RESULTADOS DE APRENDIZAJE DE UN PROCESO DE INSTRUCCIÓN MATEMÁTICA PARA INGENIEROS

Gallardo,M[a]., Galindo, M[b]

Universidad de Las Américas;
mgallardo@udla.cl, mgalindo@udla.cl

Resumen

Se describe una propuesta didáctica de enseñanza contextualizada en el aula universitaria de Matemática. A través del enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática, se caracterizan las propiedades importantes de las integrales dobles y evaluamos, mediante la utilización de representaciones informales y algebraicas, los errores y dificultades que los estudiantes ponen de manifiesto en distintas actividades de las ciencias de la ingeniería.

En consecuencia, se analizan los resultados parciales de aprendizaje de apropiación del lenguaje, procedimientos y argumentos sobre las integralesdobles.

Palabras claves:*Integrales dobles, significado y comprensión, configuraciones didácticas.*

INTRODUCCIÓN

Una problemática generalizada en las aulas universitarias es determinar y secuenciar los elementos prioritarios que debe considerar el profesor para una buena enseñanza de conceptos y proposiciones matemáticas. Esto nos conduce a reflexionar en relacióna las clases de cálculo, si ellas con su metodología tradicional favorecen la comprensión de conceptos y si buenas presentaciones en el aula consideran más de una forma para acercarnos a los enunciados matemáticos. Al relacionar el conocimiento matemático de las integrales dobles y contenido didáctico, surgen las siguientes inquietudes: ¿Cómo caracterizar la eficacia de un proceso de instrucción de las integrales dobles?, ¿Qué dispositivos didácticos son los adecuados para la enseñanza de las integrales dobles a nivel universitario?, ¿Qué efecto tiene la informática como recurso de apoyo a la docencia? Los objetivos propuestos en este trabajo son: a) Evaluar el significado personal de los estudiantes al finalizar el proceso de estudio y compararlo con el significado institucional implementado. b) Evaluar la proporción de estudiantes en los que se evidencia una comprensión y capacidad de aplicación de ciertos elementos de significado incluidos en la enseñanza.

Fundamento

La integral de funciones de varias variables y su interés en ingeniería.

Los sistemas de acreditación están exigiendo a las facultades y escuelas cambios en el desarrollo curricular, debido a que las formas tradicionales de enseñanza no ayudan a adquirir competencias transversales y tampoco tienen en cuenta el perfil de egreso de un ingeniero, entendida como el conjunto de competencias (generales, especializadas y actitudinales) necesarias en la profesión. Es por ello que la enseñanza debe orientarse a la adquisición de competencias, y no simples conocimientos. Con esto el rol del profesor es esencial en determinar y secuenciar los elementos prioritarios que debe considerar el profesor para una buena enseñanza de conceptos y proposiciones matemáticas.La matemática es un área del conocimiento de fundamental importancia en toda situación del campo de la ingeniería, en particular el cálculo integral tiene muchas aplicaciones, como por ejemplo; en el análisis de circuitos, el cálculo de energía disipada a partir de una potencia, en el cálculo de área, cálculo de cantidad de movimiento, de conservación de energía, en el análisis de señales, en la economía, etc. A continuación mencionamos los resultados de aprendizaje que se deben alcanzar en el estudio de las Integrales dobles en la Universidad De Las Américas (UDLA) de Chile en un curso de Cálculo en Varias Variables (MAT400): a) Determinar el área encerrada entre curvas, aplicado a un problema contextualizado, usando integrales dobles. b) Aplicar cambio de coordenadas a la resolución de un problema contextualizado.

