

CONSTRUCCIÓN DE SIGNIFICADOS PARA LO TRIGONOMÉTRICO EN EL CONTEXTO GEOMÉTRICO DEL CÍRCULO

Olivia Alexandra Scholz Marbán, Gisela Montiel Espinosa

olivia.scholz@iems.edu.mx, gmontiel@ipn.mx

Instituto de Educación Media Superior IEMS, Instituto Politécnico Nacional

Reporte de Investigación

Modelación y aplicaciones, y matemática en contexto

Medio Superior

RESUMEN

La presente investigación se planteo el estudio de la resignificación de lo trigonométrico una secuencia de actividades basadas en una fundamentación teórica que, a diferencia de la tradición escolar de estudiar las razones trigonométricas a partir de la sustitución de datos del triángulo rectángulo para obtener el dato faltante, propone la emergencia de las razones trigonométricas en el contexto geométrico del círculo para lograr que los estudiantes construyan significados de lo trigonométrico más allá de la división de las longitudes del triángulo rectángulo. *Habla un poco del método y los resultados, en forma sintética..*

PALABRAS CLAVES: Trigonometría, secuencia, bachillerato, razones, círculo.

INTRODUCCIÓN

En el nivel medio superior el estudio de la trigonometría se inicia retomando la noción de la razón trigonométrica que se enseña en el nivel básico-secundaria, es decir, se parte del supuesto que los estudiantes ya la han aprendido y tienen un cierto dominio, al menos sobre las tres razones trigonométricas básicas *seno*, *coseno* y *tangente*, tanto en la resolución de triángulos como en su aplicación.

Este supuesto incluye considerar que los estudiantes cuentan con los conocimientos previos de conceptos como ángulo, triángulos, sus clasificaciones, relaciones de sus lados y sus ángulos, así como de los conceptos de semejanza y proporcionalidad, y, evidentemente, del concepto de razón. Sin embargo, se ha detectado frecuentemente que no es así y esto complica aún más el aprendizaje de conceptos más avanzados, como son las identidades, las ecuaciones, las leyes y las funciones trigonométricas.

Nos propusimos estudiar el proceso de *significación progresiva* para lo trigonométrico en el estudiante de nivel bachillerato ante actividades de construcción geométrica, en el contexto del círculo, a partir de una situación problema de cálculo de distancias. La articulación de las construcciones geométricas con lo trigonométrico, en el proceso del desarrollo de solución, permitiría al estudiante significar la razón trigonométrica como una herramienta para cuantificar la relación entre el ángulo central y la distancia entre dos puntos sobre la circunferencia, identificando no sólo que hay una relación, sino cómo es.

MARCO TEÓRICO

Las consideraciones teóricas que permitieron fundamentar las actividades de la secuencia diseñada y su análisis son, por una parte, el estudio socioepistemológico de Montiel (2011) sobre la construcción social de conocimiento trigonométrico y, por otra parte, lo que Vohns (2006) denomina como *aproximaciones e ideas básicas inherentes* en el aprendizaje de la trigonometría a partir de la geometría.

Al problematizar el saber matemático como punto de partida para su investigación, Montiel (2013, 2011) reconoce la importancia de la medición de cuerdas en un contexto de construcciones geométricas como la actividad germinal de la herramienta matemática de interés. Sin embargo, deja claro que no pretende una reconstrucción de la historia, sino de condiciones tales como el contexto, el lenguaje, la racionalidad y, principalmente, el manejo adecuado de las escalas de tiempo; reconociendo que las actividades estarán matizadas por el escenario, el planteamiento de situaciones-problema y los participantes (edad, conocimientos previos, tradición escolar, etc.).

Montiel (2011) desarrolla una epistemología de prácticas a partir de la cual se explica la construcción social del conocimiento trigonométrico, desde el enfoque teórico de la socioepistemología. En particular, para lo relacionado con las razones trigonométricas sintetiza los elementos de construcción social en la Tabla 1.

