EXPERIMENTO DE DISEÑO: APROVECHAMIENTO DEL ÁNGULO-CUERDA PARA RESIGNIFICAR LA RAZÓN TRIGONOMÉTRICA

Diana del Carmen Torres Corrales, Gisela Montiel Espinosa, Ulises Bladimir García Ortíz, Alan Daniel Robles Aguilar, Julio César Ansaldo Leyva

d.torres@live.com.mx, gmontiel@ipn.mx, ulises.garcia@itson.edu.mx, alan.robles@itson.edu.mx, julio.ansaldo@itson.edu.mx

Instituto Tecnológico de Sonora, Instituto Politécnico Nacional

Reporte de investigación

Matemática en contexto

Superior

RESUMEN

Las dificultades para transitar de problemas intramatemáticos a extramatemáticos de la razón trigonométrica en estudiantes de Ingeniería, fueron la pauta para proponer el análisis de la actividad matemática que se genera a partir del planteamiento de un problema y su organización didáctica que, centrados en construcciones geométricas, llevan a la identificación de las razones trigonométricas en el círculo. Con este problema de investigación, se caracterizaron la propuesta constructivista de Moore (2014) y el diseño de Vohns (2006), articulado con la epistemología de prácticas de Montiel (2011), ya que permiten su significación progresiva en el *contexto del círculo,* principalmente porque devuelven a lo trigonométrico su naturaleza geométrica (Montiel, 2013), lo cual permitió su análisis bajo un enfoque teórico de corte social.

PALABRAS CLAVE: Resignificación, razón trigonométrica, construcción geométrica, círculo, ingeniería.

INTRODUCCIÓN

Dadas las dificultades para transitar de problemas intramatemáticos a extramatemáticos de la razón trigonométrica en estudiantes de Ingeniería, se percibió la necesidad de organizar un nuevo escenario escolar para abordar lo trigonométrico, uno que no separara tajantemente el contexto geométrico de las razones, del contexto analítico de las funciones.

De aquí se propuso que, a través de una situación de construcción geométrica, los estudiantes de Ingeniería resignificaran la noción de razón trigonométrica tomando en cuenta que deben hacer un uso coherente de otras nociones matemáticas. En ese sentido, la propuesta constructivista de Moore (2014) y el diseño de Vohns (2006) "permitiría la significación progresiva de las razones en el contexto del círculo, principalmente porque devuelve a lo trigonométrico su naturaleza geométrica" (Montiel, 2013), y específicamente porque genera actividad matemática más allá de la mecanización aritmética y algebraica, y de la memorización.

Dado lo anterior, se propuso el análisis de la actividad matemática que se genera a partir del planteamiento de un problema y su organización didáctica que, centrados en construcciones geométricas, llevan a la identificación de las razones trigonométricas en el círculo, para identificar si la resignificación, en este proceso de construcción geométrica, permite contrarrestar el fenómeno de aritmetización que se presenta en la Trigonometría escolar.

MARCO TEÓRICO

Desde la Socioepistemología el término resignificar se utiliza para referirse al proceso continuo de darle significado al saber matemático a través de sus usos, esto es, la significación que subyace a la actividad y no necesariamente al objeto matemático (Montiel y Buendía, 2012).

Con base en su epistemología de prácticas, Montiel (2011), identificó al fenómeno didáctico aritmetización trigonométrica, cuando se introduce a las razones trigonométricas, como la pérdida del proceso geométrico para la construcción de las relaciones trigonométricas, que aun expresadas como razones dejan de tener utilidad para expresar relaciones de proporcionalidad y se convierten en el proceso aritmético de dividir las longitudes de los lados de un triángulo.

Para analizar las dificultades y las construcciones de lo trigonométrico, desde el enfoque teórico de la Socioepistemología, se utilizó la epistemología basada en la actividad que proponen Montiel (2011, 2013), Scholz y Montiel (2013) y Montiel y Jácome (en prensa).

Así también, se planteó a manera de hipótesis las 4 condiciones para la resignificación (Molina, 2013), aplicadas a lo trigonométrico:

1. Condición existente que pretende ser transformada: el fenómeno de aritmetización de la razón trigonométrica.
2. Cambios que operen en condiciones estratégicas: diseño y organización didáctica fundamentadas en la epistemología de prácticas de lo trigonométrico.
3. La probabilidad inicial efectiva de una transformación es inversamente proporcional a la consistencia de la condición que desea ser transformada.
4. El proceso de transformación siempre supone un intercambio activo con el contexto: un entorno geométrico para dar coherencia a las nociones matemáticas.

