REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 42. Noviembre 2015
Páginas 09-34

Firma Invitada

Teoria Antropológica do Didático: metodologia de análise de materiais didáticos

Saddo Ag Almouloud

Resumen	Este artículo tiene por objetivo discutir de manera breve algunos aspectos de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) de Chevallard (1992, 1998, 1999, 2002) y presentar un modelo metodológico de análisis de libros didácticos, inspirado en Chaachoua e Comiti (2010) y construido basándose en la TAD. Para ilustrar el uso de este modelo, presentamos un estudio orientado al análisis de materiales didácticos apoyado en este modelo metodológico. La implementación del modelo metodológico permitió identificar los tipos de tareas, las técnicas que permiten cumplirlas y las tecnologías que justifican esas técnicas. Estos tres aspectos fueron construidos a partir de los comentarios de los autores de libros didácticos, del libro del profesor o del análisis matemático de situaciones propuestas para el afianzamiento del aprendizaje. **Palabras- Clave:** Teoría Antropológica de lo Didáctico. Modelo Metodológico. Materiales Didácticos
Abstract	This article aims to briefly discuss some aspects of the Anthropological Theory of Didactic (TAD) of Chevallard (1992, 1998.1999, 2002) and present a methodological model to analyse didactic books, inspired by Chaachoua and Comiti (2010) and based on TAD. To illustrate the use of this model, we present a study focused on the analysis of didactic materials supported by this methodological model. The implementation of the methodological model made it possible to identify different types of tasks, the techniques through which those tasks could be solved and the technologies that could support these techniques. These three aspects were observed from the comments made by the authors of the didactic books used, from the teacher's book or from the mathematical analysis of proposed activities for the consolidation of learning. **Keywords:** Anthropological Theory of Didactic. Methodological Model. Teaching Materials.
Resumo	Este artigo tem por objetivo discutir de forma sucinta alguns aspectos da Teoria Antropológica do Didático (TAD) de Chevallard (1992, 1998. 1999, 2002) e apresentar um modelo metodológico de análise de livros didáticos, inspirado em Chaachoua e Comiti (2010). Esse modelo é construído apoiando-se na TAD. Para ilustrar o uso desse modelo, apresentamos um estudo voltado para a análise de materiais didáticos apoiando-se nesse modelo metodológico. A implementação do modelo metodológico possibilitou identificar os tipos de tarefas, as técnicas que permitem cumpri-la e as tecnologias que justificam essas técnicas. Os três aspectos foram construídos a partir dos comentários dos autores de livros didáticos, do livro do professor ou da análise matemática de situações propostas, tendo em vista a consolidação da aprendizagem. **Palavras-chave**: Teoria Antropológica do Didático. Modelo Metodológico. Materiais Didáticos.

1. Introdução

As pesquisas em Didática da Matemática têm produzido resultados que demonstram avanços importantes na identificação e na compreensão de fenômenos que interferem nos processos de ensino e de aprendizagem de conceitos matemáticos.

A ênfase na compreensão desses fenômenos trouxe à tona a necessidade de desenvolver modelos teóricos que pudessem caracterizar os conhecimentos e saberes matemáticos, bem como fatores que interferem nos processos de ensino e de apropriação de conhecimentos/saberes pelo aluno. Um dos modelos teóricos desenvolvidos na Didática da Matemática é a Teoria Antropológica do Didático (Chevallard, 1992, 1998. 1999, 2002).

O objetivo deste artigo é discutir, de forma sucinta, alguns aspectos dessa teoria e apresentar um modelo metodológico de análise de livros didáticos, construído a partir dessa teoria. Apresentamos um estudo voltado para análise de livros didáticos cujo instrumento principal de análise apoiou-se nesse modelo metodológico.

2. A teoria antropológica do didático (TAD)

Apresentamos brevemente a Teoria Antropológica do Didático, desenvolvida por Chevallard (1992) focando, mais especificamente, suas noções fundamentais e como pode ser um instrumento poderoso para análise, por exemplo, de práticas docentes e de livros didáticos. Discutiremos o modelo proposto, as noções de organizações praxeológicas (organizações matemática e didática), entre outros.

A Teoria Antropológica do Didático (TAD) estuda as condições de possibilidade e funcionamento de Sistemas Didáticos, entendidos como relações sujeito-instituição-saber (em referência ao sistema didático tratado por Brousseau, aluno-professor-saber).

A Teoria Antropologia do Didático, segundo Chevallard, estuda o homem frente ao saber matemático, e mais especificamente, frente a situações matemáticas. Uma razão para a utilização do termo "antropológico" é que a TAD situa a atividade matemática e, em consequência, o estudo da matemática no âmbito do conjunto de atividades humanas e de instituições sociais (Chevallard, p.1, 1999).

A Didática da Matemática, vista no campo da antropologia do conhecimento (ou antropologia cognitiva), considera que tudo é objeto, identificando diferentes tipos de objetos particulares: as instituições, os indivíduos e as posições que os indivíduos ocupam nas instituições, tomando os indivíduos como sujeitos das instituições.

O conhecimento - e o saber, considerado como certa forma de organização de conhecimentos – o autor entende que um objeto existe se um sujeito ou uma instituição o reconhece, se há um conhecimento e um saber reconhecido como forma de organização desse conhecimento. Em outras palavras, a existência de um objeto depende do reconhecimento e do relacionamento de pelo menos uma pessoa ou instituição com esse objeto.

Para Chevallard (1999), o saber matemático organiza uma forma particular de conhecimento, produto da ação humana, em uma instituição caracterizada por qualquer coisa que se produza, se utiliza e se ensina, além de poder eventualmente transpor as instituições. Assim, o autor introduz a noção de habitat de um objeto matemático como sendo o tipo de instituição onde se encontra o saber relacionado ao objeto de estudo, que por sua vez determinará a função desse saber, ou seja, determinará seu nicho.

Na TAD, as noções de (tipos de) tarefa, (tipos de) técnica, tecnologia e teoria permitem modelar práticas sociais em geral e, em particular a atividade matemática. De acordo com o autor, toda prática institucional pode ser analisada, sob diferentes pontos de vista e de diferentes maneiras, em um sistema de tarefas relativamente bem delineadas. O cumprimento de toda tarefa decorre do desenvolvimento de uma técnica

A palavra técnica é utilizada como uma “maneira de fazer” uma tarefa, mas não é necessariamente como um procedimento estruturado e metódico ou algorítmico.