Tabla 1. *Elementos del momento de Anticipación*

	Anticipación
Práctica de Referencia	Matematización de la Astronomía
Contexto	Estático – Proporcional
Lenguaje	Geométrico-Numérico
Racionalidad	Helenística-Euclidiana
Herramienta	Razón Trigonométrica
Variables	sen θ (longitud) θ ángulo (en grados)
Escala de tiempo	Finita

La autora identifica, en escenarios históricos, a la *anticipación* como la *práctica social* que reguló las actividades asociadas a la *matematización de la astronomía*, de donde emerge la herramienta matemática que hoy conocemos como razón trigonométrica. Reconoce que dado el dominio de la racionalidad helenística, la Trigonometría nace en el marco epistemológico que brindaba la geometría deductiva; y denomina a la construcción de “modelos geométricos a escala” de una

entidad real no manipulable como *una transición de lo macro a lo micro*, donde la proporcionalidad entre ellos (realidad y modelo) condiciona la precisión del modelo. De manera natural, las *razones* se convierten en la abstracción inmediata de la *proporción* y los círculos, los arcos/ángulos y las cuerdas en los elementos constitutivos del modelo geométrico.

De ahí que en el problema que plantea Vohns (2006) a estudiantes-profesores, identificamos la posibilidad de provocar intencionalmente los elementos de construcción social de lo trigonométrico de Montiel (2013, 2011), para que el estudiante del nivel medio superior construya nuevos significados de lo trigonométrico, transitando a su vez por los cuatro tipos de razonamiento que señala Vohns: punto de vista geométrico, la aproximación empírica-numérica, el punto de vista aritmético/algebraico y la aproximación trigonométrica.

MÉTODO

El trabajo utilizó la metodología de experimentos de diseño, la cual tiene un enfoque pragmático, que retoma de la ingeniería, y una orientación teórica; se centra en un tema particular, desarrollando teorías locales mediante el estudio sistemático de las formas de aprendizaje y los medios que se relacionan con éstas (Cobb, Confrey, Lehrer y Schauble, 2003). Los experimentos de diseño utilizan tareas instruccionales en un contexto definido que sirven de respaldo para estudiar las formas de aprendizaje, el contexto diseñado es sujeto a pruebas, revisiones e iteraciones que trabajan de manera similar a la variación sistemática de un experimento.

Elegimos esta metodología porque trabajamos en un tema muy específico de la enseñanza del nivel bachillerato (las razones trigonométricas) y aunque tal vez el trabajo no alcanza para desarrollar una teoría, si puede robustecer explicaciones teóricas o ser la base para desarrollarla, si otros profesores aplican, documentan y analizan la misma secuencia en otros grupos. Cobb, Confrey, Lehrer y Schauble (2003) se refieren a los experimentos de diseño como los que “conducen al desarrollo de teorías, no sólo a lo que empíricamente se dice que funciona. Estas teorías son relativamente humildes ya que van destinadas a procesos de aprendizaje de dominios específicos”. Estas teorías dan cuenta de los patrones sucesivos en el razonamiento de los estudiantes cuando trabajan con los medios que se les proporcionan y que justifican la aparición de esos patrones.

El marco para organizar y analizar el aprendizaje matemático que propone Cobb (2000) en esta metodología, se constituye por dos aspectos, uno que contempla el trabajo colectivo, al que llama "Perspectiva Social", y otro que contempla el trabajo individual, al que llama "Perspectiva Psicológica"; y se refieren a los dos puntos de vista que constituyen la posición teórica de la metodología. Bajo la perspectiva social considera tres aspectos del aula, y bajo la perspectiva psicológica indica tres aspectos relacionados con la actividad individual de los estudiantes en el aula. El cuadro que propone Cobb (2000) se muestra en la Tabla 2, donde se muestran cada uno de los aspectos que considera en ambas perspectivas.

Tabla 2. Marco interpretativo de la metodología de investigación de diseños.

Perspectiva Social	Perspectiva Psicológica
Normas sociales del aula	Las creencias del estudiante acerca de su propio papel, el papel de los otros, y la naturaleza general de la actividad matemática en la escuela
Normas sociomatemáticas	Creencias y valores matemáticos
Prácticas matemáticas en el aula	Interpretaciones y razonamientos matemáticos

Nuestra trayectoria hipotética de aprendizaje la configuramos a partir de la articulación de la propuesta de Vohns (2006) y Montiel (2011), así que para resignificar lo trigonométrico, iniciamos planteando una situación problema de cálculo de distancias, que mediante construcciones geométricas en el contexto del círculo, además del empleo de la aritmética y álgebra nos condujera a la razón trigonométrica seno, como se muestra en la Figura 1.

