

# **ARTICULADORES PARA LOS MODOS DE COMPRENDER EL CONCEPTO DE DERIVADA**

Pinto-Rojas, I<sup>a</sup>., Parraguez-González, M<sup>b</sup>.

Universidad Católica del Norte, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso; correos electrónicos: ipinto@ucn.cl, marcela.parraguez@pucv.cl

## **Resumen**

*Este reporte describe los elementos matemáticos articuladores en los modos de pensar el concepto de derivada de una función real de variable real. Estos modos se han sustentado en el pensamiento práctico y teórico de Sierpinska, y se han validado con un análisis histórico-epistemológico, cognitivo y didáctico con base en la epistemología de Cauchy, los modos que se proponen para comprender este concepto son: modo Geométrico-Gráfico-Convergente (GGC), Analítico-Operacional (AO) y Analítico-Estructural (AE), (Pinto y Parraguez 2015). Para alcanzar este objetivo se diseñan secuencias didácticas que son aplicadas a informantes de primeros años de nivel universitario.*

**Palabras clave:** Elementos articuladores, Modos de Pensamiento, comprensión, derivada.

## **INTRODUCCIÓN**

Esta investigación tiene una perspectiva cognitiva cuya motivación inicial fue describir cómo el objeto matemático “derivada”, es comprendido por estudiantes de nivel universitario (19 años y más). Con este propósito se consideró un estudio desde un marco teórico cognitivo de la didáctica de la matemática, Los Modos de Pensamiento, propuesto por Sierpinska, (2000), marco que fue variado para el objetivo de este estudio. Desde esta perspectiva teórica se define la comprensión profunda de la derivada como la capacidad que los estudiantes tienen para transitar desde un pensamiento práctico a un pensamiento teórico del concepto al resolver problemas del cálculo diferencial. A partir del análisis de las respuestas de los estudiantes que conforman el estudio, se plantea como proyección de investigación indagar respecto a los elementos matemáticos que propician este tránsito, que para este estudio serán llamados los elementos articuladores.

## **Problemática, antecedentes y objetivo**

El concepto de derivada es un concepto relevante para los investigadores en didáctica de la matemática, existiendo distintas y variadas perspectivas teóricas para observar su comprensión, en Sanchez-Matamoros, García y Linares (2008), se presenta una revisión organizada de las aportaciones de investigadores en torno al concepto de derivada, esta revisión fue estructurada en consideración a lo que se conoce sobre la comprensión de la derivada de una función en un punto, el rol de los sistemas de representación, las características del desarrollo de esquema de la derivada, sin embargo aún existen aspectos que no han sido observados, como por ejemplo validar los elementos de la matemática o de otras disciplinas que permiten la conexión desde un pensamiento práctico a un pensamiento teórico para la comprensión de la derivada.

El objetivo inicial de este estudio fue observar y describir cómo estudiantes de nivel universitario comprenden la derivada y desde el marco teórico- Los Modos de Pensamiento- de Sierpinska

(2000), sin embargo se tuvo que realizar una variación dada las características de la representación visual inmediata y lo analítico de la derivada.

La variación del marco teórico plantea la coexistencia de tres modos de pensar la derivada (Pinto y Parraguez, 2015), el modo Geométrico-Gráfico-Convergente (GGC), el modo Analítico-Operacional (AO) y el modo Analítico-Estructural (AE), modos que al interactuar permiten una comprensión profunda de la derivada.

El estudio se extiende a la búsqueda de estos elementos de conexión entre las formas de comprender la derivada, dentro de la matemática misma o en conexión con elementos de la física, el objetivo será describirlos elementos invariantes de esta estructura, para tal propósito se ha planteado la pregunta que guiará esta investigación. ¿Cuáles son los elementos articuladores entre los modos GGC, AO y AE que permiten la comprensión profunda, del concepto de derivada?

### Marco teórico

En Sierpinska (2000) se caracterizan dos tipos de pensamiento, un pensamiento práctico, definido como una acción inmediata entre el sujeto y el objeto, alusivo a hechos observables y un pensamiento teórico, referido a la comprensión como la reflexión de los resultados de una acción, que considera la producción de sistemas conceptuales internos coherentes, sustentados en un sistema lógico de signos, por tanto reflexivo, sistémico y analítico. Los Modos de pensamiento es una teoría de la didáctica de la matemática que emerge desde el Algebra Lineal. Las autoras presentan una variación de este marco al cálculo diferencial. Se plantea entonces la coexistencia de tres modos de pensamiento, presentados en Pinto y Parraguez (2015), de la siguiente forma:

### Modo geométrico-gráfico-convergente del concepto de derivada (GGC).

Desde un estudio histórico-epistemológico del concepto de derivada (Grabiner, 1983), se define la recta tangente en un punto del gráfico de una función real de variable real, el elemento matemático fundamental para conseguir la imagen directa observable del concepto de derivada, sin embargo la noción de tangencia no forma parte del pensamiento práctico propuesto por Sierpinska (2000), se hace necesario una extensión del modo SG, que será llamado en adelante el modo Geométrico-Gráfico-Convergente (GGC) en relación a la comprensión del concepto derivada.