MÉTODO

Los experimentos de diseño son una metodología (ver Figura 1) para comprender cómo, cuándo y por qué las innovaciones educativas funcionan en la práctica (Cobb, 2000).

Etapas				
1. Definición de la intención teórica.	2. Especificación de significados, ideas y formas de razonamiento.	3. Especificación de supuestos sobre los puntos de partida intelectual y social para las formas previstas de aprendizaje.	4. Formulación de un diseño.	5. Realización de un análisis retrospectivo.

Figura 1. Las cinco etapas de un experimento de diseño. Adaptado de Cobb *et al.* (2000).

El diseño elaborado es una secuencia didáctica que consta de 5 actividades divididas en dos apartados: actividades didácticas introductorias (3 actividades) y actividades didácticas específicas para la resignificación de lo trigonométrico (2 actividades).

La primera etapa de la secuencia, consta de las *actividades didácticas introductorias*, las cuales buscan que el estudiante ponga en funcionamiento su razonamiento proporcional y haga *uso* *coherente* de otras nociones matemáticas, que son premisa para introducir a la razón trigonométrica, tal como lo mencionan Moore (2014) y Montiel y Jácome (en prensa).

Las *actividades didácticas de la razón trigonométrica*, buscan que el estudiante construya nuevos significados, poniéndolos en uso, ahí es donde se identificará su resignificación. En ese sentido, no se enfatizan en el dominio de las técnicas, *sino en el proceso de construcción geométrica de donde emergen*. Con ello no se pretende subsanar las deficiencias de su experiencia educativa en niveles previos, o sustituir lo visto en la secundaria y el bachillerato, sino que tengan una experiencia distinta. El diseño se basa en Vohns (2006) que dice "lo trigonométrico se desarrolla con *razonamiento*s de medición y estructuración geométrica", además del uso de tecnología, *applet* de GeoGebra.

Así también, se ha planteado una trayectoria hipotética de aprendizaje (THA), como propuesta de los momentos por los que se hará transitar al estudiante para lograr la resignificación de lo trigonométrico:

- Manejo situacional de la medida angular.
- Estudio del círculo, sus partes y sus relaciones.
- Estudio del triángulo en el círculo (aproximaciones y razonamientos de Vohns).
- Análisis de la proporcionalidad.
- Matematización de lo trigonométrico.

ANÁLISIS DE LOS DATOS

Posterior a la puesta en escena, se capturaron los datos obtenidos en la tabla del marco interpretativo para el análisis de la actividad matemática en el aula y el aprendizaje (ver Tabla 1). Esta información forma parte del análisis retrospectivo, que se concluye en el siguiente apartado al confrontar los supuestos teóricos con los resultados.

Tabla 1. Un marco interpretativo para el análisis de la actividad matemática en el aula y el aprendizaje

Consideraciones de análisis **Sociales**	**Individuales**
Normas Sociales de Comportamiento (NSC)	
¿Cuáles son las *normas sociales* que rigen el comportamiento de los estudiantes en la secuencia didáctica?	¿Qué *creencias del propio desempeño, del rol de los compañeros y de la naturaleza general* de la actividad matemática en la secuencia didáctica se perciben en el estudiante?
Normas Sociomatemáticas (NSm)	
¿Qué *normas sociomatemáticas* poseen los estudiantes?	¿Cuáles son las *creencias y los valores* que tiene de las matemáticas el estudiante?
Prácticas Matemáticas del Salón (PMS)	
¿Cuáles son las *prácticas matemáticas* del salón de clases se perciben en los	¿Cuáles son las *interpretaciones y*

estudiantes?	*razonamientos matemáticos* del estudiante de forma general durante la secuencia didáctica?

Nota. Fuente: Adaptado de Cobb (2000).

La puesta en escena se realizó en 3 sesiones, con una duración total de 332 minutos, durante los meses de mayo (las primeras dos sesiones) y julio (tercera sesión) del año en curso. En la primer sesión se aplicó la Entrevista inicial (15 minutos) y se realizó la Actividad 1 (36 minutos), en la segunda la Actividad 2 (35 minutos) y la Actividad 3 (50 minutos) y en la tercera la Actividad 4 (76 minutos), la Actividad 5 (105 minutos) y la Entrevista final (15 minutos).