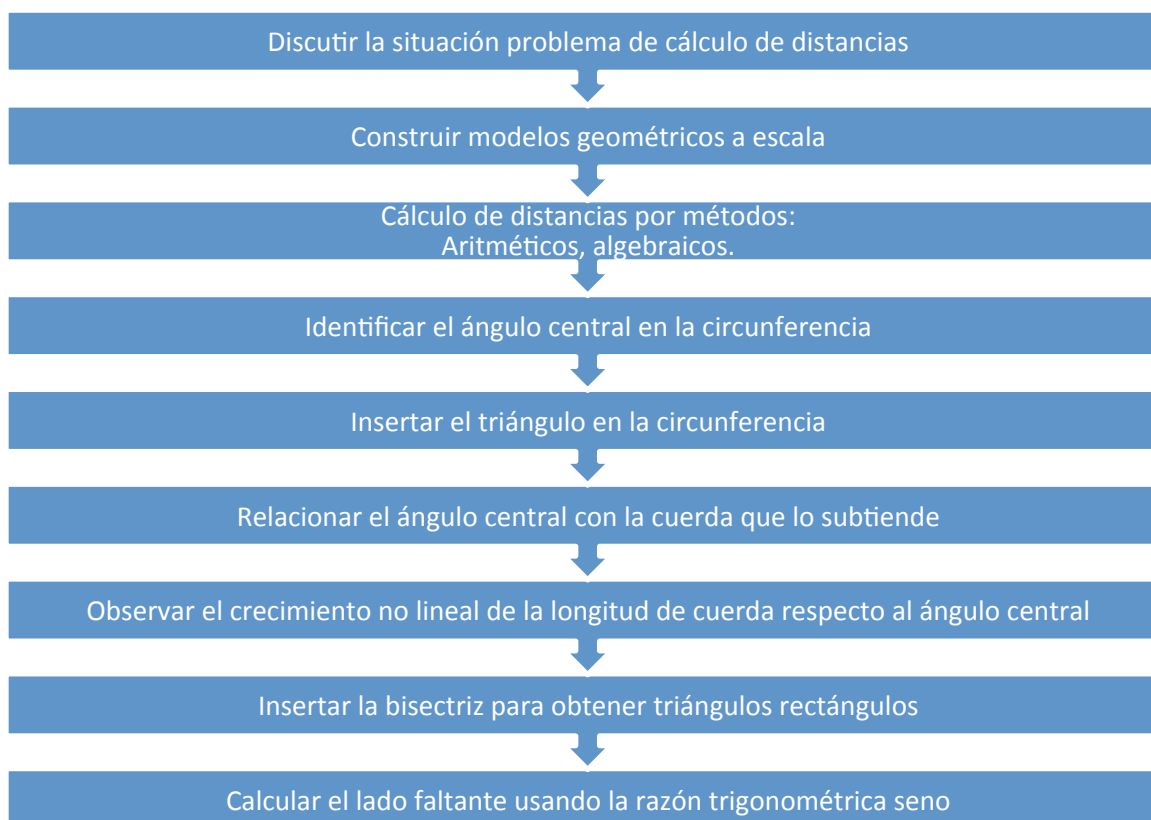


Figura 1. Trayectoria hipotética de aprendizaje

Basándonos en el marco interpretativo de Cobb (2000), para nuestra propuesta las normas sociomatemáticas, que según lo refiere Cobb son aquellas que cuentan como una solución y una explicación aceptable, además de se relacionan con las creencias y valores matemáticos del

6. Modelación y Aplicaciones y Matemática en Contexto

estudiante. Teniendo en cuenta las bases teóricas de este proyecto que es la construcción social del conocimiento trigonométrico; la actividad matemática que se incluye en nuestra secuencia contempla el pasar de lo macro a lo micro, modelar utilizando elementos geométricos, realizar modelos a escala manteniendo la proporcionalidad, el uso de lenguaje geométrico – numérico, y la razón trigonométrica seno.

Las prácticas matemáticas del aula, que son las formas de razonar matemáticamente al utilizar las herramientas (los medios que soportan) cuando se lleva a cabo una tarea, por nuestra fundamentación nos referiremos a las prácticas matemáticas del aula como las prácticas que van a delimitar los significados que nos proponemos construyan los estudiantes, que son que, la trigonometría es estudiar cómo se relacionan los componentes del triángulo.

