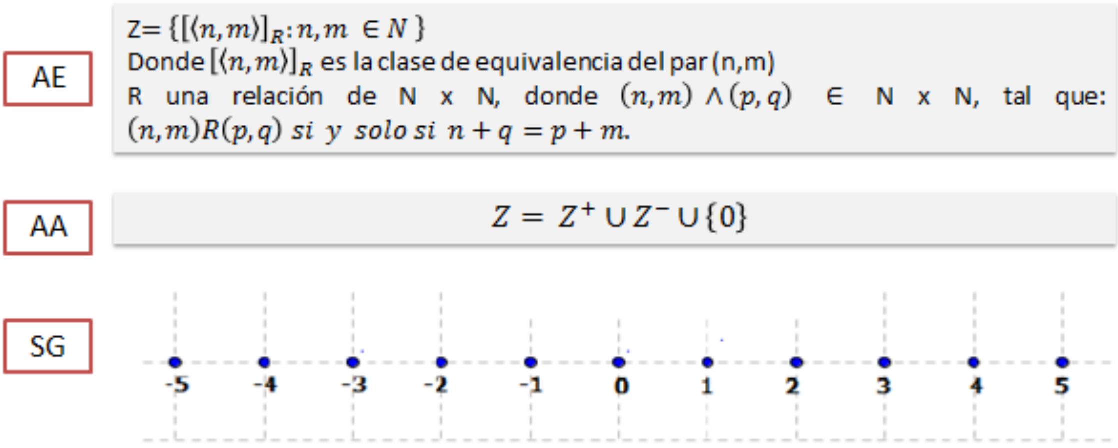


Figura 1: Modos de pensar el sistema de los números enteros.

Los estándares de desempeño docente plantean:"El futuro profesor comprende la construcciones de Z a partir de N" (Ministerio de Educación, 2012, p.112) es por esta razón que se propone la presente construcción didáctica de Z.

Desde la teoría "comprender un objeto matemático, es poder abordarlo articuladamente desde AE, AA y SG (Parraguez, 2012). Es por ello que, se realizó una revisión bibliográfica matemática y didáctica, en busca de aquellos elementos que permiten articular los 3 modos de pensar Z, dispuestos en la figura 1.

Metodología

La metodología utilizada en esta primera parte del estudio es una, Revisión documental, entendida como: "el proceso dinámico que consiste esencialmente en la recogida, clasificación, recuperación y distribución de la información" Latorre, Rincón y Arnal (2003, pág. 58).

El objetivo de esta revisión, es identificar el o los enfoques (sintético, analítico o estructural) presentes en la construcción matemática del sistema de los números enteros en libros especializados que permita situar este sistema desde el marco teórico propuesto. Así, como también indagar en los elementos matemáticos que cumplen con el rol de conectores entre los elementos de la construcción matemática.

Se destaca de esa indagación el surgimiento de elementos esenciales en el tránsito AE – SG y AE-AA como el plano discreto y la recta numérica, se precisa que su tratamiento debe ser más importante que una simple representación. Por ello, es relevante promover en los futuros docentes la reflexión sobre ¿cómo se disponen los números enteros en la recta numérica?.

Elementos de la construcción didáctica, análisis a priori

Se promueve inicialmente el tratamiento en un modo AE de *Z*. En actividades como:

Actividad 1:

a) *Sea R una relación definida sobre N x N donde* $(n,m) \in NxN$ *, tal que:* $(n,m)\ R\ (p,q)\ si\ \ y\ \ solo\ si\ \ n+q=p+m,$ *Escriba pares ordenados de las clases de equivalencia de los pares (2,3); (1,5) ; (7,7) ; (4,1) ; (2,1).*

b) *Identifique características comunes de los elementos de una clase de equivalencia.*

c) *Escriba representantes de las clases de equivalencia donde n=m; n>m ; n<m . redacte sus conclusiones.*

A partir de la relación dada, los estudiantes encontraran infinitos pares equivalentes a otros, esta idea, refuerza el concepto de representante de una clase de equivalencia.

Una vez comprendido el modo AE, se puede transitar hacia un modo AA, abordando por ejemplo la clase del par (2,3), como el conjunto $\langle(2{,}3)\rangle = \{(5{,}6),(6{,}7),(8{,}9)\ldots\ldots\ldots\}$, en general $\langle(2{,}3)\rangle = \{(5{,}6),(6{,}7),(8{,}9)\ldots\ldots\ldots\} = \{(a,a+1)/a \in N\}$.

En este tránsito, es esencial el rol del docente formador, pues debe guiar la reflexión para que los estudiantes (profesores en formación) comprendan, en primer lugar, cuales clases de equivalencia corresponden a números positivos, negativos y cero, se puede hacer preguntas como, ¿en qué casos el valor de m es mayor al valor de n? , ¿En qué casos son iguales m y n?, también se puede sugerir que elijan un representante de cada clase.

Se espera que esta reflexión conjunta, derive en la construcción de $\{0\}$ =$\{\langle n,m\rangle; n = m\}$; Z^- =$\{\langle n,m\rangle; n < m\}$; Z^+ =$\{\langle n,m\rangle; n > m\}$, comprendiendo Z en un modo AA como, $Z = Z^+ \cup Z^- \cup \{0\}$.

En segundo lugar, se busca que a partir de las características que establecen los estudiantes, sobre las clases de equivalencia, permitan al docente formador institucionalizar, concluyendo que a cada clase de equivalencia, le corresponde el símbolo usual que representa cada número entero.