Es posible determinar una recta secante desde  $P_a$  cualquier otro punto de ésta, a medida que el punto se desplaza a lo largo de su gráfica, (Figura 1), se llegará a una posición límite que será representada por la recta tangente, el tránsito de la recta secante llegando a esta posición límite, que es cuando está próximo a  $P$  será representada por la pendiente de la recta tangente, se llamará derivada de la función en  $P$ .

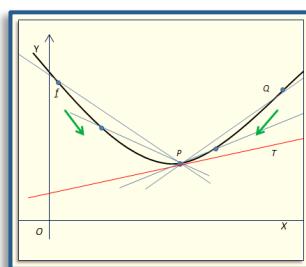


Figura 1. Representación del Modo Geométrico- Gráfico- Convergente del concepto de Derivada

## Modo analítico operacional del concepto de derivada (AO).

Para definir el concepto de derivada en su forma (AO) se propició, considerar la definición formal de límite para funciones reales de variable real, por tal razón el modo AA definido por Sierpinska pierde su carácter aritmético, emergiendo lo operacional del concepto, por lo que se reformula como el modo AO, para el caso específico de la derivada, noción que tiene sustento en la epistemología de Cauchy.

Se define la derivada de  $f$  como el límite del valor del cociente diferencial, cuando este límite existe y se denota como:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

## Modo analítico estructural del concepto de derivada (AE):

Para definir el concepto de derivada en su forma (AE), es necesario mirar desde el modo AO, como se ha desarrollado el concepto de derivada de una función real de una sola variable, y desde esa perspectiva seguir los elementos estructurales que permiten la generalización de este concepto como el elemento matemático que articula el modo AO y AE y que a su vez, permite definir el operador derivada desde la comprensión  $f'(x)$ , es este concepto matemático que permite junto con sus propiedades la representación de derivada en el modo AE, los teoremas y el operador inverso (integración). Una función es diferenciable cuando el operador está bien definido. La estructura que se debe estudiar en este contexto será: El espacio vectorial de las funciones diferenciables y el operador derivada como transformación lineal.

El marco teórico considerado en este trabajo quedará sustentado como se muestra en Figura 2.

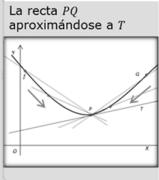
GGC	AO	AE
<p>La recta <math>PQ</math> aproximándose a <math>T</math></p>  <p>Existe el límite.</p> <p>El límite como mejor aproximación.</p>	<p><math>f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}</math></p> <p>La derivada de <math>f</math> en el punto <math>(x_0, f(x_0))</math></p> <p>Existe el límite.</p> <p>El límite como mejor aproximación.</p>	<p>E.V. de las funciones diferenciables</p> <p>Operador derivada</p> <p>Operador derivada como T.L.</p>

Figura 2. El Modo Geométrico-Gráfico-Convergente (GGC), el Modo Analítico-Operacional y el Modo Analítico- Estructura (AE) del concepto de derivada.

## METODOLOGÍA

Se propone una metodología desarrollada en dos etapas, primero, determinar los elementos matemáticos de conexión entre las formas de comprender la derivada, desde un análisis epistemológico y didáctico del concepto, junto con la observación de los datos proporcionados por los informantes y segundo, validar estos articuladores con la aplicación de nuevos instrumentos y entrevistas en profundidad, para concluir con la realización de una secuencia de enseñanza y actividades de aprendizaje del concepto, que serán relevantes para la comprensión de la derivada.

En este sentido la primera etapa en desarrollo, considera las producciones de los estudiantes en la etapa de validación de los tres modos definidos, con la aplicación de una metodología cualitativa de naturaleza descriptiva y hermenéutica (Stake, 2010) para lo que se consideró un estudio de casos

múltiples con dos grupos de informantes, el primer grupo denominado CASO1 está formado por diez estudiantes que están cursando la asignatura de Cálculo Diferencial, seis de pedagogía en educación media y cuatro estudiantes de licenciatura en matemáticas, rotulados E1-E10, el CASO2 formado por tres estudiantes de licenciatura en matemáticas que han cursado recientemente el curso de ecuaciones diferenciales, rotulados E1,E2,E3.