O problema, de delimitar tarefas em uma prática institucional, varia de acordo com o ponto de vista da instituição onde se desenvolve a prática ou de uma instituição externa que observa a atividade para descrevê-la com um objetivo preciso. As tarefas são identificadas por um verbo de ação, que sozinho caracterizaria um gênero de tarefa, por exemplo: calcular, decompor, resolver, somar que não definem o conteúdo em estudo. Por outro lado, “resolver uma equação fracionária” ou ainda “decompor uma fração racional em elementos simples” caracterizam tipos de tarefas, em que se encontram determinadas tarefas, como por exemplo, “resolver a equação $x^2 - 3x + 2 = 0$” ou “decompor a fração 7/9 em frações mais simples”.

Para Chevallard a necessidade de reconstrução de tarefas, na condição de construções institucionais, caracteriza um problema a ser resolvido dentro da própria instituição, que no caso da sala de aula, por exemplo, é uma questão didática.

Para uma determinada tarefa, geralmente, existe uma técnica ou um número limitado de técnicas reconhecidas na instituição que problematizou essa tarefa, embora possam existir técnicas alternativas em outras instituições. A maioria das tarefas institucionais torna-se rotineira quando deixa de apresentar problemas em sua realização. Isso quer dizer que para produzir técnicas é preciso que se tenha uma tarefa efetivamente problemática que estimule o desenvolvimento de pelo menos, uma técnica para responder às questões colocadas pela tarefa. As técnicas assim produzidas são então organizadas para que funcionem regularmente na instituição. Obtém-se assim um bloco “prático-técnico”, formado por um tipo de tarefas e por uma técnica, que pode ser identificado em linguagem corrente como um “saber-fazer”. (Chevallard, 2002, p. 3)

Com relação à ecologia das tarefas, Bosch e Chevallard (1999, p. 85-86) afirmam que “a ecologia das tarefas e técnicas são as condições e necessidades que permitem a produção e utilização destas nas instituições [...]”. Supõe-se que, para existir em uma instituição, uma técnica deve ser pelo menos compreensível, legível e justificada. Essas condições e restrições ecológicas implicam então a existência de um discurso descritivo e justificativo das tarefas e técnicas, chamado de tecnologia da técnica. Toda tecnologia precisa também de uma justificação, ou seja, a teoria da técnica.

Para Chevallard (2002) um "saber-fazer", identificado por uma tarefa e uma técnica, não é uma entidade isolada porque toda técnica exige, em princípio, uma justificativa, isto é, um "discurso lógico" (logos) que lhe dá suporte, chamado de tecnologia. Segundo o autor, a tecnologia vem descrever e justificar a técnica como uma maneira de cumprir corretamente uma tarefa.

Um conjunto de técnicas, de tecnologias e de teorias organizadas para um tipo de tarefa forma uma organização "praxeológica" (ou praxeologia) pontual. Ela reporta-se ao fato de que uma prática humana, no interior de uma instituição, está sempre acompanhada de um discurso, mais ou menos desenvolvido, de um logos que a justifica, a acompanha e que lhe dá razão.

Um saber diz respeito a uma organização praxeológica particular que lhe permite funcionar como uma máquina de produção de conhecimento. A praxeologia associada a um saber é a junção de dois blocos: saber-fazer (técnico/prático) e saber (tecnológico/teórico) cuja ecologia refere-se às condições de sua construção e vida nas instituições de ensino que a produz, utiliza ou transpõe. Consideram-se aqui as condições de "sobrevivência" de um saber e de um saber-fazer em analogia a um estudo ecológico: qual o habitat? Qual o nicho? Qual o papel desse saber ou saber-fazer na "cadeia alimentar"? Tais respostas ajudam na compreensão da organização matemática determinada por uma praxeologia.

Segundo Chevallard (1999), as praxeologias (ou organizações) associadas a um saber matemático são de duas espécies: matemáticas e didáticas. As organizações matemáticas referem-se à realidade matemática que se pode construir para ser desenvolvida em uma sala de aula e as organizações didáticas dizem respeito à maneira que se faz essa construção; sendo assim, existe uma relação entre os dois tipos de organização que Chevallard (2002) define como fenômeno de codeterminação entre as organizações matemática e didática.

Em um processo de formação de saberes/conhecimentos, as praxeologias envelhecem, pois, seus componentes teóricos e tecnológicos perdem seu crédito. Constantemente, em uma determinada instituição I surgem novas praxeologias que poderão ser produzidas ou reproduzidas se existem em alguma instituição I'. A passagem da praxeologia da instituição I para a da instituição I' é chamada por Chevallard (2002) de Transposição, mais especificamente, de Transposição Didática quando a instituição de destino é uma instituição de ensino (escola, classe, etc.).

Com já destacamos na introdução, por meio de conceitos da TAD podemos construir, entre outros, um método de análise de materiais didáticos (livros, cadernos e/ou apostilas destinadas ao ensino e a aprendizagem de conceitos matemáticos). È isso descreveremos no item abaixo.

3. Metodologia de análise de materiais didáticos (livros, cadernos dos Estados e/ou prefeituras)

A análise de livros didáticos continua a ser a entrada principal para questionamento ecológico ou antropológico. O corpus de dados pode ser completado por outros documentos como programas, revistas, materiais pedagógicos, etc. Nesses trabalhos, o pesquisador realiza uma seleção de manuais e adota uma metodologia de análise com base nas perguntas que ele gera. Apresentamos apoiado em Chaachoua & Comiti (2010), a seguir, os elementos que especificam as características do livro didático, o contexto de sua produção e uma caracterização da relação institucional. Acrescentamos a esses elementos um item importante para a análise de materiais didáticos. Trata-se da avaliação, no sentido de Chevallard (1999), das tarefas/técnicas e tecnologias envolvidas nas organizações matemáticas e didáticas propostas pelos autores desses materiais.

4. O momento da edição do livro didático

Chaachoua e Comiti (2010) afirmam que vemos o sistema de ensino como um sistema dinâmico no qual cada currículo define um estado. É um estado de referência para a operacionalização do sistema.

Para Freitas & Rodrigues (s/d, p.1) "O livro didático faz parte da cultura e da memória visual de muitas gerações e, ao longo de tantas transformações na sociedade, ele ainda possui uma função relevante para a criança, na missão de atuar como mediador na construção do conhecimento".

Os mesmos autores destacam que "A trajetória para que os livros didáticos, dicionários, obras literárias e livros em Braille chegassem até às escolas brasileiras teve início em 1929 [...]". (Freitas e Rodrigues, s/d, p.2). Desde então, o sistema de ensino no Brasil, passou por vários Estados.

Dias (2010, p. 2) afirma que

> No período de 1972 a 1981 foram expressivos os projetos apresentados ao Congresso Nacional com o objetivo de rever algumas decisões, suprir ou minimizar a gravidade dos problemas gerados com o custo do livro escolar, por exemplo, evitar substituição de livros, uniformizar a indicação desses livros, substituí-los somente no início do 6º ano letivo a contar da data de sua adoção.