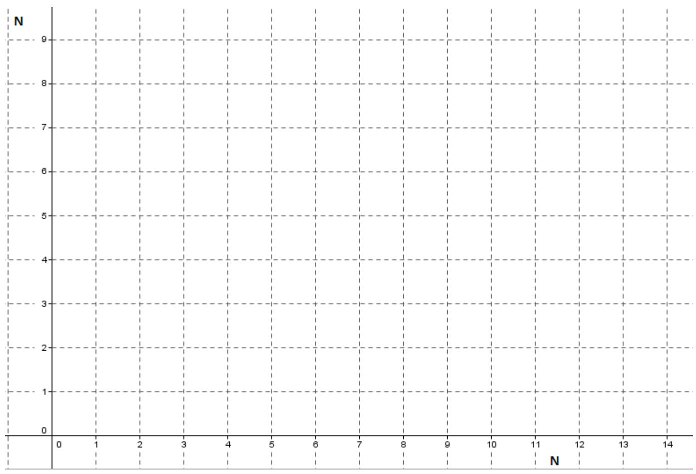
$\{\{(5{,}0);(6{,}1);(7{,}2);(8{,}3)\ldots\ldots\ldots\} = \{(a+5,a)/\, a \in N\} = 5$

$\{\{(0{,}5);(1{,}6);(2{,}7);(3{,}8)\ldots\ldots\ldots\} = \{(a,a+5)/\, a \in N\} = -5$

En resumen, el tránsito entre los modos AE- AA, potencia la comprensión del sistema de los números enteros y también la comprensión de la naturaleza de un número entero.

Actividad 2: Ubique

Estos pares ordenados en el plano discreto de $Nx\ N$ *. ¿Qué observas?, Reflexione sobre ¿cómo se forma la recta numérica del sistema de los números enteros?*



En esta fase se potencia el tránsito entre los modos AE –AA--SG, considerando como idea esencial de dicha articulación potencia la construcción de la recta numérica discreta de Z. A partir del trabajo con las clases de equivalencia, se espera que los estudiantes, ubiquen los pares ordenados de cada clase en el sistema de referencia *N x N*, identificando situados en un modo AA , cuales pares corresponden a números negativos, positivos y cero, para posteriormente dar cuenta de que cada clase de equivalencia tendrá una única ubicación en un nueva recta , que puede estar dispuesta en forma diagonal, como se muestra en la figura 2, obteniendo así, el modo SG de Z.

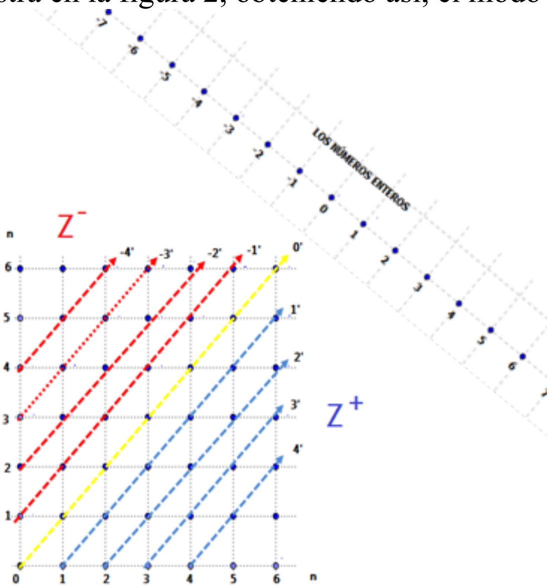


Figura 2: Desde las clases de equivalencia a la recta numérica.

Otra posible respuesta de los estudiantes, puede ser que los números enteros se pueden representar en la recta numérica, agregando a la izquierda del cero los números negativos, como se muestra a continuación. todos los pares ordenados de una clase de equivalencia de un mismo número entero "cae"en el mismo lugar de la recta numérica. (ver figura 3)

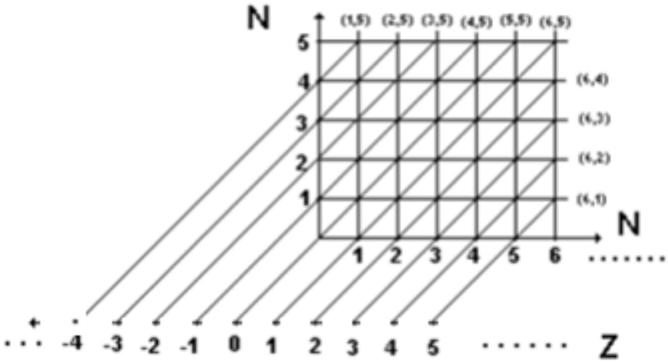


Figura 3: recta numérica discreta de Z.

Es importante destacar, el rol del plano discreto Nx N, pues actúa como uno de los elementos articuladores entre los Modos AE- SG, de la propuesta didáctica.

Referencias bibliográficas

Arnal, J., del Rincón, D., y La Torre, A. (1992). Investigación educativa: fundamentos y metodología. Barcelona: Labor.

Construcción de los Números Reales (2010). En P. J. Herrero, Topología de Espacios Métricos (págs. 175-182).

Flores, Raúl : (1971) Fundamentos de los sistemas numéricos. Interamericana. México. Parraguez, M. (2012). Teoría los modos de pensamiento: Didáctica de la Matemática

Valparaíso: Ediciones Instituto de Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso-Chile.

Lewin, R. A. (2007). Introducción a la teoría de conjuntos.

Ministerio de Educación. (2012). Estándares orientadores para carrera de pedagogía en Educación media. Santiago: Ministerio de educación.

Sierpinska, A. (2000). On some aspects of students' thinking in linear algebra.En J.