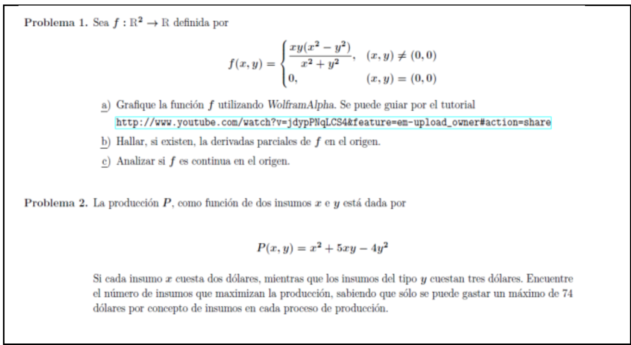
Marco teórico

La perspectiva didáctica que se empleará en este trabajo está basada en el modelo teórico denominado "enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática". Una versión revisada y ampliada del marco teórico se presenta en Godino y colaboradores (Godino, 2002; Contreras y Font, 2006;D'Amore, Font y Godino, 2007; Godino, Batanero y Font, 2007;Font y Contreras, 2008; Godino, Ramos y Font, 2008).El término "significado" se usa de una manera persistente en la investigación y en la práctica de la educación matemática, unido al de "comprensión". Al considerar una institución escolar, como la educación universitaria, el significado construido por un estudiante particular sobre las integrales dobles, en un momento del proceso de aprendizaje puede no corresponder exactamente al significado del objeto en la institución dada, por lo que conviene distinguir entre significado institucional y significado personal de un objeto matemático. *El significado institucional* de un objeto matemático es el compartido dentro de una institución, y *El significado personal* es el que el alumno tiene inicialmente o es adquirido a lo largo del proceso de estudio. El objeto matemático se presenta como un ente abstracto que emerge del sistema de prácticas significativas, ligadas a la resolución de cierto campo de problemas matemáticos. En cuanto al significado personal, intentaremos diferenciar entre el *evaluado* (parte del significado que se evalúa con los diferentes instrumentos de evaluación), *declarado* (deducido de las respuestas de los estudiantes a estos instrumentos y *logrado* (la parte del significado personal que está de acuerdo con el significado institucional implementado). Asimismo, se describirán las diferencias entre el significado institucional implementado y el significado personal de los estudiantes, es decir el conjunto de conflictos y dificultades manifestados por los mismos en el proceso de evaluación.Se abordan la relación entre la metodología de enseñanza empleada en el aula y el aprendizaje del conocimiento matemático de conceptos importantes, y la utilización de configuraciones didácticas para describir criterios de idoneidad de un proceso de estudio. Los supuestos bases son:a) Elementos de significado,la comprensión personal de un objeto es, en este modelo, la "apropiación" del significado institucional de dicho objeto. Se propone una tipología de objetos matemáticos primarios, que se denominan "elementos del significado" y corresponden a: Situaciones-problemas, lenguaje, procedimientos, conceptos,proposiciones y argumentos.b) *Configuraciones didácticas*,los elementos de significado están relacionados entre sí formando *configuraciones*, definidas como redes de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas. En la *configuración manipulativa* el estudiante trabaja con dispositivos manipulativos (dados, fichas,...), papel-lápiz o calculadora, sin utilizar notación o cálculo algebraico, en la *configuración algebraica* se caracteriza por el lenguaje simbólico y la demostración deductiva, los procedimientos serían analíticos y en la*configuración computacional* amplía notablemente el lenguaje, sobre todo el número y variedad de representaciones gráficas dinámicas. Además del lenguaje icónico, incorpora como procedimiento la simulación y el argumento preferible es inductivo. Este trabajo se interesa por describir si el proceso de instrucción ha sido eficaz, principalmente en los *criterios de la idoneidad cognitiva*, queexpresa el grado de proximidad de los significados implementados con respecto a los significados personales iniciales de los estudiantes, y *criterios de la idoneidad mediacional*que corresponde al grado de disponibilidad de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo de la actividad con que los profesores de cálculo desarrollan su práctica docente.

Metodología

La implementación de una secuencia de enseñanza de la integral doble se llevó a cabo el segundo semestre de 2014 y primer semestre de 2015, en el curso MAT400 a 33 estudiantes voluntarios de Ingeniería Civil Industrial; considerando, por ejemplo, el tiempo de ejecución, las condiciones de recursos tecnológico disponible en el aula y el número de estudiantesparticipantes, y se finalizó con la aplicación y evaluaciones periódicas. La asignatura es impartida por el Instituto de Matemática, Física y Estadística (IMFE) de la UDLA y tiene prerrequisito el curso de Cálculo II. Se ha tenido en cuenta la siguiente trayectoria didáctica del proceso de estudio considerando actividades que permitan el tratamiento matemático de la integral doble desde varios acercamientos: a) Delimitar los contenidos y secuencia de enseñanza de la integral de funciones de varias variables: El concepto de la integral de Riemann, integración con dominio rectangular y no rectangular, teorema de Fubini, teorema de cambio de variables. b) Considerar un acercamiento global a propiedades importantes, teorema de Fubini, teorema de cambio de variables, etc.; la aplicación en resolución de problemas específicos de ingeniería, basado en la tecnología: Geogebra, WolframAlpha, Pizarra Digital Interactiva (PDI) y la plataforma virtualmoodle. c) Establecer los objetivos de la evaluación, que son evaluar el significado personal de los estudiantes al finalizar el proceso de estudio y compararlo con el significado institucional implementado y evaluar la proporción de estudiantes en el grupo que muestran una comprensión y capacidad de aplicación de ciertos elementos de significado incluidos en la enseñanza, e identificar cuáles de estos elementos resultaron difíciles. Se establecieron las siguientes conexiones entre la *configuración epistémica computacional* y los elementos de significado de la integral de funciones en varias variables: *Problemas*: Obtención del valor de la integral dobles; investigar el dominio de integración, la necesidad de los cambios de variables y de los cambios de límites de integración. *Lenguaje*: verbal, simbólico y gráfico. *Procedimiento*: identificación del dominio de integración; decide la necesidad de un cambio de variables; define la integral doble; resolución de la integral doble, aplicación. *Conceptos*: Integral de Riemann, dominio de integración, primitivas, cambios de variables, integral doble. *Propiedades*: Teorema de Fubini, Teorema de cambios de variables. *Argumentos*: visuales; generalización y comprobación de ejemplos. A continuación, se presentan algunas actividades basadas en las configuraciones didácticas diferenciadas que fueron desarrolladas por los estudiantes de ingeniería, para el caso de integral doble. En este proceso de implementación se han incorporado actividades no habituales en las que se han incluido los programas software gratuitos Geogebra, WolframAlpha y PDI para el estudio de los dominios de integración, verificación de integrales y almacenamiento de las clases. Dicho proceso permite conectar, los dominios de integración con las integrales dobles a definir, comprendiendo de mejor manera el significado de algunos teoremas, respecto a lo que es habitual en los libros de texto de ingeniería.