Tomando como base el marco normativo de Cobb (2000) realizamos las adecuaciones que consideramos necesarias, teniendo en cuenta nuestra realidad social y nuestra fundamentación teórica; nuestro marco interpretativo se puede observar en la Tabla 3.

Aún cuando en la secuencia de actividades consideramos y proponemos actividades que se trabajan en lo individual para obtener la perspectiva psicológica a la que se refiere Cobb (2000), es sabido y cierto que en las aulas de las escuelas públicas mexicanas los estudiantes trabajan la mayor parte del tiempo en parejas o equipos o grupal, comparando resultados, consultando sus procedimientos y retroalimentándose entre ellos. En el IEMS-DF está presente esta forma de trabajo en los estudiantes, además que la disposición de las bancas se presta para que trabajen la mayor parte del tiempo en parejas, porque en el aula hay mesas de trabajo en las que se pueden sentar dos estudiantes por mesa.

Esta metodología de trabajo está presente desde el nivel básico por lo que aunque el docente especifique a los estudiantes que la actividad es para trabajarse de manera individual, en ellos está arraigada la práctica de trabajar en conjunto.

Tabla 3. *Marco interpretativo para la metodología de nuestra investigación de diseño*

Consideraciones Sociales (Grupo)	Consideraciones Psicológicas (Individual)
Normas sociales del aula	Las creencias del estudiante acerca la actividad matemática en el aula.
Normas sociomatemáticas	Creencias y valores matemáticos
Prácticas matemáticas en el aula	Interpretaciones y razonamientos matemáticos

El grupo en el que se aplicó la secuencia didáctica es el grupo 201 de la asignatura de Matemáticas II correspondiente al segundo semestre turno matutino, del Instituto de Educación Media Superior del Distrito Federal (IEMS-DF) plantel Carmen Serdán, en el grupo estaban inscritos 27 estudiantes pero a la secuencia sólo asistieron 21, de los cuales 12 son mujeres y 9 hombres. Cinco de ellos ya habían realizado la secuencia de actividades el semestre anterior, por lo que esta vez fungieron como responsables de equipo, su función era orientar y apoyar a los integrantes de un equipo a lo largo del desarrollo de las actividades.

6. Modelación y Aplicaciones y Matemática en Contexto

La aplicación de la secuencia de actividades se llevó a cabo en 7 sesiones de clase, sin embargo, algunos faltaron a alguna de las clases. Por fortuna el modelo educativo del IEMS-DF integra a las clases regulares las horas de asesoría y dentro de éstas se repusieron las actividades. De los 16 estudiantes que iniciaron la secuencia de actividades, sólo 13 la concluyeron completa.

RESULTADOS

Las actividades logran que el alumno vincule lo trigonométrico con lo geométrico al mostrarle, a lo largo del desarrollo de la solución de la situación problema, que la razón trigonométrica surge de la necesidad de calcular la distancia de la cuerda que subtiende al ángulo central del círculo dado que la relación entre ellos no es proporcional, pero la relación entre la longitud de la cuerda y el radio de la circunferencia sí lo son.

Las producciones de los estudiantes dan muestra de que sus conocimientos previos para abordar el tema de razón trigonométrica son aún débiles. Sin embargo, con la intervención del docente durante la puesta en escena se pusieron en funcionamiento gradualmente, al nivel del lenguaje, representación y definición, conceptos como círculo, circunferencia, radio, diámetro, ángulo, ángulo central, cuerda, razón, proporción, triángulos y semejanza.

Las evidencias de la resignificación alcanzada por los estudiantes a lo largo de la secuencia de actividades la podemos observar al recapitular sus producciones en las hojas de trabajo, sus participaciones e intervenciones a lo largo de las clases, en un inicio al enfrentar el problema del cálculo de distancias se observó la idea aritmética del grupo cuando proponen como solución que la distancia entre las pelotas es de 8 metros.

Cuando recrean la situación observan que existen distintas soluciones al planteamiento del problema, detectando también que para algunos casos no tenían un procedimiento matemático para resolverlo, conforme desarrollaban las actividades introducían nuevos elementos geométricos que enriquecían el modelo situacional obtenido por ellos en un inicio.

