

LA ALGEBRIZACIÓN PROGRESIVA Y EL TRABAJO CON SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES EN EL CONTEXTO DE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA REALISTA

Johnny Alfredo Vanegas Díaz

yovanegasdiaz@gmail.com

Universidad del Valle, Colombia; Universidad Autónoma de Guerrero, México

Avances de investigación

Pensamiento matemático y algebraico

Básico

RESUMEN

La presente propuesta se enmarca dentro de un avance de investigación en curso y tiene como propósito fundamental enriquecer el horizonte de discusiones teóricas entorno a las caracterizaciones que definen, determinan y establecen diferencias entre la actividad algebraica y la aritmética. Inicialmente, se plantean las limitaciones que impone la introducción del álgebra escolar desde la denominada “aritmética generalizada” y como consecuencia, se estudian otras perspectivas centradas en las potencialidades del álgebra como modelo de la actividad matemática. En particular, se destaca el proceso de modelación matemática y la posición epistemológica del álgebra, tal como se entiende en el enfoque de la Educación Matemática Realista, el cual puede representar un escenario propicio para estudiar *niveles de algebrización* que se configuran en los estudiantes durante la modelación matemática de situaciones problemáticas.

PALABRAS CLAVES: Educación Matemática Realista, modelación matemática, niveles de algebrización, sistemas de ecuaciones lineales.

INTRODUCCIÓN

Diferentes estudios en didáctica de las matemáticas, siguen mostrando una preocupación creciente por el campo de comprensión de los fenómenos de enseñanza, aprendizaje, y comunicación de los conceptos y procedimientos algebraicos (Socas, 2011). En el marco de tales estudios, algunos investigadores (Bednarz, Kieran & Lee, 1996; Godino & Font, 2003; Valoyes & Malagón, 2006; Socas, 2011) han centrado sus esfuerzos en el desarrollo y producción de aportes que respondan a una problemática recurrente en la enseñanza del álgebra en el ámbito escolar: la consideración exclusiva del álgebra como una mera extensión de la aritmética.

La problemática que dicha concepción plantea puede explicarse a través de algunas implicaciones negativas que trae consigo para el aprendizaje del álgebra. En primer lugar, no permite un trabajo que vaya más allá de las generalizaciones y la resolución de ecuaciones. En segunda instancia, limita las potencialidades del álgebra como modelo de la actividad matemática y finalmente, no promueve la conexión del álgebra con otras áreas de conocimiento ni su potencial como instrumento para modelar situaciones del mundo real. (Godino & Font, 2003).

CONTEXTUALIZACIÓN Y JUSTIFICACIÓN DEL PROBLEMA

La indagación alrededor de las problemáticas que atañen a la concepción tradicionalista y limitada del álgebra escolar (denominada “aritmética generalizada”) permitió entrever al margen de algunas consideraciones teóricas, dos consignas importantes para concretar la formulación del problema objeto de investigación. La primera, asociada con el hecho de que no hay un reconocimiento importante, por parte de la comunidad de investigadores, acerca de la naturaleza del álgebra y de los procesos de pensamiento matemático implicados en la construcción de conceptos algebraicos durante el trabajo de los estudiantes. La segunda, que la modelación matemática es asumida por muchos investigadores como una perspectiva de base para cambiar sustancialmente la visión del álgebra enmarcada en una mera extensión de la aritmética.

El énfasis en la modelación matemática como respuesta a dicha problemática se sustenta por un lado, en que la modelación sitúa el álgebra como una herramienta para resolver problemas contextualizados y en consecuencia, contribuye no sólo al estudio de problemas de distinta naturaleza, promoviendo la producción de diversos modelos por parte de los estudiantes, sino que además, ayuda a los estudiantes a conectar los conceptos matemáticos con otras áreas del conocimiento (Valoyes & Malagón, 2006)

De otra parte, y tal como se presenta en los Estándares Básicos de Competencias del Ministerio de Educación Nacional (MEN, 2006), la modelación matemática permite que los estudiantes construyan, en diferentes niveles de complejidad, sus propios modelos matemáticos y que los usen para hacer predicciones, obtener resultados y evaluar que tan razonables son esos modelos respecto a las condiciones iniciales.

Pues bien, en la organización de la enseñanza del álgebra, las ideas expuestas en relación con la modelación matemática, se vinculan directamente con la visión de la Educación Matemática Realista (EMR). De hecho, las propuestas curriculares que adoptan este enfoque, consideran que el álgebra –en su estructura y símbolos– es una herramienta (y no un objetivo en sí mismo) propicia para modelar situaciones problemáticas realistas vinculadas con contextos cercanos a la cotidianidad de los estudiantes (Reeuwijk, 1997). Por lo tanto, en la EMR no sólo se destaca el uso de situaciones de modelación en el salón de clases para favorecer la actividad algebraica; además, se entiende que a partir de dicha actividad, los estudiantes logran establecer conexiones e interrelaciones entre los conceptos, el trabajo exploratorio, la búsqueda de patrones, la formulación de conjeturas y la producción de modelos (Panhuizen, 2003).