A mesma autora acrescenta que somente em 4 de fevereiro de 1976, que foi publicado o decreto – lei nº77.107

> que dispôs sobre a edição e distribuição de livros-textos, transferindo para a FENAME a competência de realização do Programa do Livro Didático através da Sistemática da co-edição. Pelo convênio firmado entre a FENAME e as Secretarias Estaduais de Educação, obriga-se o governo federal a distribuir um determinado montante de livros ao alunado carente da rede oficial de 1º grau, cabendo aos estados participarem com contrapartida financeira e material". (Oliveira et al., 1997, p. 64, apud Dias, 2010, p.2)

A partir de 1998, foi criado o Guia de Livros Didáticos por meio do PNLD (Plano Nacional do Livro Didático) que traz sugestões de livros para todos os anos, aprovando ou não as obras selecionadas.

De acordo com o PNLD 2016,

> O livro didático de Matemática, instrumento de trabalho do professor e de aprendizagem do aluno, é adequado na medida em que favorece a aquisição, pelo aluno, de um saber matemático autônomo e significativo. Para a realização desse processo, alguns princípios gerais precisam ser considerados para que esse livro didático favoreça a aquisição, pelo aluno, de níveis gradativamente mais elevados e complexos de autonomia no pensar. (Brasil, 2015, p.21)

Nessa linha de reflexão, o PNLD 2016, considera importante que o livro didático seja um instrumento que contribua para, entre outras características, “concretizar escolha adequada de conteúdos e maneira pertinente para sua apresentação, em conformidade com as especificidades da Matemática e as demandas da sociedade atua”. (Brasil, 2015, p.22)

5. A representatividade

Em países onde existem vários manuais como é o caso no Brasil, é importante proceder com a escolha de um ou vários manuais que são mais utilizados pelo professor. Essa importância é destacada pelo PNLD 2016, quando afirma que:

> O livro didático traz para o processo de ensino e aprendizagem mais um elemento, o seu autor, que passa a dialogar com o professor e com o aluno. Nesse diálogo, o livro é portador de escolhas sobre: o saber a ser estudado (a Matemática); os métodos adotados para que os alunos consigam aprendê-lo mais eficazmente; a organização curricular ao longo dos anos de escolaridade. Estabelece-se, assim, uma teia de relações que interligam quatro polos: um deles é formado pelo autor e o livro didático; o professor, o aluno e a Matemática compõem os outros três [...]. (Brasil, 2015, p.18-19)

Um dos pontos importantes destacados por Chaachoua & Comiti (2010) é a estrutura da obra sobre a qual dissertaremos no item abaixo.

6. A estrutura

O estudo da estrutura do manual informa-nos sobre o lugar concedido às atividades, a presença ou não de exercícios resolvidos e comentários eventuais dos autores.

Por exemplo, a estrutura dos livros didáticos mudou, pois desde 1998, a avaliação das obras didáticas, inscritas nos PNLD, é feita por meio da articulação entre critérios eliminatórios comuns a todas as áreas e critérios eliminatórios específicos para cada área e componente curricular, requisitos indispensáveis de qualidade didático-pedagógica.

Durante o período da reforma da matemática moderna, capítulos de livros didáticos estavam estruturados em duas partes: curso e exercícios e problemas. Após essa reforma e as exigências do PNLD, hoje, os capítulos consistem, geralmente, em exemplos e atividades resolvidas, seguidos de propostas de atividades que buscam promover a consolidação da aprendizagem. No final de capitulo ou do livro, apresenta-se uma seção convidando ao uso da tecnologia, que apresenta recursos como sites e programas de computador que têm por objetivo auxiliar o aluno e/ou professor no desenvolvimento dos conteúdos matemáticos, tratados no livro.

Os exercícios resolvidos e comentários dos autores nos informam o que é esperado dos estudantes ou professores, quando se trata do livro do Professor.

No próximo tópico, dissertaremos de forma sucinta sobre a análise ecológica, um dos itens importantes na análise de materiais didáticos.

7. Análise ecológica

A análise ecológica de um objeto de saber é organizada em torno de dois conceitos: o ***habitat*** que significa o lugar onde o objeto vive e ambiente conceitual desse objeto de saber, e o ***nicho*** que se refere à função desse objeto no sistema de objetos com os quais interage.

Trata-se nesse tipo de análise de tentar responder as seguintes questões: O objeto de saber faz parte das recomendações curriculares para a Educação Básica? Está presente nos livros didáticos? Como é apresentado e com qual finalidade? Esse objeto de saber é efetivamente trabalhado na escola? Se sim, em quais condições? Se não, quais são os motivos para ser deixado de lado?

As respostas a essas questões permitem identificar a razão de ser desse objeto de saber na instituição escola.

Retomando alguns elementos da TAD, discutiremos, a seguir, os critérios que devem ser usados para a análise de materiais didáticos.

8. Análise praxeológica

Como destacamos anteriormente, Bosch e Chevallard (1999) apresentam o conceito de praxeologia para melhor caracterizar a relação institucional e afirmam: "o que está faltando é o desenvolvimento de um método de análise das práticas institucionais, permitindo a descrição e o estudo das condições de realização. Os últimos desenvolvimentos da teorização vêm preencher essa lacuna. O conceito-chave que aparece é o da organização praxeológica ou praxeologia". (Bosch & Chevallard, 1999, p.85). Daí a hipótese de trabalho: *o estudo da relação institucional pode ser feito pela análise praxeológica*.

A Teoria Antropológica do Didático considera que, em última instância, toda atividade humana consiste em cumprir uma tarefa t de certo tipo T, por meio de uma técnica τ, justificada por uma tecnologia θ que permite ao mesmo tempo cogitar essa técnica ou mesmo de produzi-la. A tecnologia, por sua vez, é justificada por uma teoria Θ. Em suma, ela começa a partir da premissa de que toda atividade humana coloca em jogo uma organização, que Chevallard (1998) indica por [T, τ, θ, Θ] e a nomeia de praxeologia ou organização praxeológica.

A palavra praxeologia descreve a estrutura da organização [T, τ, θ, Θ]: em grego práxis, que significa "praticar", refere-se ao bloco pratico-técnica (ou práxis) [T/τ] e o logos (em grego), que significa "razão", "discurso fundamentado", refere-se ao bloco teórico-tecnológico [θ/Θ].

Essas noções permitem redefinir certas noções comuns. Pode-se considerar que o bloco [T/τ] representa o que geralmente chamamos de saber-fazer, e o bloco [θ, Θ] representa o que é geralmente referido como saber (no sentido restrito). Chevallard (2002) então designa como praxeologia [T/τ/θ/Θ] uma organização de saber.