La población bajo estudio fue un grupo de 4 estudiantes de Ingeniería (Alfredo, Carlos, David y Manuel), quienes participaron de forma voluntaria al ser invitados en la asignatura de Fundamentos de Matemáticas (semestre Enero-Mayo 2014, de las 13 hrs de lunes a viernes). La edad de los estudiantes es entre 19 y 22 años, de los cuales *Carlos* cursaba el semestre cero (modalidad que permite explorar la vida universitaria, condicionando al alumno a aprobar un cierto porcentaje de las asignaturas para ser admitido como alumno regular a la universidad), *David* el primer semestre, *Alfredo* y *Manuel* el segundo semestre. Solamente *Manuel* es estudiante de tiempo completo (es decir, no trabaja ni realiza actividades adicionales que le demanden tiempo específico), *Alfredo* y *Carlos* son deportistas de alto rendimiento (entrenan de 4 a 6 horas diarias dependiendo de su rutina y si participan en competencias) y *David* posee un negocio propio de ropa deportiva y tiene la Licenciatura de Negocios Internacionales.

Para ejemplificar el análisis de los datos, se muestra a continuación el llenado de la tabla del marco interpretativo para la Actividad 1:

Tabla 2. Resultados de la Actividad 1. La porción de pizza correcta

Consideraciones de análisis **Sociales**	**Individuales**
Normas Sociales de Comportamiento (NSC)	
• Para iniciar la actividad la profesora junto con los estudiantes dio lectura a la situación problema de la pizza, posteriormente les indicó que dieran respuesta de forma individual (con palabras, dibujos, como lo imaginaran), comparan con su compañero más cercano y se hiciera una discusión grupal de las respuestas, moderada por ella. • Estas reglas del juego, fueron llevadas por todos los estudiantes, excepto compartir respuestas con su compañero de enseguida.	• La necesidad de diseñar una herramienta que permitió cortar las pizzas de forma precisa (ver Transcripción 1). • La situación problema generó un ambiente de interés para los estudiantes, les fue sencillo de comprender y de forma rápida se generaron ideas para la solución del problema de manera individual y posteriormente se compartió de manera grupal.
Normas Sociomatemáticas (NSm)	
• Esta actividad tuvo la intención de que el	• Los cuatro estudiantes reconocieron que

estudiante reconociera la relación entre radio, ángulo y longitud de arco, haciendo uso de la medición con regla, transportador y cordón.

existe una necesidad de medición en el sentido de porción-longitud, por lo cual hicieron uso de la proporción al utilizar la escala de la figura de la pizza y el material proporcionado para medir (ver Figura 2), sin embargo solo dos de ellos (Alfredo y David) utilizaron la unidad de medida (cm) para el radio y la longitud de arco.

- Fue extraño para los estudiantes al inicio describir los conceptos de radio, ángulo y longitud de arco de una porción de pizza, sin embargo, pudieron generar argumentaciones específicamente que ponen en uso los conceptos radio, ángulo y longitud de arco asociados a la porción de pizza y su relación entre ellos.

Prácticas Matemáticas del Salón (PMS)

- Se logran prácticas de medición, comparación y geometrización.

- Los estudiantes compararon y midieron utilizando un patrón de referencia y una escala para diseñar el cortador de pizza (ver Figura 3), lo que da evidencia del *razonamiento proporcional* al manejar el dibujo como una escala de la pizza real.

Si estuviera en tus manos la silicón de tal problema *¿Qué solución le puedes sugerir a Don Miguel?*

- Alfredo: Hacer un molde con las medidas exactas para todas las pizzas de Don Miguel
- Carlos: Partidor de pizza, como el que se usa para partir manzanas en partes iguales.
- David: Ser más cuidadoso al momento de corta las pizzas, o inventar o realizar un cortador diseñado para que siempre corte pedazos del mismo tamaño, dependiendo del tamaño de la pizza.
- Manuel: Tener mpas precisión al cortar la pizza ya sea con el cortador convencional o sería mejor tener un apartado o utensilio que sea más precioso, o poder cortarla tú mismo.

Transcripción 1. Respuestas de la necesidad de diseñar un cortador de pizza.

Figura 2. Uso de regla, transportador y cordón para medir radio, ángulo y longitud de arco, respectivamente.