En consonancia con lo anterior, la presente investigación asume que la posición epistemológica del álgebra, tal como se entiende en el contexto de la EMR, representa un contexto propicio para estudiar procesos de pensamiento matemático, en particular, niveles de algebrización que se configuran en los estudiantes durante la modelación matemática de situaciones problemáticas. En efecto, a partir del reconocimiento y caracterización de niveles de algebrización que subyacen durante la producción de modelos, es posible aportar teóricamente al proceso de comprensión global de los conceptos algebraicos que están siendo construidos por los estudiantes y adicionalmente, se presentaría una vía inicial en términos de las situaciones que pueden usarse como insumo en la enseñanza y aprendizaje del álgebra en la escuela.

En este sentido, lo que se pretende concretar en esta investigación es la eventual caracterización de *niveles de algebrización* que se configuran en estudiantes de Educación Básica Secundaria, cuando trabajan con situaciones de modelación enraizadas en el enfoque de la EMR. En particular, responder a la siguiente pregunta:

¿Qué tipos de *niveles de algebrización* se configuran en estudiantes de Educación Básica Secundaria, cuando construyen *modelos* matemáticos de *situaciones problemáticas realistas* vinculadas a los sistemas de ecuaciones lineales?

El interés en los sistemas de ecuaciones lineales se fundamenta en que dicho contenido matemático permite visualizar aspectos generalizadores y dinámicos de las variables, a través del trabajo con la construcción de expresiones equivalentes, la sustitución de números en las variables y la solución de (sistemas de) ecuaciones lineales con dos o más variables desconocidas.

De esta manera, se espera poner de relieve la forma en que el trabajo con situaciones de la EMR posibilita una vía de análisis para caracterizar los procesos de pensamiento algebraico (niveles de algebrización) implicados en la producción de modelos por parte de los estudiantes, a la vez que se ilustra un tratamiento que podría resultar innovador para el desarrollo curricular y la enseñanza de los sistemas de ecuaciones lineales.

MARCO DE REFERENCIA CONCEPTUAL

Principios de la Educación Matemática Realista

Esta investigación toma como referencia las principales aportaciones teóricas de la *Educación Matemática Realista* (EMR). La EMR es una teoría en construcción sujeta a un constante proceso de renovación acerca del qué y el cómo de la Educación Matemática. Dicha teoría se concretiza en un conjunto de teorías locales de enseñanza de tópicos de la matemática, las cuales descansan sobre unos principios básicos. Algunos de estos principios tienen relación con la idea de que “saber matemáticas” es “hacer matemáticas”, lo cual comporta, entre otros aspectos, usar la realidad como punto de partida para la *matematización progresiva* y dar la oportunidad de que los estudiantes *reinventen* los conceptos matemáticos.

Para los intereses de esta investigación, únicamente se centrará la atención en la idea de *modelación matemática* y la definición de los *niveles de comprensión* de la actividad matemática, tal como se entienden en este marco teórico, puesto que eventualmente es posible articular estas concepciones con otras concepciones teóricas para construir indicadores de la actividad propiamente algebraica.

La modelación matemática como matematización

Desde la perspectiva de la EMR no se habla directamente de modelación matemática, sino de matematización en correspondencia con las ideas de Freudenthal, quién acuñó el término para referirse al proceso que describe el paso desde el conocimiento informal, relacionado con los contextos, y las matemáticas formales.

Literalmente para Freudenthal (1973) “*Matematizar es organizar la realidad con medios matemáticos... incluida la matemática misma.*” (p. 44)

La EMR interpreta la matematización como el proceso mediante el cual los estudiantes organizan su actividad matemática. Esto lo consiguen con la producción de modelos, ya que los estudiantes gradualmente van adquiriendo una comprensión particular de la situación-problema, descubren regularidades, encuentran patrones y posteriormente aparecen medios cada vez más avanzados, hasta finalizar con la construcción de un modelo eficaz, a través del cual pueden conectar varias situaciones con características similares.

En particular, la matematización se entiende como el proceso de trabajar la realidad mediante conocimientos informales (relacionados con el contexto) y herramientas matemáticas (objetos matemáticos, algoritmos, operaciones, modelos, etc.) concretando este trabajo en dos direcciones; la *matematización horizontal* y la *matematización vertical*. Direcciones que según Freudenthal (1991) son claramente diferenciables, pese a que la manera en que se relacionan ambos procesos no está claramente definida.