Esse modelo da Praxeologia é um bloco básico. Esses blocos básicos virão em geral amalgamar-se para constituir praxeologias locais, nas quais existem vários saberes-fazer justificados pelo mesmo saber, praxeologias regionais nas quais a mesma teoria justificará várias tecnologias, que por sua vez justificarão vários tipos de blocos de tarefas/técnico; praxeologias globais finalmente que incluirão várias teorias.

Falamos de praxeologia matemática – ou de organização matemática - quando os tipos de tarefas T são voltados para a matemática, praxeologia didática - ou de organização didática - quando os tipos de tarefas T são tipos de tarefas de estudo. Geralmente, em uma instituição I, uma teoria Θ justifica várias tecnologias θj, cada uma, por sua vez, justifica e torna inteligível várias técnicas τ_{ij} correspondentes a tantos tipos de tarefas T_{ij}. As organizações pontuais vão assim se constituir, primeiro em *organizações locai*s, $[T_i/\tau_i/\theta/\Theta]$, centradas em uma determinada tecnologia θ e, em seguida, em *organizações regionais*, $[T_{ij}/\tau_{ij}/\theta/\theta]$, formadas em torno de uma teoria Θ. Além disso, Chevallard (1998) nomeia de organização *global*, o complexo praxeológico $[T_{ijk}/\tau_{ijk}/\theta/\Theta]$ obtido, em uma determinada instituição, pela agregação de várias organizações regionais correspondentes a várias teorias Θ_k.

A implementação dessa abordagem para a análise de livros didáticos, como esses são atualmente estruturados, é organizada frequentemente como segue.

- *Identificação dos tipos de tarefas*: analisam-se as atividades propostas nas diferentes partes do capítulo. Exemplos e atividades do curso (apresentado sob a forma de desafios ou exercícios resolvidos) permitem identificar os tipos de tarefas importantes para a instituição. A parte “exercício” permite identificar o conjunto de todos os tipos de tarefas. Note-se que, nessa fase, o pesquisador realiza agrupamentos de tarefas em tipo de tarefas tais como salienta Artaud (2007, apud Chaachoua & Comiti, 2010, p.776) que afirma que "a noção do tipo de tarefas tem por principal função na análise permitir agrupamentos de tarefas julgadas suficientemente próximas, o tamanho dos grupos depende da realidade modelada, da instituição em jogo e do trabalho que se deseje desenvolver."
- *Identificação de técnicas:* Após a identificação dos tipos de tarefas, procede-se à caracterização das técnicas que permitem cumprir essas tarefas apoiando-se nos exercícios resolvidos e/ou na análise matemática das situações propostas;
- *Identificação de tecnologias*: construímos a tecnologia a partir da análise dos comentários dos autores, do curso e eventualmente da análise do livro do professor *ou de análise matemática de situações propostas para consolidação da aprendizagem*.

Um dos aspectos importantes da TAD é a possibilidade de avaliar as tarefas/técnicas e tecnologias nos processos de ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos. No item abaixo dissertaremos sobre o assunto.

9. Avaliar as tarefas/técnicas e tecnologias

Para que as análises sejam efetivadas, Chevallard (1999) propõe alguns critérios que podem ser considerados ao avaliar tipos de tarefas, técnicas ou mesmo o bloco tecnológico-teórico. Ele sugere que se verifique se os critérios abaixo elencados são atendidos:

1. **Para a avaliação de tipos de tarefas** (T), Chevallard sugere os seguintes critérios:

- **Critério de identificação**: verificar se os tipos de tarefas estão postos de forma clara e bem identificados;
- **Critério das razões de ser**: verificar se as razões de ser dos tipos de tarefas estão explicitadas ou ao contrário, esses tipos de tarefas aparecem sem motivos válidos;
- **Critério de pertinência**: verificar se os tipos de tarefas considerados são representativos das situações matemáticas, mais frequentemente encontradas e se são pertinentes tendo em vista as necessidades matemáticas dos alunos.

2. **Para a avaliação das técnicas** (τ):

A avaliação de técnicas apoia-se nos mesmos critérios discutidos na avaliação de tipos de tarefa. Além disso, é preciso responder as seguintes questões:

a) As técnicas propostas são efetivamente elaboradas, ou somente esboçadas?
b) São fáceis de utilizar?
c) Sua importância é satisfatória?
d) Sua confiabilidade é aceitável sendo dadas suas condições de emprego?
e) São suficientemente inteligíveis?

3. **Com relação ao bloco tecnológico-teórico** (θ):

Podemos fazer observações análogas a propósito do bloco tecnológico-teórico. Assim, sendo dado um enunciado, o problema de sua justificação é somente posto ou ele é considerado tacitamente como pertinente, evidente, natural ou ainda bem conhecido?

a) As formas de justificação utilizadas são próximas das justificativas matematicamente válidas?
b) Elas são adaptadas ao problema colocado?
c) Os argumentos usados são cientificamente válidos?

O resultado tecnológico de uma dada atividade pode ser explorado para produzir novas técnicas para resolver novas tarefas.

No próximo tópico, apresentamos um exemplo de análise de materiais didáticos (livros didáticos e caderno do Estado de São Paulo), focando o objeto de saber “Equação da reta no plano cartesiano”.

10. Exemplo de análise de livros didáticos usando essa metodologia construída a partir da TAD

Apresentamos, como exemplo, uma parte de um estudo de Marcia Varella (2010), realizado sob nossa orientação. O trabalho de Varella tem por objetivo analisar como autores de materiais didáticos do Ensino Médio organizaram as tarefas propostas com provas e demonstrações no conteúdo “Geometria Analítica” para 3ª série do Ensino Médio.

O aporte teórico que fundamentou as análises de Varella, seguiu os pressupostos da Teoria Antropológica do Didático de Yves Chevallard (1999) que focaliza o estudo das organizações praxeológicas – matemática e didática – pensadas para o ensino e aprendizagem da matemática e o trabalho de Nicolas

Balacheff (1988) que visa o estudo da **tipologia de provas**[1] produzidas por alunos

Levando em conta o espaço reservado a este artigo, focalizamo-nos em uma parte da análise de materiais didáticos realizada, convidando o leitor que quiser ter uma visão mais abrangente do estudo a ler o trabalho completo disponível no link conforme as referências deste artigo.

11. Escolha dos Livros Didáticos

Varella (2010), em uma etapa de sua pesquisa, realizou análises, a respeito da organização praxeológica e níveis de provas sobre tarefas que envolvam Equação da Reta em Geometria Analítica no Plano, em livros didáticos do Ensino Médio e por meio do material disponibilizado pela SEESP/2009 – Cadernos do Professor e do Aluno.

