

CONSTRUCCION DE UN ESPACIO DE TRABAJO MATEMÁTICO EN LA FORMACIÓN DE PROFESORES

Carolina Henríquez Rivas^a, Romina Menares Espinoza^b, Elizabeth Montoya Delgadillo^c y Paula Verdugo^d

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso;

carolina.henriquez@pucv.cl, romina.menares@mail.pucv.cl, paula.verdugo@mail.pucv.cl,
elizabeth.montoya@pucv.cl

Resumen

El propósito de este taller es invitar a los participantes reflexionar y analizar el trabajo matemático que un docente debe considerar al momento de realizar transposiciones en el aula. Se presentarán tareas desarrolladas en el marco de investigaciones, las cuales serán analizadas desde la Teoría Espacio de Trabajo Matemático y se cuestionará la distancia entre el trabajo personal de cada participante y el trabajo en la enseñanza. Específicamente, serán analizadas las componentes de los planos cognitivo y epistemológico de las tareas propuestas. El taller contempla una puesta en común donde los participantes podrán discutir los alcances e implicancias entre los distintos tipos de trabajo, lo que permitirá reflexionar desde un enfoque teórico aspectos que muchas veces no son abordados ni cuestionados en la formación inicial docente (FID), provocando malos entendidos en el aprendizaje y la enseñanza de la matemática en distintos niveles de la educación.

Palabras clave: *Espacio de trabajo matemático, análisis, geometría, formación del profesor.*

1. INTRODUCCIÓN

El siguiente taller tiene como referente a la teoría de Espacio de Trabajo Matemático (ETM) propuesta por Kuzniak (2011), la cual señala que el alumno al transitar por dos planos – epistemológico y cognitivo– adquiere la comprensión de un saber; ello requiere un diseño de situaciones de manera tal que el profesor se asegure que esto ocurra. En este taller proponemos iniciar a los participantes en la teoría del ETM a través de actividades en las cuales deberán analizar e identificar elementos esenciales que nos señala este constructo. Nuestro propósito es poner en práctica el trabajo personal de cada participante y contrastarlo con el trabajo que se realiza hoy en día en la enseñanza de las matemáticas, particularmente, en situaciones que han surgido desde la investigación.

Este trabajo se enmarca en un proyecto³⁰ que consiste en determinar fenómenos y estudiarlos (bajo situaciones didácticas) en la FID entre Chile y Francia, teniendo en cuenta la construcción de un espacio de trabajo matemático. Nuestra investigación con profesores debutantes (Henríquez & Montoya, 2015; Montoya-Delgadillo, Mena-Lorca & Mena-Lorca, 2014) da cuenta que en geometría, el profesor trabaja una geometría “*algebrizada*”, esto es, que cuando propone un problema geométrico recurrentemente cambia a un dominio algebraico para resolverlo. El álgebra como dominio traspasa distintos ámbitos de la Matemática y es importante aprovechar los cambios de dominio en el análisis o en la geometría para enriquecer el trabajo matemático (Montoya & Vivier, 2014).

³⁰ Proyecto ECOS C13H03.

En el taller, la reflexión en conjunto que se realizará con los participantes sobre las situaciones, nos permitirá favorecer la configuración de su espacio de trabajo matemático para responder a la tarea de la transposición de los saberes en juego y reflexionar sobre sus alcances en el aula.

2. ESPACIO DE TRABAJO MATEMÁTICO

Para el desarrollo de este taller, utilizamos como constructo teórico el *Espacio de Trabajo Matemático* (ETM), teoría desarrollada por Kuzniak (2011) e inspirada en los *Paradigmas Geométricos y Espacio de Trabajo Geométrico* (ETG), iniciada por Houdement y Kuzniak (1996, 2006). En el ETM se distinguen dos planos, uno epistemológico y uno cognitivo, y la articulación entre estos mediante un conjunto de génesis (semiótica, instrumental y discursiva) que favorecen su coordinación (Kuzniak, 2011). En el ETM se concibe la reflexión como el fruto de una interacción entre un individuo y los problemas matemáticos (geométricos, algebraicos...), en un ambiente organizado por y para el matemático (geómetra, algebrista,...).