Se ha diseñado y aplicado un cuestionario de 12 preguntas, al CASO1, al que se le agregaron 3 preguntas para ser aplicado posteriormente al CASO2. Se realiza un análisis a priori por pregunta cuyas respuestas fueron contrastadas con los resultados de la aplicación, en la perspectiva de que el estudiante que logra transitar entre estos tres modos, obtiene una comprensión profunda del concepto. El interés de obtener variada información y datos significativos permitieron dar cuenta de algunos elementos articuladores para la comprensión de la derivada.

Se muestran algunas producciones de estudiantes del CASO1, a los que se aplicó el instrumento.

**Pregunta 3:** Sea la función  $f(x) = x^2$ , en el punto  $(1,1)$ , la tabla muestra los valores resultantes del cociente  $\frac{f(1)-f(x)}{1-x}$  que son las pendientes de las rectas secantes cuando  $x$  se aproxima a  $x = 1$ .

Se solicita que comente y explique la información que tiene en la tabla, justificando sus observaciones.

$x$	0.59	0.9	0.99	0.999	1.001	1.01	1.1
$\frac{f(1)-f(x)}{1-x}$	1.59	1.9	1.99	1.999	2.001	2.01	2.1

Desde una perspectiva teórica, el estudiante estaría mostrando elementos que le permiten transitar desde el modo GGC al modo AO,

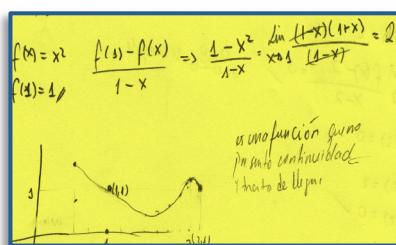


Figura 4. Respuesta de E7, muestra transitar débilmente.

Esta pregunta, intencionada a situar al estudiante en el modo GGC, pretende que muestre rectas secantes aproximándose a la tangente en términos geométricos e identifique a la recta tangente como su mejor aproximación, es posible que calcule la pendiente de la recta tangente usando la derivada de  $f(x)$  y compare con los datos entregados en la tabla, esto es que relacione 1.9999 con  $f'(1) = 2$ , lo que estaría mostrando el tránsito desde el modo GGC al modo AO, con el concepto de límite como articulador.

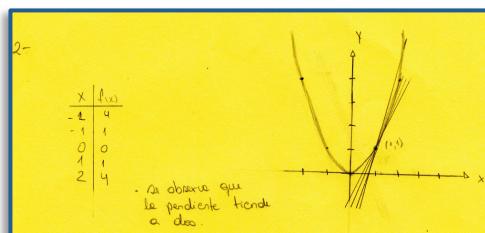


Figura 5. Informante E2, Situado en el modo GGC.

## RESULTADOS

Desde los datos obtenidos se propone el concepto de límite en un punto como posible articulador desde el modo GGC al AO, y los límites laterales desde el AO al GGC, se propone también el concepto de derivada como un articulador bidireccional entre estos modos.

Se propone el gráfico de la transformación lineal como un posible articulador entre los modos AE y GGC.

Desde un análisis epistemológico surge como posible articulador entre el modo GGC y AE, un problema propuesto por Leibniz, “El problema inverso de la recta tangente”.

Las dificultades que se visualizan en las reproducciones de los estudiantes dan cuenta de la relevancia que tienen los elementos articuladores para la comprensión de la derivada

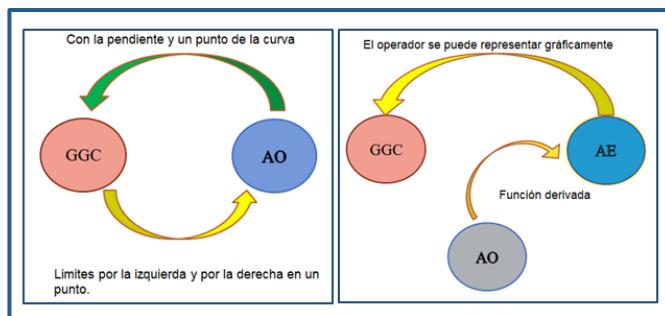


Figura 7. Muestra un diagrama de los articuladores para los modos propuestos en la primera etapa.

## Referencias

- Grabiner, J., (1983). *The changing concept of change: The derivative from Fermat to weierstrass.* Mathematics Magazine 56(4), 195-206.
- Pinto, I. y Parraguez, M. (2015). *El concepto de derivada desde la teoría de los modos de pensamiento, sustentada en la epistemología de Cauchy.* Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 28, 337-344.
- Sanchez- Matamoros, G., García, M. y Llinares, S. (2008). *La comprensión de la derivada como objeto de investigación en Didáctica de la derivada.* Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 11(2), 267-296.
- Sierpinska, A. (2000). *On some Aspects of Student's thinking in Linear Algebra.* En *The Teaching of Linear Algebra in Question* (pp. 209-246). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Stake, R. (2010). *Investigación con estudio de casos.* Madrid: Morata.