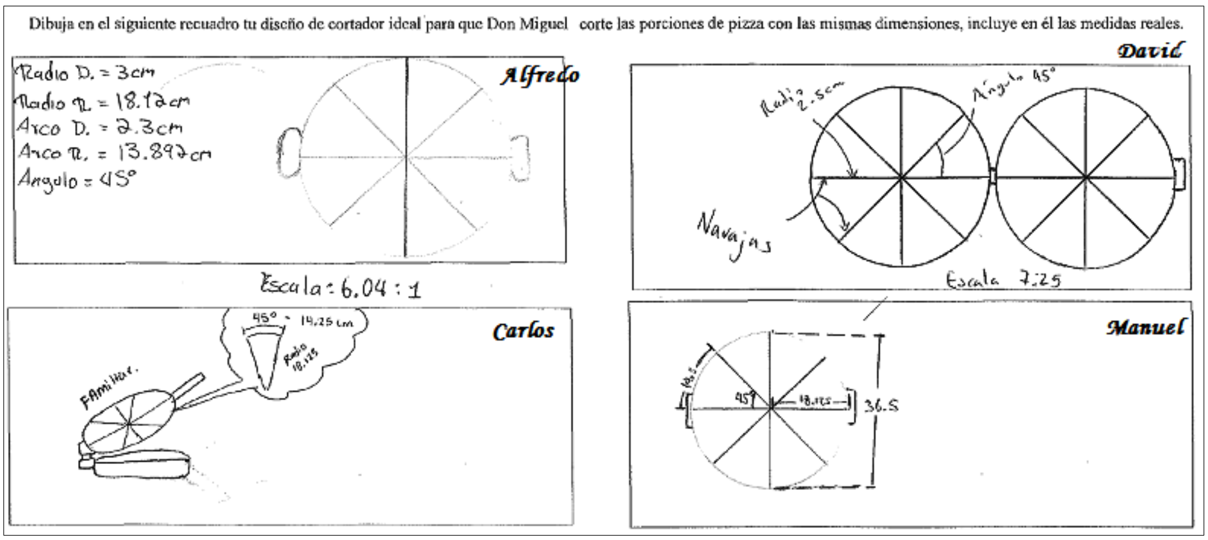

Figura 3. Dibujos del diseño ideal de cortador de pizza.

Como evidencia de las actividades restantes, se describe una reseña de cada una:

En la Actividad 2. La medición del ángulo, se lograron *prácticas de experimentación, medición y comparación*, relacionando la medición de ángulos (en grados y radianes), a través de sus elementos (ángulo, radio, diámetro, perímetro, π, radián), y las relaciones entre ellos; además, se efectuaron cálculos matemáticos para sus equivalencias. Esto provocó que los estudiantes experimentaran la medición del radián a través de la manipulación de materiales de medición y reconocieran el concepto de π y sus equivalencias.

En la actividad 3. La longitud de arco, se realizaron *prácticas de medición*, relacionando los elementos de la circunferencia y generando una representación física de lo solicitado. Realizando despejes se logra un modelo matemático para sintetizar los elementos (radio y ángulo) que intervinieron en su medición. Lo cual provocó que los estudiantes reconocieran que no es sencillo mediar la longitud de arco en ocasiones, y necesitan una fórmula para calcularla y obtener la respuesta precisa.

En la actividad 4. La ciclopista, se efectuaron *prácticas de manipulación* de la situación para inferir en soluciones al problema y de *geometrización inicial*, a través del uso de las configuraciones del triángulo en el círculo: cuando el ángulo es de 0°, 90°, <90°, 180°, 270° y

360°, aún con la dificulta de clasificación de triángulos, y también *prácticas de anticipación*, al generar aproximaciones y comparaciones de la cuerda y el arco cuando varía el ángulo central.

En la actividad 5. Matematizando el problema de los ciclistas, se generaron las *prácticas de medición, comparación, geometrización, aproximación y anticipación*, al matematizar la situación problema de la ciclopista bajo el contexto proporcional del triángulo en el círculo, haciendo uso de las razones trigonométricas.

Se da la vinculación de la actividad con los contenidos matemáticos que se aplican en otras asignaturas, evidencia de ellos es lo que algunos estudiantes mencionaron verbalmente:

- eso se parece a las fórmulas del seno, coseno y tangente, que usamos en Mecánica General, Dibujo, Física, Cálculo, para determinar distancias-;
- entonces el seno, coseno y tangente no son fórmulas nada más-; -las razones trigonométricas siempre se repiten cuando el ángulo es el mismo, aunque las medidas sean más grandes o chicas-;
- la hipotenusa del triángulo rectángulo es lo mismo que el radio del círculo-.