Para escolha de livros didáticos, Varella selecionou algumas das coleções aprovadas pelo Programa Nacional do Livro para o Ensino Médio (PNLEM) para 2009. O referido Programa foi implantado a partir de 2004, pela Resolução nº.38 do Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE) – Ministério da Educação. Esse Programa tem, entre seus objetivos, a distribuição de livros didáticos para os alunos do Ensino Médio das escolas públicas do país.

A escolha dos livros que serão utilizados nas escolas públicas é feita pelos professores dessas escolas, a partir do Catálogo do Programa Nacional do Livro para o Ensino Médio fornecido pelo Ministério da Educação, enviado às escolas e disponível em página eletrônica (www.mec.gov.br). O objetivo da criação desse catálogo é selecionar, dentre as coleções de livros didáticos para o Ensino Médio disponíveis no país, aquelas que atendam a critérios que permitam a melhoria da qualidade da Educação Básica, como também o respeito às diferenças e a inclusão social.

Varella (2010) selecionou 7 coleções juntamente com o material disponibilizado pela SEESP (Secretaria do Estado de Educação de São Paulo), que nomeou de LD1, LD2, LD3, LD4, LD5, LD6 e LD7, e o material da SEESP - Caderno do Professor - foram identificados por CP2009 e – Caderno do Aluno – CA2009**.**

[1] **Prova pragmática** é hipotecada pela singularidade do acontecimento que a constitui, é preciso aceitar seu caráter genérico. Ela é além disso, tributária de um contingente material: ferramentas imprecisas, defeitos de funcionamento.
Prova intelectual mobiliza uma significação contra uma outra, uma pertinência contra uma outra, uma racionalidade contra uma outra. (BALACHEFF, 1988, p.54).
Balacheff (1988) determina, a partir desses dois tipos de provas, quatro principais tipos considerando a gênese cognitiva da demonstração:
***Empirismo ingênuo** (empirisme naif):* é o primeiro nível de validação de uma conjectura. O aluno assume uma conjectura como verdadeira, a partir da verificação de vários casos.
Experiência crucial (*expérience cruciale*): é o segundo nível de validação de uma conjectura por alunos apoiando-se em um caso cuidadosamente escolhido.
Exemplo genérico (*exemple générique*): o aluno explicita as razões para a verdade de uma afirmação (conjectura) por meio de operações ou transformações de um objeto que considera ser o representante característico de sua classe.
Experiência mental (*expérience mentale*): o aluno invoca uma ação em um caso específico, mas afasta-se de sua concretização.

Após a seleção desses livros, Varella (2010) optou em categorizá-los, para selecionar uma amostra representativa para sua pesquisa. Os critérios adotados são:

- livros pertencentes às coleções didáticas adotadas na escola onde a pesquisadora trabalha.
- livros que abordam conceitos de Geometria Analítica.

Com relação aos critérios estabelecidos preliminarmente, os livros que foram adotados na escola da pesquisadora são o LD1 e o LD6. O segundo critério ficou contemplado pela análise preliminar que realizou nos materiais selecionados considerando somente os conceitos relacionados à Geometria Analítica que se faziam presentes antecedendo o estudo da equação de uma reta.

No final dessa fase de estudo, Varella selecionou os materiais didáticos LD1, LD6, LD7, CP2009 e CA2009, assim discriminados:

Quadro 1: – Materiais didáticos selecionados após análise preliminar

MATERIAS DIDÁTICOS PARA ANÁLISE À LUZ DO REFERENCIAL TEÓRICO				
LIVROS DIDÁTICOS			MATERIAL SEESP	
LD1	LD6	LD7	CP2009	CA2009
DANTE, L.R. Matemática. Volume único. Ática, 2005.	**SMOLE, K.C.S. DINIZ, M.I.de S. Matemática ensino médio.** volume 3. 3ª.série. Saraiva, 2005.	**PANADÉS RUBIÓ, A. FREITAS,** L.M.T. de. **Matemática e suas tecnologias**: 3ª. série IBEP, 2005.	**Caderno do Professor: matemática,** ensino médio – 3ª.série, volume 1. SÃO PAULO: SEE, 2009.	**Caderno do Aluno: matemática,** ensino médio – 3ª.série. Volume 1. SÃO PAULO: SEE, 2009

Fonte: Varella (2010, p.124)

O interesse de Varella (2010) está voltado para análise de tarefas envolvendo provas e demonstrações em Geometria Analítica no plano, visando o estudo da equação da reta. Para levar a cabo sua investigação, ela iniciou pela análise do manual do professore.

Essa análise revela os seguintes aspectos:

1. Em LD1, O Manual do Professor (LD1, p.3) faz menção aos princípios gerais da Educação: *aprender a conhecer, a fazer, a conviver e a ser*. A proposta do autor é apresentar “uma nova proposta pedagógica de ensino da Matemática para o Ensino Médio”, no que diz respeito a conteúdos e metodologias. Pelas justificativas do autor, Varella afirma que houve a preocupação com o desenvolvimento dos processos de ensino e de aprendizagem, considerando ambos os agentes: o aluno, em seus aspectos cognitivos e o professor, pela organização metodológica dos conteúdos e atividades.

2. O material LD6 apresenta a coleção a partir do Manual do Professor com Orientações Didáticas, pretendendo “contemplar as orientações mais atuais para o ensino e a aprendizagem dessa disciplina, observando a necessidade de adequação a alunos com diferentes motivações, interesses e capacidades”. (Manual do Professor, LD6, p.2). Nesse material, é proposto que os alunos

elaborassem seus próprios problemas com o objetivo de desenvolver a habilidade de criar, de fazer matemática e adquirir noções sobre a forma de utilização da linguagem matemática. A importância dessa elaboração se dá pelo fato de apresentar ao professor como o aluno está elaborando internamente os conteúdos estudados, ou seja, cognitivamente.

3. Igualmente ao material LD1, observamos a preocupação das autoras com o desenvolvimento cognitivo do aluno e com a organização didática das atividades que auxiliam o professor à introdução aos conteúdos.

4. No material LD7, os autores apresentam um documento denominado Planejamento e Metodologia por meio do qual discutem temas referentes aos pressupostos dos processos de ensino e de aprendizagem, tecnologias aplicadas à educação e diretrizes gerais da avaliação escolar. São apresentadas teorias que fundamentam os estudos referentes ao desenvolvimento cognitivo dos alunos como também se discute o papel da avaliação na atividade escolar, considerados pontos importantes que podem nortear o trabalho do professor.

