ENUNCIADO DE UN TEOREMA: ¿ÚNICO COMPONENTE DE SU SIGNIFICADO?[i]

Molina, Ó[a]., Samper, C[b]. y Perry, P[c].

Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia;
ojmolina@pedagogica.edu.co, csamper@pedagogica.edu.co, pperryc@yahoo.com.mx

Resumen

La comunidad de educación matemática sugiere que la práctica de demostrar teoremas se favorece si las reglas lógicas y los enunciados de los elementos del sistema teórico (postulados, definiciones y teoremas) tienen significado para los estudiantes, pues así podrán hacerlos operables en la demostración. Pero, ¿qué significa entender un teorema? Se podría pensar que tal pregunta se refiere a entender el enunciado y, quizá, su demostración. Como resultado de nuestra investigación más reciente, tenemos una propuesta que amplía el mencionado significado. En este taller pretendemos poner a consideración un significado amplio de la expresión 'entender un teorema' e ilustrarlo con teoremas de la geometría euclidiana plana relativos a la mediatriz de un segmento.

Palabras clave: *Teorema, significado de un teorema, enunciado de un teorema.*

ASPECTOS CENTRALES DEL MARCO DE REFERENCIA

Entre 2011 y 2014, el grupo de investigación Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría (Æ•G) de la Universidad Pedagógica Nacional (Colombia) adelantó una investigación en la que analizamos la actividad semiótica que tuvo lugar en un aula universitaria, relativa a la construcción de significado de un teorema específico de la geometría euclidiana plana. Para realizar el análisis, nos fundamentamos en la propuesta de Signo tríadico de Charles S. Peirce (según la interpretación de Sáenz-Ludlow y Zellweger, 2012). Bajo esa perspectiva, se precisó lo que entendemos por construcción de significado. Como resultado del análisis, identificamos los elementos que, desde nuestro punto de vista, integran un significado amplio de la expresión 'entender un teorema'. Nuestra propuesta requiere precisar primero qué entendemos por teorema y por construcción de significado.

¿Qué es teorema?

Haciendo eco a Mariotti et al. (1997), teorema es el sistema ternario conformado por un enunciado, la demostración de la relación de dependencia formulada en el enunciado, y el sistema teórico que la soporta. Nótese que el término "teorema" refiere no solo a un enunciado, como es lo usual. Naturalmente, nuestro significado de entender un teorema deberá darse en términos de los tres elementos referidos. En el taller ilustraremos, por ejemplo, cómo para un teorema particular, el sistema teórico no solo sustenta la respectiva demostración, sino también cómo le da sentido (matemático) al enunciado, específicamente en lo que respecta al antecedente de la proposición condicional a través de la cual se expresa la relación de dependencia que se demuestra. Este es un asunto que rara vez se profundiza en las clases usuales de matemáticas, quizá por razones didácticas, pero cuyo tratamiento es de total pertinencia en un curso formal que aborde la demostración, su aprendizaje y enseñanza.

¿Qué es construir un significado en el ámbito de la educación matemática?

Desde nuestra perspectiva, es el proceso mediante el cual se producen y refinan interpretaciones sobre aspectos de un objeto matemático, generadas en la mente del estudiante cuando interpreta un signo vehículo (e. g., gesto, palabra, gráfico, imagen mental) en el que el profesor u otro estudiante pretende comunicar algo sobre el objeto; el propósito del proceso es que las interpretaciones, a mediano o largo plazo, sean consonantes con el significado que le atribuye la comunidad de matemáticos (Perry, Camargo, Samper, Sáenz-Ludlow y Molina, 2014).

¿Qué es entender un teorema?

Los aspectos que, según nuestra propuesta, definenaquello a lo cual nos referimos con la expresión 'entender un teorema' son los siguientes:

1. Identificar la estructura del enunciado desde el punto de vista de la lógica matemática y teoría de conjuntos, y tener en cuenta el contenido semántico de las palabras que están involucradas en el enunciado mismo;también identificar aquellas proposiciones que son el antecedente y el consecuente del enunciado, acción clave para iniciar el proceso de demostración. Por ejemplo, estudiar la estructura del enunciado del Teorema de la Mediatriz: "*El lugar geométrico de los puntos de un plano que equidistan de los extremos de un segmento del mismo plano* ***es*** *la recta mediatriz del segmento en dicho plano*", implica relacionar la palabra "es" con una bicondicional que conecta dos proposiciones:

    i) Sea m el lugar geométrico de los puntos de un plano que equidistan de los extremos de un segmento del mismo plano.

    ii) Sea m la recta mediatriz del segmento en dicho plano

    Con esta precisión, la mencionada proposición corresponde a la bicondicional:m es el lugar geométrico de los puntos de un plano que equidistan de los extremos de un segmento del mismo plano, **si y solo si** m es la recta mediatriz del segmento en dicho plano.Es decir, se trata de la conjunción de dos condicionales:

    a) Si m es el lugar geométrico de los puntos de un plano que equidistan de los extremos de un segmento del mismo plano, **entonces** m es la recta mediatriz del segmento en dicho plano.

    b) Si m es la recta mediatriz del segmento en dicho plano, **entonces** m es el lugar geométrico de los puntos de un plano que equidistan de los extremos de un segmento del mismo plano.