Los diferentes niveles de comprensión

La EMR admite que los *modelos descriptivos* producidos en el componente horizontal, gradualmente van evolucionando en *modelos prospectivos*, los cuales constituyen el ingrediente central que lleva de la matematización horizontal a la matematización vertical al impulsar y elevar los *niveles de comprensión*. Dichos niveles (situacional, referencial, general y formal) representan el pasaje del conocimiento informal al conocimiento formal y se caracterizan por distintos tipos de actividades cognitivas y lingüísticas, asociadas al uso de diferentes estrategias y modelos, pese a que no constituyen una jerarquía estrictamente ordenada. (Bressan & Gallego, 2011).

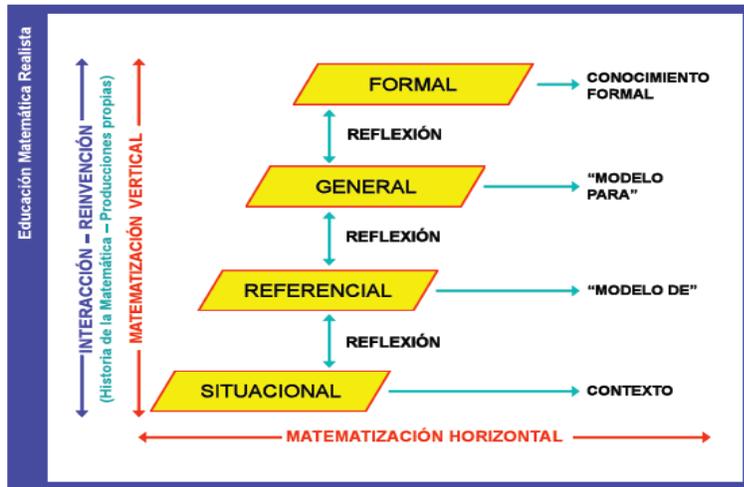
El nivel situacional está asociado al uso de estrategias ligadas totalmente al contexto de la situación misma. Lo cual implica que los estudiantes introducen sus conocimientos informales, su sentido común, su experiencia y estrategias situacionales para identificar y descubrir la matemática existente en el contexto.

El nivel referencial es donde aparecen las representaciones o modelos gráficos, materiales o notacionales, y las descripciones, conceptos y procedimientos personales que esquematizan el problema. De allí que los modelos se consideren como *modelos de* en tanto están referidos a las situaciones particulares que les dieron origen.

El nivel general se desarrolla a través de la exploración, reflexión y generalización de lo aparecido en el nivel anterior, pero propiciando una focalización matemática sobre las estrategias que supera la referencia al contexto. En este nivel, por la reflexión sobre los conceptos, procedimientos, estrategias y modelos utilizados en el nivel anterior surgen aspectos generalizables de los mismos y los estudiantes pueden concluir que son utilizables en conjuntos de problemas, dando lugar a los *modelos para* la resolución de los mismos.

El nivel formal está relacionado con la comprensión, utilización de los conceptos, procedimientos y notaciones convencionales que hacen parte de la matemática vinculada al contexto que se venía trabajando.

Recientemente Bressan y Gallego (2011) han producido una síntesis de estos niveles de comprensión a través de la siguiente ilustración, en la cual es posible inferir algunas relaciones importantes.



Enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática

Desde este enfoque teórico se han adelantado diversos estudios relativos a la naturaleza del álgebra escolar y alternativas de introducción de los contenidos algebraicos desde los primeros años de escolaridad. En particular, algunos estudios plantean un modelo teórico consistente basado en determinados niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Para ello, se parte de la siguiente consideración: una práctica matemática es algebraica siempre y cuando presente cierto tipo de *objetos y procesos* considerados en la literatura como algebraicos (Godino, Aké & Gonzato, 2014)

Se propone la diferenciación de cuatro niveles de algebrización. El primer nivel se considera ausente de razonamiento algebraico, mientras que los siguientes dos se catalogan como primarios, porque están enmarcados entre el nivel 0 de algebrización (ausencia de razonamiento algebraico) y el último nivel en el que la actividad matemática es propiamente algebraica. La importancia de dicha diferenciación es que no sitúa la tarea matemática en uno u otro nivel, sino la actividad propia del estudiante, es decir, que el nivel de algebrización está dado por la manera que el estudiante asume para solucionar la situación problemática y no por la tarea misma.