5. No material CP2009 não há um Manual do Professor, visto que os Cadernos são bimestrais e não seriados ou em volume único. Entretanto, os autores apresentam Orientações Gerais sobre os Cadernos e os conteúdos do bimestre, discriminando as Situações de Aprendizagem presentes em cada um deles e sugerindo materiais que possam auxiliar o trabalho do professor, tais como: textos, softwares, vídeos, sites.

12. Critérios de análise da organização didática

Após a escolha do material didático, Varella (2010) definiu os critérios por meio dos quais essas análises serão realizadas.

A análise proposta por Varella (2010, p.128) baseou-se em quatro questões que julgou relevante verificar ao que concerne o estudo das provas e demonstrações em conteúdos matemáticos. Essas questões ficam identificadas como **Questão 1 (Q1), Questão 2(Q2), Questão 3(Q3) e Questão 4(Q4).**

Para a referida autora, cada questão norteadora apresenta, pelo menos, uma tarefa a ser realizada tendo por justificativa as técnicas escolhidas pelos autores e que poderão ser mobilizadas pelos alunos. Os blocos tarefa-técnica e teórico-tecnológico serão explicitados, juntamente com as especificidades de cada uma das quatro questões.

Varella identificou as tarefas pertencentes a cada uma delas e a simbologia utilizada nessa parte da pesquisa.

t : identifica tarefa τô: identifica técnica Q: identifica questão

Quadro 2: Questões e tarefas relacionadas

Questões norteadoras	Tarefas relacionadas
Questão 1 (Q1): Qual a abordagem utilizada pelo autor para introdução ao conteúdo Geometria Analítica?	Tarefa1 (t1Q1): Apresentar parte introdutória[2] à Geometria Analítica
Questão 2 (Q2): Como os conceitos matemáticos que antecedem o estudo da Equação da Reta são apresentados**?**	Tarefa1 (t1Q2): Identificar quais conceitos são trabalhados precedentes ao estudo da Equação da Reta.
	Tarefa2 (t2Q2): Identificar as abordagens utilizadas para descrever esses conceitos.
Questão 3 (Q3): Na introdução aos conceitos que antecedem o Estudo da Equação da Reta são utilizados os termos *propriedade*, *teorema, demonstração, prova*, ou mesmo é feita alguma diferenciação entre eles?	Tarefa1 (t1Q3): Identificar a utilização dos termos nas tarefas executadas e propostas.
	Tarefa2 (t2Q3): Identificar se é apresentada alguma diferenciação entre os termos utilizados pelo método axiomático-dedutivo.
Questão 4 (Q4): As tarefas propostas, voltadas ao estudo da Equação da Reta, apresentam demonstrações ou provas?	Tarefa1 (t1Q4): Identificar as tarefas propostas para o estudo da Equação da Reta.
	Tarefa2 (t2Q4): Identificar, por meio das tarefas, a utilização de provas ou demonstrações.

Fonte: quadro construído a partir de Varella (2010)

A análise foi realizada apoiando-se em dois blocos: tarefas executadas pelos autores na introdução ao conceito (incluindo os exemplos) e tarefas propostas aos alunos, a partir das escolhas de cada autor. Essa escolha permite ter uma visão geral ao comparar o que foi utilizado pelo autor e efetivamente solicitado ao aluno. Esses dois blocos ficam identificados por Bloco de Tarefas 1 (BT1 – atividades executadas pelos autores) e Bloco de Tarefas 2 (BT2 – atividades propostas aos alunos).

Por problema de espaço, apresentaremos os resultados da análise realizada sobre as tarefas executadas pelos autores de materiais didáticos na introdução ao conceito estudado (BT1), mais especificamente resultados relativos às duas primeiras questões norteadoras da análise dos materiais didáticos.

13. Tarefas executadas pelos autores – BT1

1.1.1.1. Análise quanto à 1ª. Questão:

Q1: Qual a abordagem utilizada pelo autor para introdução ao conteúdo Geometria Analítica?

Com relação a essa questão, Varella (2010) identificou três técnicas que permitem realizar a tarefa (t1Q1):

[2] Consideramos aqui o termo “parte introdutória” como o início do capítulo, ou seja, como o capítulo sobre Geometria Analítica está sendo apresentado ao aluno em seu “primeiro contato” com o tema.

Tarefa1 (t1Q1): apresentar parte introdutória à Geometria Analítica, Técnica1 (τô1Q1): abordagem histórica, **Técnica2 (τô2Q1):** abordagem direta sem recorrer à história da matemática e **Técnica3 (τô3Q1)**: utilização de registros de representação semiótica[3].

A tarefa (t1Q1) e a técnica (τô1Q1) são contempladas nas três coleções selecionadas (LD1, LD6, LD7) ao iniciarem o assunto com um breve histórico sobre a origem da Geometria Analítica, mas a técnica (τô2Q1) não é contemplada. Os textos introdutórios referem-se aos estudos de Nicole Oresme, René Descartes citando sua obra *La Géométrie,* o Sistema Cartesiano Ortogonal, os estudos de Newton e Pierre de Fermat.

Varella (2010) observou no texto da coleção LD1 e no exemplo utilizado na coleção LD7 a correlação da Geometria Analítica com elementos e processos algébricos, mencionando que é possível tratar algebricamente muitas questões geométricas e representar, por meio da Geometria, algumas questões algébricas.

Quanto à técnica (τô3Q1), ela é verificada nas três coleções (LD1, LD6, LD7) por apresentarem registros de representação (algébricos, figurais e textuais) para exemplificar a utilização da Geometria Analítica**.** No material LD6 o registro figural remete ao estudo do ponto e das coordenadas cartesianas no plano.

Diferentemente de LD1 e LD6, em LD7, é apresentada uma situação de localização de ruas. A localização se dá pela utilização de uma malha quadriculada, com o objetivo de promover a adequação de trajetos, quantidade de praças e ruas que possam ser instaladas na região. Essa situação promove a substituição de pontos por números ou pares de números, relacionando conteúdos algébrico e geométrico**.**

No material CP2009, a Geometria Analítica aparece sob o tema *"O plano de Descartes: a parceria entre a álgebra e a geometria"* com destaque à equação da reta, relacionando a Geometria Analítica com um método de abordagem dos problemas geométricos, contemplando o ideal cartesiano, aproximando a Geometria e a Álgebra.

Em CA2009, não são propostas a tarefa (t1Q1) nem a técnica (τô1Q1). Contempla-se a técnica (τô2Q1), em ambos os materiais, visto que a introdução a Geometria Analítica é realizada de forma direta. Essa abordagem contempla a técnica (τô3Q1) pela utilização de registros figurais e algébricos que exemplificam o estudo da distância entre dois pontos, da inclinação de um segmento de reta, do alinhamento de três pontos e das posições relativas entre duas retas.