El *plano epistemológico* está constituido por tres *componentes*: *representante* o *representamen*, *referencial*, y *artefacto*. El *plano cognitivo* está también conformado por tres componentes: los procesos de *visualización*, *construcción* y *prueba*. Para describir la articulación de este modelo, se consideran *planos verticales* (Kuzniak & Richard, 2014), los cuales permite analizar una situación de enseñanza y aprendizaje, estos planos se muestran en la siguiente figura (1).

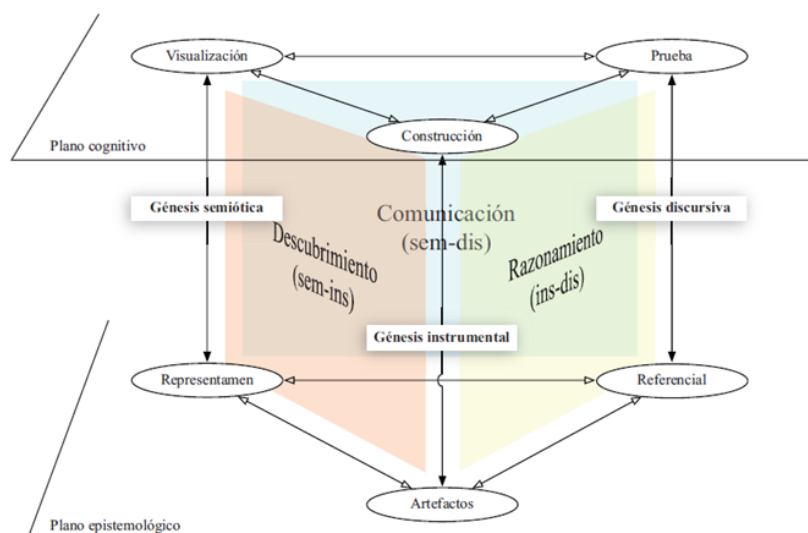


Figura 1: Espacio de trabajo geométrico, sus génesis y planos verticales (Kuzniak & Richard, 2014).

Existen tres tipos de espacios de trabajo: de *referencia*, definido según la relación con el saber, e idealmente sobre criterios matemáticos; *idóneo*, según se enseña este saber en una institución dada con una función definida, y *personal*, según se enfrenta el problema con los propios conocimientos matemáticos y sus capacidades cognitivas.

Tanto las génesis, como las componentes de los planos, deben ser reinterpretadas dependiendo del dominio matemático específico en cuestión (geometría, análisis, álgebra, etc.) y como se accede o utiliza a este espacio de trabajo se distinguen sus respectivos paradigmas en los respectivos dominios.

3. ANÁLISIS AL ETM IDÓNEO Y ETM PERSONAL A PARTIR DE LA MISMA TAREA

Para realizar un análisis de los *ETM-idóneo* y *ETM-personal*, a partir de la misma tarea es necesario identificar qué elementos aparecen en cada una de las componentes del ETM y cuál es la relación

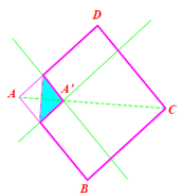
entre una génesis y otra. Como se ha señalado, el objetivo es caracterizar y reflexionar respecto a los ETM *personal e idóneo*, y los respectivos paradigmas. En este taller se presentan tareas que provienen de investigaciones de los proponentes, las cuales activan y dan sentido a distintos ETM. Además, se mostrarán como estas tareas pueden ser abordadas en la formación inicial de profesores, con la finalidad de estudiar el *ETM idóneo* y las consecuencias en el aprendizaje de saberes matemáticos en juego.