RESULTADOS Y CONCLUSIONES

Con la realización de cada actividad didáctica, los estudiantes evolucionaron en lenguaje y uso de herramientas, utilizaron su conocimiento previo y éste fue resignificado, en tanto fue dotado de nuevas experiencias en contextos extramatemáticos, al estudiarse con materiales didácticos manipulables tanto físicos como virtuales (*applet* de GeoGebra), al reconocer conceptos matemáticos y reflexionar sobre su origen y uso.

De manera particular los estudiantes estaban resignificando cuando no identificaban a la herramienta matemática para responder a una pregunta y no aplicaban el conocimiento en juego, sino que continuaban con la actividad que le da un nuevo contexto de significación.

Concretamente se identificó la resignificación de lo trigonométrico cuando:

- en diferentes momentos los estudiantes evocaron lo trigonométrico -se resuelve con el triángulo rectángulo, con el seno, coseno o tangente, con el ángulo y la cuerda-, pero no plantearon una resolución matemática;
- se continuó el trabajo de triángulos en el círculo, para que a través de aproximaciones se identificara empíricamente que sin importar las medidas del triángulo y el círculo, las razones trigonométricas siempre guardan una relación proporcional (al referirse al mismo ángulo) y que es el ángulo central lo que determina la distancia entre dos puntos de referencia (cuerda), así como que el valor de las cuerdas para ciertos ángulos es el mismo.

Los estudiantes pudieron *generar su significado de ángulo* al abordar la situación problema de la pizza (Actividad 1) de forma individual y colaborativa, que generó un ambiente de interés, se comprendió fácilmente y permitió crear ideas para la solución del problema con el uso de nociones matemáticas y el apoyo de materiales didácticos (ver Figura 4).

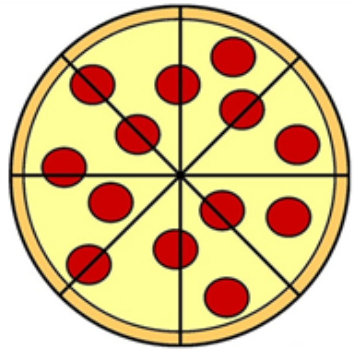

Figura 1. Pizza familiar dividida en 8 porciones iguales; *escala* = 2.5 : 1.

Figura 4. Conocimiento en uso del concepto de ángulo "es la abertura", en el problema de la pizza.

Con la figura anterior, los estudiantes pusieron de manifiesto su conocimiento de ángulo en una situación real, y mencionaron la palabra *abertura*, como el ángulo de un pedazo de pizza. De lo anterior se confirma el aprovechamiento que Moore (2014) propone: acción colaborativa y situación problema para dar un sentido más profundo a los objetos matemáticos. Además el uso adecuado de la proporción (escala) contrarrestó el efecto "considerar modelos geométricos a las ilustraciones y/o dibujos sin escala de triángulos rectángulos, pese a que no guardan una relación proporcional con la realidad modelada" del fenómeno didáctico de *aritmetización trigonométrica*, que mencionan Montiel y Jácome (en prensa), al hacer que los estudiantes reconocieran que los dibujos no guardan proporción con un objeto real.

En la Actividad 2, los estudiantes *reconocieron que usar la medida angular* en grados o en radianes depende de la necesidad del contexto y *encontraron la relación* que tienen radio, diámetro, π y radián, *pudiendo transitar* entre sus equivalencias.

La Actividad 3 permitió *experimentar la medición* de arcos como medida angular y permitió determinar una forma algebraica para calcular la longitud de arco, sin embargo fue la actividad que mayor dificultad generó, ya que todos los estudiantes mencionaron que si conocían la longitud de arco, porque era la misma que el radio, pero no sabían cómo calcularla (lograrlo supone, desde nuestra fundamentación teórica, un proceso de resignificación).

La mayor dificultad de esta actividad, fue relacionar los elementos de la longitud de arco con un modelo matemático y hacer despejes, pese a ello los alumnos mencionaron –representa más sentido comprobar la forma de obtener la fórmula a partir de una necesidad, que solo memorizarla.