    En otras palabras, la palabra "es" del enunciado original está aludiendo a la igualdad de dos conjuntos (los aludidos, respectivamente, en las proposiciones del ítem i y ii) cuya demostración implica justificar las dos condicionales a y b. Un asunto interesante para abordar al respecto de la palabra "es" en el enunciado original, es que este evoca la forma como se expresa una definición de un objeto matemático y no necesariamente un teorema. Este en un asunto semántico que vale la pena discutir. El estatus del enunciado como definición o teorema depende de las decisiones que se toman al conformar el sistema teórico: si, por ejemplo, previamente se ha decidido tomar como definición:<u>la mediatriz de un segmento en un plano, esla rectaperpendicular al segmento y a la cual pertenece su punto medio,</u> entonces el enunciado en cuestión se convierte en un teorema. Pero, es posible declarar alenunciado original como la definición de mediatriz, lo que implica que el enunciado subrayado podría ser un teorema. La decisión para escoger un camino u otro en el aula de clase, responde a razones didácticas, pues desde el punto de vista matemático, como se infiere de las condicionales a y b anteriores, los enunciados son equivalentes. Para el caso de taller, se asumirá como definición de mediatriz el enunciado previamente subrayado. Esto por cuanto es la definición usual de dicho objeto en los libros de texto.

Se propondrá a los asistentes al taller identificar la estructura del enunciado del Teorema de la Mediatriz. En la discusión de las propuestas de los asistentes se espera abordar lo anteriormente planteado.

2. Determinar el contenido geométrico del enunciado: identificar objetos y relaciones involucrados y atribuirles significado cercano al de referencia,que sea útil para la interpretación del enunciado. Este aspecto permite establecer tanto los contextos en los cuales es pertinente usar el teorema como objetos que están involucrados en su demostración. Los objetos involucrados en el Teorema de la Mediatrizson, entre otros, mediatriz de un segmento, lugar geométrico, y distancia entre puntos; las relaciones involucradas son equidistancia entre puntos eigualdad de conjuntos.Haber identificadolos objetos y relaciones permite precisar que los contextos en los cuales puede ser útil el Teorema de la Mediatriz serían aquellos en los que se indaga acerca deequidistancia entre puntos o perpendicularidad (aludida con el objeto mediatriz).

3. Realizar y/o entender la demostración de la relación de dependencia expresada en el enunciado. En este aspecto, se incluyen tres ítems:

    a. Método de la demostración: determinar si es directa, indirecta usando el principio de reducción ya sea negando la tesis del enunciado o descartando casos, por inducción, etc.

    b. Estructura de la demostración: determinar los pilares de la demostración. Estos son: i) los elementos teóricos centrales que la soportan (definiciones, postulados y teoremas), ii) el propósito de usarlos en su desarrollo, y iii) la manera en que están involucrados en la demostración (e. g., por medio de una construcción auxiliar).

    c. Prospectiva de la demostración: hacer un análisis con el fin de explorar o de predecir el comportamiento de un paso hipotético en la demostración, y tomar decisiones con base en el análisis realizado, i. e., decidir si dicho paso finalmente hace parte o no de la demostración.

    En el desarrollo del taller pretendemos ilustrar cada uno de estos aspectos, a partir de las propuestas de demostración del Teorema de la Mediatriz que surjan entre los asistentes al taller.

4. Comparar con otros teoremas: la comparación se hace entre enunciados y entre demostraciones. La primera, consiste en determinar si los enunciados se refieren a asuntos semejantes (e. g., existencia de objetos, comportamiento similar de los objetos involucrados como en el caso del punto medio y la bisectriz de un ángulo). La segunda, que puede darse entre demostraciones de una misma relación de dependencia o de dos distintas, consiste en determinar si las demostraciones tienen una misma estructura o no. Específicamente, se trata de determinar si las demostraciones emplean elementos homólogos y, en caso de que así sea, si el propósito de hacerlo es análogo.