Varella (2010) afirma que nas três coleções selecionadas (LD1, LD6, LD7), a parte introdutória à Geometria Analítica foi feita por meio de abordagem histórica. Estabeleceu-se correlação entre a Geometria e a Álgebra, ora pelo tratamento algébrico às questões geométricas, ora representando geometricamente expressões algébricas. A utilização de registros de representação (algébricos, figurais e

[3] Um registro de representação semiótica é, segundo Duval (1999), um sistema semiótico que tem as funções fundamentais em nível do funcionamento consciente. Esses registros podem ser: desenho ou figura geométrica, a linguagem natural ou mesmo a linguagem matemática/simbólica. (ALMOULOUD, 2003, p.125)

textuais) também foi verificada nas três coleções, por meio de exemplos no contexto matemático e fora dele.

Varella (2010), comparando as coleções de livros didáticos (LD1, LD6, LD7) com o material CP2009 e CA2009, observa uma carência, no que diz respeito à abordagem histórica, nos materiais da SEESP.

Análise quanto à 2ª. Questão:

Questão 2 (Q2): Como são apresentados os conceitos matemáticos que antecedem o estudo da Equação da Reta?
Tarefa1 (t1Q2): identificar quais conceitos são trabalhados antes do estudo da Equação da Reta.
Técnica1 (τô1Q2): levantamento dos conteúdos abordados em cada material didático.
O quadro 3 apresenta os conteúdos abordados em Geometria Analítica que antecedem o estudo da Equação da Reta, com divergências de um volume para outro. O quadro 3 revela os seguintes conteúdos contemplados no total de materiais verificados, atendendo a tarefa (t1Q2) e a técnica (τô1Q2): estudos sobre a Reta Real (LD7), o Sistema Cartesiano Ortogonal (LD1, LD6, LD7, CP2009, CA2009), Bissetrizes dos Quadrantes (LD6), Distância entre dois pontos (LD1, LD6, LD7, CP2009, CA2009), Ponto Médio de um segmento de reta (LD1, LD6, LD7, CP2009, CA2009), Baricentro de triângulos (LD6, LD7), Condição de Alinhamento de três pontos (LD1, LD6, CP2009, CA2009), Área de triângulos (LD6, LD7) e Coeficiente angular de uma reta (LD1, CP2009, CA2009).

Quadro 3: Conteúdos abordados que antecedem o estudo da Equação da Reta (t1Q2)

	RETA REAL	SISTEMA CARTESIANO ORTOGONAL	BISSETRIZES DOS QUADRANTES	DISTÂNCIA ENTRE DOIS PONTOS	PONTO MÉDIO DE UM SEGMENTO DE RETA	BARICENTRO DE TRIÂNGULOS	CONDIÇÃO DE ALINHAMENTO DE TRÊS PONTOS	ÁREA DE TRIÂNGULOS	COEFICIENTE ANGULAR DE UMA RETA
LD1		•		•	•		•		•
LD6		•	•	•	•	•	•	•	
LD7	•	•		•	•	•		•	
CP2009		•		•	•		•		•
CA2009		•		•	•		•		•

Fonte: Varella (2010, p.136)

Após a realização de t1Q2 e τô1Q2, Varella(2010) identificou as seguintes tarefas:

Tarefa2 (t2Q2): localizar pontos na reta real.

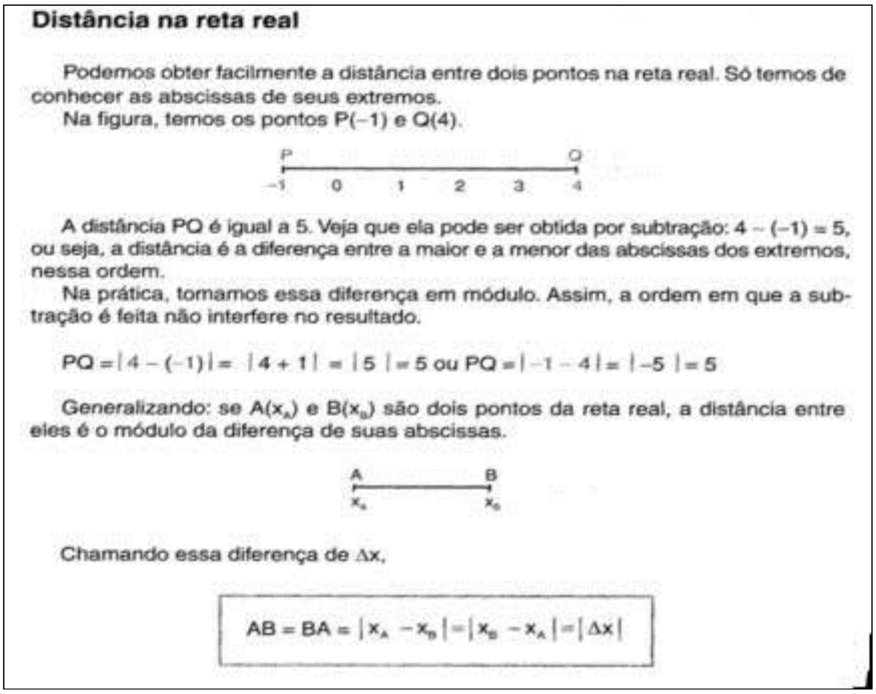
Técnica1 (τô1t2Q2): utilização do sistema de coordenadas.

A tarefa (t2Q2) foi proposta somente pelo autor do material LD7. O objetivo era relembrar os conceitos sobre a correspondência entre os números reais e os pontos na reta numérica e estabelecer uma unidade de comprimento sobre a reta. A reta numérica, posteriormente no Sistema Cartesiano Ortogonal, se denominará *eixo* a partir de sua orientação positiva ou negativa. A técnica utilizada pelo autor para desenvolver essa tarefa foi fazer uso de um registro figural (reta orientada) para exemplificar a localização dos pontos e o cálculo da distância entre dois pontos sobre a reta. O autor do livro apresentou um exemplo numérico (Figura 1). A intenção é fazer com que o aluno entenda a generalidade a partir de um exemplo numérico. Partindo da categorização de provas idealizada por Balacheff (1988), podemos classificar esse exemplo como uma prova pragmática, do tipo exemplo genérico, utilizada com o intuito de mostrar ao aluno como se estabelece o cálculo (numérico) da distância entre dois pontos na reta com posterior generalização.

A generalização da distância entre dois pontos sobre a reta é apresentada sem menção ao termo teorema, sendo apresentada em linguagem natural e matemática simbólica, com destaque à expressão Δx.

Ao avaliarmos a técnica escolhida pelo autor para realizar a tarefa proposta, conforme especifica Chevallard (1999) sobre critérios de avaliação de técnicas, acreditamos que outros exemplos numéricos fossem necessários e que a generalização devesse ser construída nos moldes de um sistema dedutivo, concluindo ao teorema em questão e ao uso linguagem formal apropriada.