Con estas dos últimas actividades, se da evidencia de la utilidad de caracterizar el significado de ángulo en términos de objetos geométricos, concebir al radio y a la unidad de medida del radián como medida angular y tener una concepción más profunda de $\boldsymbol{\pi}$, que menciona Moore (2014).

La situación problema de la ciclopista circular (Actividad 4) permitió a los estudiantes estudiar al triángulo en el círculo: al *reconocer la relación entre sus elementos* (ángulo central, radio y cuerda), *experimentar las configuraciones generales de los triángulos*, siendo esta última la que mayor dificultad causó debido a que no recordaban la clasificación de triángulos. Aun así, los estudiantes abordaron la actividad y generararon las configuraciones necesarias para *descartar los casos donde no se forma un triángulo* (0°, 180°, 360°), es decir, hay conocimientos puestos en uso. De igual manera esta actividad dio la oportunidad de *analizar la proporcionalidad* a través de la construcción geométrica de la ciclopista Hovenring, cuando se manipularon las configuraciones mencionadas y se reconoció al ángulo central como el elemento que determina el comportamiento de los valores de la cuerda y el arco.

La Actividad 5 generó el escenario para que los estudiantes pudieran matematizar lo trigonométrico, al modelar la situación problema de la ciclopista, lo cual permitió que profundizaran en la relación que tienen el triángulo y el círculo y cuando existe proporcionalidad entre sus elementos (cuerda-radio y radio-cuerda (recíproca)). Así también, dio el contexto para construir la bisectriz y experimentar que en éste momento donde se dan las condiciones para que emerjan las razones que siempre guardan proporción, las razones trigonométricas, al establecerlas a un mismo ángulo.

De estas dos últimas actividades se da respuesta a la pregunta que Montiel (2010) realiza, comprobando que es factible desarrollar las razones trigonométricas en el círculo, con el aprovechamiento didáctico de las cuerdas. También de las afirmaciones de Wentworth (1883), citado en Montiel (2010) “la cantidad trigonométrica surge de desentrañar la naturaleza de la relación ángulo-cuerda” y de Montiel (2013) “la significación progresiva de las razones trigonométricas se da en el contexto del círculo, principalmente porque devuelve a lo trigonométrico su naturaleza geométrica”.

REFERENCIAS

Cobb, P. (2000). The importance of a Situated View of Learning to the Design of Research and Instruction. In J. Boaler (Ed.). *Multiple perspectives on mathematics teaching and learning* (p. 45-82). Westport, CT: Ablex Publishing.

Molina, N. (2013). Discusiones acerca de la resignificación y conceptos asociados. *Patrimonio: Economía Cultural y Educación para la Paz (MEC-EDUPAZ)* (3), 39-63.

Montiel, G. (2010). Problematizando la trigonometría escolar en un curso de posgrado en línea en matemática educativa. En G. Buendía (ed.) *A diez años del Posgrado en Línea en Matemática Educativa en el IPN,* 141-174. México: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C.

Montiel, G. (2011). *Construcción de conocimiento trigonométrico. Un estudio Socioepistemológico*. México: Ediciones Díaz de Santos.

Montiel, G. y Buendía, G. (2012). Un esquema metodológico para la investigación socioepistemológica: Ejemplos e ilustraciones. En A. Rosas y A. Romo (Eds.). *Metodología en Matemática Educativa: Visiones y reflexiones* (pp. 55-82). México: Lectorum.

Montiel, G. (2013). *Desarrollo del pensamiento trigonométrico*. Distrito Federal, México: Secretaría de Educación Pública.

Montiel, G. y Jácome, G. (en prensa). Significado trigonométrico en el profesor. Aceptado para su publicación en *Boletim de Educação Matemática (Bolema).*

Moore, K. C. (2014). Quantitative Reasoning and the Sine Function: The Case of Zac. *Journal for Research in Mathematics Education 45*(1)*,* 102-138.

Scholz, A. y Montiel, G. (2013). Bases de un diseño didáctico para la construcción de las razones trigonométricas en el contexto geométrico del círculo. En L. Sosa, J. Hernández y E. Landa (Eds.), *Memoria de la XVI Escuela de Invierno en Matemática Educativa,* 347-354. México: Red de Centros de Investigación en Matemática Educativa A. C.

Vohns, A. (2006). Reconstructing basic ideas in geometry–an empirical approach. *ZDM 2006 Vol. 38 (6), 498-504.*