El participante, discutirá temas enmarcados en los dominios del análisis y la geometría. En este sentido, se han identificado ciertos fenómenos que están implícitamente abordados en la FID: el pasaje de lo *discreto a lo continuo*, la continuidad en análisis, y la transición entre distintas formas de visualización en geometría.

4. TAREAS PROPUESTAS EN EL TALLER

A continuación, se presentan algunas actividades que se trabajarán en el taller. El participante obtendrá sus conclusiones al comparar dos espacios de trabajo (ETM-idóneo y el ETM-personal) y reflexionará respecto a cómo uno influye sobre el otro. Nos parece necesario el estudio de tareas de referencia, como los que siguen, con el propósito de analizar y discutir su efecto en la enseñanza de las matemáticas.

Tarea 1



<p>Un cuadrado de papel que tiene las caras de distinto color, es doblado formando un triángulo cuyo vértice pertenece a la diagonal de dicho cuadrado. ¿Existe alguna forma de doblar el cuadrado de manera que las áreas de diferente color tengan igual medida? Explique su respuesta.</p>	<p>Figura 2: Cuadrado doblado</p> 
-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Cuestionamientos

¿Es posible la utilización de la noción de continuidad y el TVI, por parte del profesor, para fundamentar su respuesta?, ¿Qué registros y signos son utilizados por el profesor para resolver el problema? ¿Qué ETM y paradigma se despliega? ¿Qué planos del ETM se privilegia con esta tarea?

Esta tarea es posible resolver en distintos dominios (geométrico, algebraico y en análisis) y diversas instituciones (liceo, universidad). En efecto, la tarea involucra en su enunciado una figura geométrica (cuadrado), diagonal, triángulo, áreas. Luego, es posible abordar la pregunta desde un dominio algebraico (encontrando la solución mediante una ecuación cuadrática), o en un dominio analítico, mediante la formulación de dos funciones continuas que cumplen con las hipótesis del teorema del valor intermedio (TVI).

Tarea 2

<p>Dados tres puntos A, B y C, verifica si son o no colineales.</p> <p>i) ¿Cómo lo haría si solo utiliza compás?</p> <p>ii) ¿Cómo lo haría si utiliza Geogebra?</p> <p>iii) Si utiliza Geogebra, pero solo es posible emplear las herramientas “Intersección de dos objetos”  y “Circunferencia dado su centro y uno de sus puntos” , ¿cómo realizaría la verificación?</p>

Cuestionamientos

En este caso, los cuestionamientos han sido divididos en dos partes: distinguir su ETM-personal, y luego, reflexionar desde su ETM-idóneo.

Parte 1: ¿Qué distingue (o caracteriza) el trabajo en cada caso?, ¿Cómo garantiza que la construcción realizada es correcta en cada caso? Identifique propiedades que aparecen en su trabajo (en la veracidad de su trabajo).

Parte 2: Identifique dos niveles escolares en que sería posible realizar este trabajo, atendiendo a las distintas formas de abordar la tarea (parte 1). Justifique su respuesta. ¿Cómo plantearía la tarea en cada caso?, ¿qué elementos distingue y/o diferencian en cada una (definiciones, propiedades, trabajo con figura, uso de herramientas, ...)?

La situación es abordada desde un dominio geométrico pero en el que se despliegan distintos paradigmas. Con las preguntas de la primera parte, las respuestas permiten evidenciar un privilegio sobre el plano [Sem-Ins]. Mientras que, en las preguntas de la parte 2, la idea es mostrar el rol de la génesis discursiva a partir de su posición de profesor, y con esto, activar los planos [Ins-Dis] en la justificación de la construcción y [Sem-Dis] si se valida mediante la figura. Estas cuestiones centrales de la teoría, nos permite analizarlas implicancias a nivel de la formación de profesores.

Tarea 3

El comportamiento de dos cultivos A y B de bacterias (ambos comenzaron con aproximadamente 1.000 bacterias). El cultivo A se encuentra en condiciones muy favorables y se triplica cada un minuto, mientras que el B se está probando un antibiótico, y a cada minuto la población disminuye a su tercera parte.