    En el desarrollo del taller pretendemos ilustrar estos aspectos, aludiendo al Teorema de la Mediatriz, y al Teorema de la Bisectriz (El lugar geométrico de los puntos que equidistan de los lados de una ángulo dado y que pertenecen a su interior es el rayo bisector del ángulo).

5. Usar de manera experta el teorema en diversas situaciones: uno de los propósitos de determinar el contenido geométrico del enunciado de un teorema es develar y caracterizar las situaciones o donde se puede utilizar. Reconocemos dos situaciones en las que se puede usar un teorema: i) en la justificación teórica de un procedimiento de construcción de un objeto geométrico con alguna propiedad especial, cuando se emplea como garantía de un paso en tal procedimiento; ii) en la demostración de otro teorema, cuando se usa como garantía de una afirmación en un paso de la demostración. Ahora bien, develar y caracterizar los contextos donde es pertinente usar un teorema no es suficiente; también hay que saber usarlo. Pero…

¿Qué significa saber usar un teorema?

Durante el taller, pretendemos ilustrar lo que significa saber usar un teorema con ejemplos concretos y con ello, describir lo que Selden (2012) denomina uso operable del teorema. A propósito de un problema que usualmentese proponea los estudiantes del curso Geometría Plana (curso que sirvió de contexto para llevar a cabo nuestro proyecto de investigación) para cuya resolución deben usar un programa de geometría dinámica (Geogebra, Cabri, etc.), veamos dos ejemplosque permiten hacer una ilustración de dicho significado. Para el momento en que se propone el problema,los estudiantes cuentan con el Teorema de la Mediatriz y la definición de esta, tal como se mencionaron anteriormente.No conocen asuntos relativos a la reflexión axial o central.

> Problema: Dados dos puntos A y B, ¿cómo construir un punto E de manera tal que pertenezca a una circunferencia de centro X ($\odot X$) que contiene lo puntos A y B, sin construir la$\odot X$? (Este problema se propondrá a los participantes del taller y con base en sus soluciones, se ilustrarán los asuntos que queremos resaltar al respecto).

Su resolución implica usar hechos geométricos relativos a la mediatriz. Veamos un procedimiento: a) construir dos puntos A y B; b) construir la mediatriz m del $\overline{AB}$; c) construir X en m; d) construir una recta n cualquiera que contenga al punto B (o al punto$A$); e) construir la recta s perpendicular a $n$tal que $X \in s$.Sea D el punto su intersección; f) construir la $\odot D$ y radio DB y sea E el otro punto de intersección entre $\odot D$ y s; g) tomar la medida EX y AX para verificar que $EX = AX$ (Figura 1); h) poner rastro al punto E yarrastrar n.$\odot X$ surge a partir de la trayectoria de E (Figura 2).

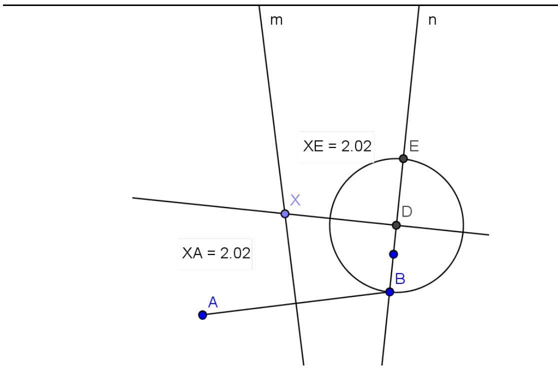

Figura 1

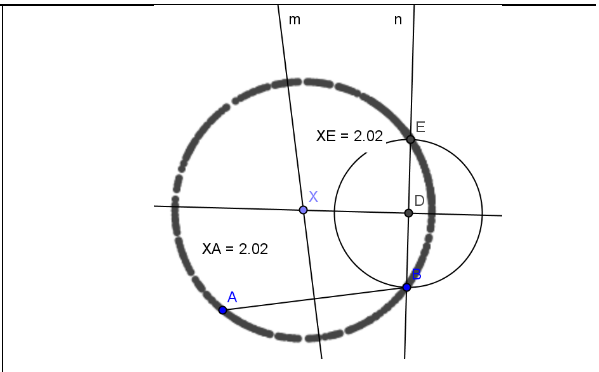

Figura 2

Con este procedimiento se destacauna de las dos situaciones antes referenciados:usar un teorema en el procedimiento de construcción. Nótese que en el paso b, el objeto mediatriz es empleado explícitamente pues gracias al Teorema de la Mediatriz, el punto X equidista de A y B, y ello es suficiente para que estos pertenezcan a $\odot X$. De otro lado, aun cuando dicho objeto (mediatriz) no aparece de manera explícita en otro paso del procedimiento, y por ende no pareciera que el Teorema de la Mediatriz se pueda volver a usar, este se utiliza para poder demostrar que efectivamente el punto E pertenece a $\odot X$. Darse cuenta de tal utilidad, es indicador de tener una buena apropiación tanto de la definición como del teorema. Claro, con los pasos e y f se está garantizando que s es mediatriz del $\overline{EB}$ (usando la Definición de Mediatriz), y al utilizar el Teorema de nuevo, se infiriere que $EX = BX$ y por ende $EX = BX = AX$.