Durante el desarrollo de las actividades los estudiantes incorporaban a su lenguaje los términos de ángulo, segmento, círculo, centro, bisectriz, triángulo rectángulo, semejanza y razón trigonométrica, hasta que finalmente se obtuvo un método de solución para los casos que no pudieron resolver en la primera actividad.

Introducir la razón trigonométrica como herramienta para cuantificar la relación entre ángulo y cuerda, para calcular la distancia del problema inicial, les proporciona a los estudiantes un contexto para vincular lo trigonométrico con lo geométrico. Evidencia de la resignificación que se logra es que fue necesaria la introducción de la razón trigonométrica por parte de la profesora, los estudiantes no identifican que era pertinente utilizarlas. Con esto los estudiantes encuentran la posibilidad de calcular la razón trigonométrica desde el contexto del círculo.

CONCLUSIONES

El diseño de las actividades que se proponen en este trabajo se basó en el marco teórico que contempla los elementos de la construcción social del conocimiento trigonométrico y las ideas básicas inherentes en el aprendizaje de la trigonometría, se trazó con estas bases una trayectoria hipotética de aprendizaje para el tema de las *razones trigonométricas* en el bachillerato. Estas bases nos plantean la vinculación del contexto geométrico del círculo para devolver el sentido al estudio de lo trigonométrico, rompiendo con la tradición escolar de abordar los contextos del

6. Modelación y Aplicaciones y Matemática en Contexto

círculo y del triángulo rectángulo por separado, con el propósito de dotar al estudiante de herramientas para resignificar la razón trigonométrica.

El uso de la herramienta computacional es otro acierto del diseño porque permite a los estudiantes realizar el modelo geométrico a escala y observar conforme lo construye el nombre geométrico escolar de cada parte del modelo, al insertar por ejemplo un punto, un segmento de longitud fija, una circunferencia dados centro y uno de sus puntos, el ángulo, la distancia y en este proceso adquiere cierto lenguaje geométrico porque relaciona cada nombre con lo que se traza en la pantalla de la computadora.

Además la herramienta computacional permite la obtención de datos de manera rápida, como por ejemplo el dato de la distancia para distintos ángulos, aunque no le permite ver al estudiante cómo se obtiene ese dato; es por eso que se diseñó una actividad para obtener el dato de la distancia sin el uso del programa computacional.

El diseño propuesto puede ser mejorado y adaptado al contexto escolar de otras instituciones de nivel medio superior, por ejemplo en la actividad 2 puede introducirse la clasificación de los triángulos para que los alumnos identifiquen que el triángulo dentro del círculo es un triángulo isósceles, pueden estudiarse también las partes del círculo para que identifiquen el centro, la cuerda, el diámetro y el radio.

Si bien la propuesta del diseño está pensada para resignificar lo trigonométrico en el bachillerato es cierto que puede apoyar el aprendizaje de los temas geométricos y los conocimientos previos requeridos para abordar el tema de la razón trigonométrica. Además se puede extender para continuar con el estudio de la trigonometría de los temas de bachillerato que son las funciones trigonométricas, aprovechando el hecho de que los estudiantes ya están trabajando en el contexto del círculo, lo que suponemos hará más fácil la transición al estudio de las funciones trigonométricas, o al menos provocará coherencia en el uso de distintas nociones matemáticas.

AGRADECIMIENTOS

Este avance de investigación se enmarca en el Proyecto SIP 2014-1269 *Experimento de diseños para la enseñanza de la Trigonometría. Un estudio de los procesos de articulación de la teoría y la práctica educativa para la innovación didáctica.*, financiado por la Secretaría de Investigación y Posgrado del Instituto Politécnico Nacional.

REFERENCIAS

- Cobb, P. (2000). The importance of situated view of Learning to the Design of Research and Instruction. En Boaler, J. (Ed.). *Multiple perspectives on mathematics teaching and learning* (pp 45-82). Greenwood Publishing Group.
- Cobb, P., Confrey, J., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational researcher*, 32(1), 9-13.
- Montiel, G. (2011). *Construcción de conocimiento trigonométrico. Un estudio socioepistemológico*. México: Ediciones Díaz de Santos.
- Montiel, G. (2013). *Desarrollo del Pensamiento Trigonométrico*. México: Secretaría de Educación Pública.
- Vohns, A. (2006). Reconstructing basic ideas in geometry—an empirical approach. *ZDM*, 38(6), 498-504.