- i) Haga una tabla de datos
- ii) Grafique las funciones que mejor modela la reproducción de las bacterias (...) ³¹
- iii) Encuentre una función tal que $f^n = f$ et $f(0)=1$.

Cuestionamientos

¿En qué nivel escolar es posible tratar este problema?, ¿por qué?, ¿qué sucede con la curva encontrada? ¿Qué implicancias tiene el “unir puntos” para graficar?

En esta situación se introduce la función exponencial, y muestra elementos del fenómeno discreto-continuo. Se espera hacer un cuestionamiento en términos del ETM-idóneo; cómo se enseña la función exponencial, a pesar del interesante esfuerzo por introducir la modelación matemática al currículo escolar. Asimismo, nos cuestionamos si el fenómeno (discreto-continuo) es abordado en la FID y las posibles rupturas que esto puede producir.

5. CUESTIONES A CONCLUIR

Para finalizar, se espera que los participantes reflexionen sobre el ETM personal que han puesto en juego a la hora de resolver las situaciones (que le hemos llamado tareas), en relación a su ETM idóneo, analizando ambos espacios de trabajo, con el propósito de pensar en los estudiantes y en el éxito de una construcción de los saberes matemáticos en juego. Además, reflexionar sobre la importancia de proponer a los estudiantes ejercicios en los cuales deban recurrir a diversas técnicas para su resolución, transitando por los planos, articulando sus componentes y aprovechando la

³¹Extracto texto escolar II Medio, SM, p. 206

riqueza que significa cambiar de dominios específicos de la matemática y su implicancia en la construcción del conocimiento.

La teoría ETM nos proporciona una herramienta útil para analizar diversos procesos que subyacen a los aprendizajes y al proceso de transposición; en particular, es conveniente para poner atención en la articulación de los ‘paradigmas’ sobre los cuales debieran ser considerados en una formación inicial de un profesor y los que pone en juego en su enseñanza. Asimismo, disponemos de evidencia, y es parte de lo que queremos discutir en el taller, pues existen fenómenos ligados a la enseñanza del análisis y de la geometría que no siempre son explotados o aprovechados en la FID. También es de interés enfrentar la transposición didáctica para una construcción de un espacio de trabajo matemático que potencie el aprendizaje y posteriormente su enseñanza de la matemática.

En términos teóricos, nos resulta deseable que los profesores articulen intencionadamente las componentes de los planos epistemológico y del cognitivo, las circulaciones y activación de génesis y planos verticales, de manera que se promueva la construcción de un ETM-personal adecuado en sus alumnos (y un adecuado ETM-idóneo del profesor).

Reconocimientos: Proyecto ECOS C13H013, Beca de doctorado PUCV, Beca de doctorado Conicyt, Beca Postdoctorado PUCV.

Referencias

- Henríquez Rivas, C. & Montoya Delgadillo, E. (2015). *Espacios de trabajo geométrico sintético y analítico de profesores y su práctica en el aula*. *Revista Enseñanza de las Ciencias*, 33(2), 51-70.
- Houdement, C. & Kuzniak, A. (2006). *Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie*. *Annales de didactique et de Sciences Cognitives*, 11, 175-193.
- Kuzniak, A. (2011). *L’Espace de Travail Mathématique et ses Genèses*. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 16, 9-24.
- Kuzniak, A. & Richard, P. (2014). *Espacios de trabajo matemático. Puntos de vista y perspectivas*. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, 17(4-I), 5-15.
- Montoya-Delgadillo, E.; Mena-Lorca, A. y Mena-Lorca, J. (2014). *Circulaciones y génesis en el espacio de trabajo matemático*. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 17(4-I), 181-197.
- Montoya-Delgadillo, E. & Vivier, L. (2014). *Les changements de domaine de travail dans le cadre des Espaces de Travail Mathématique*, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 19, 73-101.