A continuación se mencionan los cuatro niveles de algebrización sustentados en los siguientes criterios: *generalización, unitarización, formalización y ostensión; y transformación.*

Nivel cero de algebrización (ausencia de razonamiento algebraico)

Intervienen objetos extensivos (particulares) expresados mediante lenguajes natural, numérico, icónico o gestual. Pueden intervenir símbolos que refieren a un valor desconocido, pero dicho valor se obtiene como resultado de operaciones sobre objetos particulares. En tareas de generalización el mero reconocimiento de la regla recursiva que relaciona un término con el siguiente, en casos particulares, no es indicativa de generalización.

Nivel uno de algebrización (nivel incipiente)

Intervienen objetos intensivos cuya generalidad se reconoce de manera explícita mediante lenguajes natural, numérico, icónico o gestual. Pueden intervenir símbolos que refieren a los intensivos reconocidos, pero sin operar con dichos objetos. En tareas estructurales se aplican relaciones y propiedades de las operaciones y pueden intervenir datos desconocidos expresados

simbólicamente. En tareas funcionales se reconoce la generalidad aunque expresada en un lenguaje diferente al simbólico-literal.

Nivel dos de algebrización (nivel intermedio)

Intervienen indeterminadas o variables expresadas con lenguaje simbólico – literal para referir a los intensivos reconocidos, aunque ligados a la información del contexto espacial temporal. En tareas estructurales las ecuaciones son de la forma $Ax \pm B = C$. En tareas funcionales se reconoce la generalidad, pero no se opera con las variables para obtener formas canónicas de expresión.

Nivel tres de algebrización (nivel consolidado)

Se generan objetos intensivos representados de manera simbólica – literal y se opera con ellos; se realizan transformaciones en la forma simbólica de las expresiones conservando la equivalencia. Se realizan tratamientos con las incógnitas para resolver ecuaciones del tipo $Ax \pm B = Cx \pm D$, y la formulación simbólica y descontextualizada de reglas canónicas de expresión de funciones y patrones.

REFLEXIONES

El presente avance de investigación enriquece el panorama de discusiones teóricas alrededor de la naturaleza del álgebra y las alternativas prometedoras para trabajar el álgebra en el sistema escolar. El énfasis en los procesos de generalización enmarca el álgebra en la generalización de patrones, así como las leyes que gobiernan las relaciones numéricas, posibilitando que los estudiantes pasen de la consideración de un objeto a la consideración de un conjunto que contiene ese objeto (Amit & Neria, 2008). No obstante, la comprensión del álgebra como una aritmética generalizada reduce el trabajo matemático de los estudiantes a la construcción y expresión de generalizaciones matemáticas, dando lugar a muchas dificultades para los aprendices que empiezan a asumir las fórmulas algebraicas como una mera extensión del cálculo numérico al cálculo literal, y no como representaciones de modelos de relaciones entre objetos matemáticos (Valoyes & Malagón, 2006).

La idea central es entonces, ampliar la visión del álgebra escolar, puesto que recurrentemente se ve limitada solo a las generalizaciones aritméticas y al manejo de expresiones literales (Godino & Font, 2003). Más aún, poner de manifiesto que la modelación matemática resulta ser un proceso matemático de base, tanto para introducir el álgebra en el ámbito escolar, como para estudiar procesos de pensamiento matemático (niveles de algebrización) que se configuran en los estudiantes durante el trabajo con situaciones problemáticas.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Amit, M. & Neria, D. (2008). “Rising to the challenge”: using generalization in pattern problems to unearth the algebraic skills of talented pre-algebra students. *ZDM*, 40(1), 111-129.
- Bednarz, N., Kieran, C. & Lee, L. (1996). *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching* (pp. 3-12). Springer Netherlands.
- Bressan, A. & Gallego, M. (2011). La Educación Matemática Realista: Bases teóricas. III congreso nacional de matemática y problemáticas de la educación contemporánea. Santa María, Argentina.
- Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht. Reidel Publishing Co.

7. Pensamiento numérico y algebraico

- Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education: China Lectures*, Kluwer, Dordrecht.
- Godino, J. & Font, V. (2003). *Razonamiento algebraico y su didáctica para maestros*. Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.
- Godino, J., Aké, L. & Gonzato, M. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las ciencias* (32) 199-219
- Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares Básicos de Competencias*. Bogotá: Magisterio.
- Panhuizen, M. (2003). Didactical use of models in realistic mathematics education: an example from a longitudinal trajectory on percentage. *Educational Studies in Mathematics*, 54, 9–35
- Reeuwijk, M. (1997). En las matemáticas en el entorno. *Uno. Revista de didáctica de las matemáticas*, 12, 9-16.
- Socas, M. (2011). La enseñanza del Álgebra en la Educación Obligatoria: Aportaciones de la investigación. *Números*, (77), 5-34.
- Valoyes, L. & Malagón, M. (2006). *Formación de pensamiento algebraico en la educación escolar*. Instituto de Educación y Pedagogía. Universidad del Valle.