De otro lado, producto de la solución al problema anterior se proveen ideas para demostrar el siguiente teorema clásico de la geometría plana, relativo a una circunferencia que inscribe un triángulo: "Dados tres puntos A, B y C no colineales, existe una única circunferencia que los contiene.". Demostrar este teorema implica determinar el centro de la circunferencia, esto es un punto equidistante de los puntos dados. El objeto mediatriz es clave para llevar a cabo la demostración, pues al construir las mediatrices de los $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ por ejemplo, su punto de intersección equidista de A, B y C gracias al Teorema de la Mediatriz. En consecuencia, tal teorema se usa en la demostración de otro.

UN COMENTARIO FINAL

Ponemos a disposición de la comunidad de educación matemática cinco aspectos que definenaquello a lo cual nos referimos con la expresión '*entender un teorema'*. Consideramos que cada uno de ellos puede servirle al profesor de matemáticas en dos sentidos diferentes: i) como indicador para inferir el significado que, en un momento particular del proceso educativo, tienen sus estudiantes de un teorema específico, y ii) como recurso didáctico para la planeación y gestión de clase cuyo propósito sea propiciar en el aula la construcción de significado de un teorema específico. Como se evidencia en la descripción hecha, los primeros dos elementos incluidos en nuestra concepción de 'entender un teorema'se convierten en soporte de los otros tres; no se puede hacer uso experto de un teorema o hacer una comparación entre enunciados o demostraciones de teoremas, si no se ha entendido su enunciado en el sentido expuesto en párrafos anteriores. Con este panorama, nos atrevemos a sugerir entonces que, en un contexto educativo en el que se pretenda iniciar el camino de construcción del significado de un teorema, es necesario propiciar un espacio para que los estudiantes hagan un estudio juicioso de su enunciado, con el propósito de reconocer su estructura y explicitar su contenido geométrico. Insistimos que cumplir con este único indicador, no es suficiente –pero quizá sí necesario- para tener un significado más o menos completo de un teorema, por lo menos a nivel universitario. Los otros tres elementos deben ser parte de este camino, recorridos de manera paulatina pero con la suficiente conciencia de su importancia. Tareas o problemas como las que proponemos en este taller podrían favorecer este recorrido.

Referencias

Mariotti, M. A., Bartolini Bussi, M. G., Boero, P., Ferri, F. y Garuti, R. (1997). Approaching geometry theorems in contexts: From history and epistemology to cognition. En E. Pehkonen (Ed.), Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (vol. 1, pp. 180-195). Lahti, Finlandia: Universidad de Helsinki.

Perry, P., Camargo, L., Samper, C., Sáenz-Ludlow, A. y Molina, Ó. (2014). Teacher semiotic mediation and student meaning-making: A Peircean perspective. En P. Liljedahl, S. Oesterle, C. Nicol y D. Allan (Eds.), Proceedings of the 38th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and the 36th Conference of the North American Chapter of the Psychology of Mathematics Education (vol. IV, pp. 409-416). Vancouver, Canadá: PME.

Sáenz-Ludlow, A. y Zellweger, S. (2012). The teaching-learning of mathematics as a double process of intra- and inter-interpretation: A Peircean perspective. En Pre-proceedings of the 12th ICME.Disponible en http://www.icme12.org/data/ICME12_Pre-proceedings.zip

Selden, A. (2012). Transitions and proof and proving at tertiary level.En G. Hanna y M. de Villiers (Eds.), Proof and proving in mathematics education. The 19th ICMI Study (pp. 391-420). Dordrecht, Holanda: Springer.

---

[i]El proyecto de investigación, del cual surge estetaller, fue financiado por el Departamento Administrativo de Ciencia, Tecnología e Innovación de Colombia (Colciencias), y el Centro de Investigaciones de la Universidad Pedagógica Nacional (CIUP).Vale la pena precisar que una versión preliminar de este taller fue presentada en el 22 Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones, llevado a cabo en Bogotá-Colombia, en junio del 2015.