Imagen1:



Problema 1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Grafique la función f utilizando *WolframAlpha*. Se puede guiar por el tutorial `http://www.youtube.com/watch?v=jdypPNqLCS4&feature=em-upload_owner#action=share`

b) Hallar, si existen, la derivadas parciales de f en el origen.

c) Analizar si f es continua en el origen.

Problema 2. La producción P, como función de dos insumos x e y está dada por

$$P(x,y) = x^2 + 5xy - 4y^2$$

Si cada insumo x cuesta dos dólares, mientras que los insumos del tipo y cuestan tres dólares. Encuentre el número de insumos que maximizan la producción, sabiendo que sólo se puede gastar un máximo de 74 dólares por concepto de insumos en cada proceso de producción.

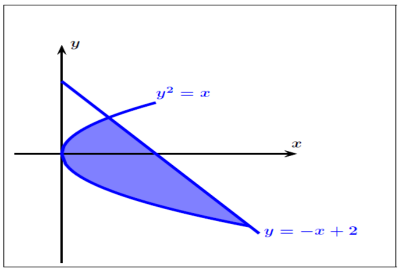
Imagen 2:

Resultados

Se entiende la evaluación como la correspondencia entre el significado institucional presentado en la enseñanza y el significado personal efectivamente construido por los estudiantes, identificando sus dificultades y errores. En la imagen 3 se presenta un problema, de configuración algebraica, se describen los elementos de significado usados correcta e incorrectamente a una muestra de 33estudiantes en la resolución y las conexiones que establecen entre los mismos.

Imagen 3.

Problema 1. [**16 Puntos**] A un Geólogo se le encarga determinar el área de una laguna que están al lado de un camino, la laguna poseen una forma particular la cual está encerrado por las curvas $x = y^2$ e $y = -x + 2$, medidas en decámetros (1decámetro = 10 metros). ¿Cuál es el área total de la lagunas, en metros cuadrados?



Los estudiantes deben identificar el dominio de integración que corresponde a la región achurada, $D_1 = \{(x, y) \in R^2 : 0 \le x \le 1, -\sqrt{x} \le y \le \sqrt{x}\} \cup \{(x, y) \in R^2 : 1 \le x \le 4, -\sqrt{x} \le y \le -x + 2\}$. Luego el estudiante debe definir el dominio de integración que permita realizar el cálculo de la integral de manera más eficiente, $D = \{(x, y) \in R^2 : -2 \le y \le 1, y^2 \le x \le -y + 2\}$. A continuación, el estudiante debe definir la integral doble utilizando el dominio óptimo obteniendo: $\int_{-2}^{1} \int_{y^2}^{-y+2} 1\, dxdy$;finalmente debe resolver correctamente la integral doble y obtener su valor:

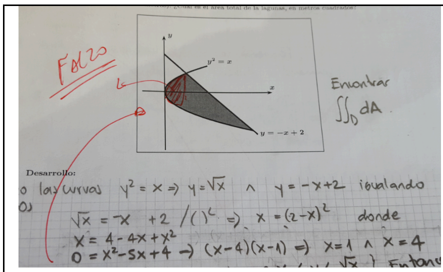
$$\int_{-2}^{1} \int_{y^2}^{-y+2} 1\, dxdy = \int_{-2}^{1} (-y + 2 - y^2)\, dy = \left(\frac{-y^2}{2} + 2y - \frac{y^3}{3}\right)\Big|_{-2}^{1} = \frac{9}{2}$$

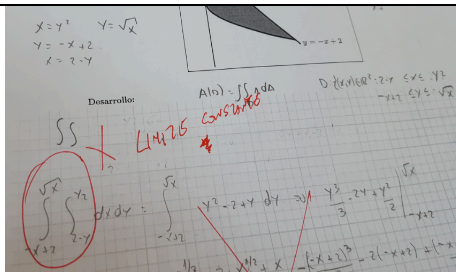
Tabla 1: resultados de la actividad

Pasos correctos en la resolución del problema	n=33	%
Identifica y define el dominio de integración	18	54.5
Define el dominio de integración que permita resolver la integral de manera más eficiente.	18	54.5
Define la integral doble correctamente	17	51.5
Realiza el cálculo de la integral doble correctamente	17	51.5
Obtiene el valor correcto de la integral	12	36.4

En la tabla 1 se presentan los resultados obtenidos. Observamos que, el 54.5% de los estudiantes identifica y define el dominio de integración. Además, el 54.5% define el dominio de integración que permite resolver la integral de manera eficiente. Los errores observados más comunes identificados son; dejan ambos límites con variables, no identifican ni definen dominio y los estudiantes que deciden trabajar con el dominio sin modificar no observan la necesidad del cálculo de la integral mediante la suma de integrales. A continuación consideramos algunas imágenes de estos errores.

Imagen 4 **Imagen 5**





Se observa que sólo el 51.5% luego de identificar un dominio, define correctamente la integral doble yrealiza el cálculo de la integral doble correctamente. Algunos estudiantes deciden trabajar con el dominio no optimizado, sin embargo no identifican que para trabajar con ese dominio se necesitan dos integrales, otro error común es que no recuerdan las propiedades de integrales. Finalmente se sólo el 36.4% de los estudiantes obtiene el valor correcto, se observan errores de cálculo en sumas de fracciones.

CONCLUSIONES

En el proceso implementadose introdujeron algunos elementos de significado delas integrales doble, agrupados en distintas actividades y utilizando tres configuraciones epistémicas en el trabajo en el aula, comprometiendo al estudiante a observar distintos acercamientos de las integrales dobles. Respecto de la forma de argumentación, se ha ampliado las formas tradicionales de razonamiento formal deductivo. Si consideramos las diferencias presentes en los estudiantes con respecto a sus capacidades, conocimientos previos, interés y esfuerzo durante el proceso de estudio, entre otras; concluimos que el tipo de idoneidad cognitiva nunca será completa (en el sentido de que los estudiantes logren todos los resultados de aprendizaje). En relación a los fines de la enseñanza, una primera evidencia de idoneidad cognitiva es el aprendizaje mostrado por los estudiantes, evidenciado en las diferentes pruebas de evaluación. El aprendizaje de los diferentes elementos de significado fue, desigual, como se ha mostrado al analizar las concordancias y diferencias del significado implementado y personal de los estudiantes y las diferencias de porcentajes de respuestas correctas en los diferentes problemas.En particular, se considera que la dificultad presente en el Teorema de Fubini es un punto que hay que mejorar la idoneidad cognitiva del proceso de estudio. Con respecto a la idoneidad mediacional, las actividades propuestas en este caso contemplan un rango de dificultad, variedad de procedimientos y formas de exploración bastante mayor que la forma tradicional presentada en los textos de cálculo para ingenieros. La utilización de Geogebra, WolframAlpha, PDI y la plataforma virtual moodlepermitió a los estudiantes, explorar y visualizar conceptos y propiedades complejas. Las tres configuraciones didácticas implementadas permitieron ampliar la parte algebraica mediante las representaciones con apoyo informático, no obstante, si bien, las actividades realizadas con el ordenador han complementado la construcción del significado de las integrales dobles, ha implicado un coste cognitivo al alumno, ya que deben asimilar distintas formas de comunicación en un tiempo limitado de su carga académica del semestre. La plataforma puesta a disposición de los estudiantes, permitió, asimismo, ampliar sus posibilidades de trabajo en el tema, fuera de las lecciones programadas. El único punto limitado fue el tiempo disponible que, aunque amplio para algunos de los estudiantes fue insuficiente para que otros llegaran a asimilar todos los objetivos programados.

Referencias

D'Amore, B., Font, V. y Godino, J. (2007). La dimensión metadídáctica en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Paradigma.Vol. XXVIII, n°2 (pp. 49-77).

Font, V. y Contreras, A. (2008). The problem of the particular and its relation to the general in mathematics education.Educational studies in mathematics. 69 (pp. 33-52).

Godino, J. D. (2002), "Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática".Recherches en Didactiques des Mathematiques, 22 (2/3), 237-284.

Godino, J. D., Contreras, A. y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. Recherches en Didactiques des Mathematiques, 26 (1), 39-88.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. ZentralblattfürDidaktik der Mathematik, 39(1-2), 127-135.

Ramos, A. B y Font, V. (2008). Criterios de idoneidad y valoración de cambios en el proceso de instrucción matemática. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 11(2), 233-265.