Figura 1: Cálculo da distância na reta real. (LD7, p.151)



Distância na reta real

Podemos obter facilmente a distância entre dois pontos na reta real. Só temos de conhecer as abscissas de seus extremos.

Na figura, temos os pontos P(−1) e Q(4).

A distância PQ é igual a 5. Veja que ela pode ser obtida por subtração: 4 − (−1) = 5, ou seja, a distância é a diferença entre a maior e a menor das abscissas dos extremos, nessa ordem.

Na prática, tomamos essa diferença em módulo. Assim, a ordem em que a subtração é feita não interfere no resultado.

$PQ = |4-(-1)| = |4+1| = |5| = 5$ ou $PQ = |-1-4| = |-5| = 5$

Generalizando: se $A(x_A)$ e $B(x_B)$ são dois pontos da reta real, a distância entre eles é o módulo da diferença de suas abscissas.

Chamando essa diferença de Δx,

$$\boxed{AB = BA = |x_A - x_B| = |x_B - x_A| = |\Delta x|}$$

Fonte: Varella (2010, p.138)

O discurso tecnológico-teórico que justifica a técnica utilizada na resolução da tarefa de localizar pontos na reta real, baseia-se no campo da Geometria a partir de eixos orientados que dão suporte ao Sistema Cartesiano Ortogonal e o teorema da distância entre dois pontos.

Tarefa3 (t3Q2): localizar pontos no plano

Técnica1 (τô1t3Q2): utilização do Sistema Cartesiano Ortogonal.

A tarefa (t3Q2) foi realizada pelos autores dos três materiais didáticos como introdução a esse tópico. Os materiais CA2009 e CP2009 não apresentam tarefas introdutórias, resolvidas pelos autores, sobre localização de pontos no plano. Em

LD1, LD6 e LD7, o Sistema Cartesiano Ortogonal é introduzido com o intuito de relembrar os conceitos sobre eixos orientados, correspondência biunívoca entre números reais e pontos no plano, coordenadas de um ponto (abscissa, ordenada), divisão do plano em quatro quadrantes e apresentação das bissetrizes dos quadrantes pares e ímpares.

As técnicas escolhidas pelos autores utilizam registros figurais (representação do plano cartesiano) em malha quadriculada (LD1, LD7) e linguagem matemática simbólica para o par ordenado ora constituído (abscissa, ordenada). Ainda nesses materiais, apresentam-se pontos a serem localizados por exemplos numéricos, sem definir a generalização para um ponto qualquer do plano.

Tal generalização é constatada em LD6 que apresenta a localização de pontos a partir de suas coordenadas gerais: $P(x_p, y_p)$. Percebemos em LD6 que a técnica escolhida pela autora privilegia a linguagem matemática simbólica, característica do método axiomático. Essa escolha antecipa o contato do aluno com aspectos generalizadores que permeiam a elaboração de uma demonstração.

No material CP2009, a técnica empregada privilegia a utilização do Sistema Cartesiano Ortogonal, a partir da representação de segmentos de reta e retas, porém não apresenta atividades resolvidas sobre localização de pontos no plano.

O discurso tecnológico-teórico que justifica a utilização dessas técnicas é o campo da Geometria, pela formalização do Sistema Cartesiano Ortogonal, pelo teorema que estabelece a correspondência biunívoca entre pontos do plano e pares de ordenados.

Tarefa4 (t4Q2): Estudar as bissetrizes pertencentes aos quadrantes pares e ímpares.

Para essa tarefa, Varella (2010) identificou duas técnicas: “Técnica1 (τô1t4Q2): definição de bissetriz” e “Técnica 2 (τô2t4Q2): definição da relação de pertinência de ponto a reta”.

A tarefa (t4Q2) foi proposta pelo autor do material LD6. Em LD7, o autor representa as bissetrizes dos quadrantes do plano cartesiano, porém não cumprida, já que o autor não discutiu o significado das mesmas e as propriedades geométricas que podem ser deduzidas.

Nesse material (LD7), o autor propõe uma reflexão sobre o comportamento das coordenadas dos pontos localizados nas bissetrizes. Entendemos que essa escolha possa ser interpretada como uma técnica para incutir no aluno a curiosidade da busca de uma propriedade que explicasse esse comportamento. Apesar de não se tratar de uma demonstração explícita, essa reflexão pode suscitar a descoberta das funções das demonstrações nos moldes propostos por De Villiers (2002).

Em LD6, a técnica (τô1t4Q2) não foi aplicada, e para cumprir a tarefa (t4Q2), o autor dá destaque à representação geométrica das bissetrizes no plano cartesiano, à linguagem natural para apresentação da propriedade e à linguagem matemática simbólica. Vale ressaltar que o termo propriedade não é utilizado.

A linguagem simbólica, utilizada para estudar a propriedade de pertinência de um ponto à bissetriz dos quadrantes pares ou ímpares, poderia ser deduzida a partir da utilização de provas pragmáticas. Essa escolha privilegiaria o entendimento da propriedade definida a partir de exemplos numéricos que conduzissem a uma generalização. Entendendo esse processo, como uma etapa da definição de uma propriedade geral a partir de casos particulares.

Comparando as técnicas utilizadas em ambos os materiais – representação geométrica e a reflexão sobre as coordenadas dos pontos pertencentes a uma bissetriz - acreditamos que uma junção das duas provocaria a busca de conjecturas e suas eventuais validação.

No Quadro 4, apresentam-se as tarefas e as técnicas relacionadas às tarefas t2Q2, t4Q2 e t4Q2, mas também os registros de representação semiótica privilegiados pelos autores e o tipo de prova usada.

Quadro 4: Quadro sintético das tarefas executadas pelos autores em BT1

TAREFAS EXECUTADAS PELOS AUTORES – BT1					
Tarefa	**Material didático**	**Atividades**	**Técnicas**	**Registros de representação**	**Tipo de prova**
t2Q2	LD7	Localizar pontos na reta real.	Localização de números reis sobre a reta numérica; Localização de pontos sobre a reta numérica;	Figural; Linguagem natural;	Não houve necessidade de produção de prova.
t3Q2	LD1	Localizar pontos no plano cartesiano.	Utilização de malha quadriculada no referencial cartesiano, com unidade de medida;	Figural; linguagem natural; linguagem matemática simbólica;	
	LD7	Determinar as coordenadas dos pontos A,B,C,D,E,F.			
	LD6	Não elaborada.	Utilização do referencial cartesiano.		
t4Q2	LD6				

Fonte: Varella (2010, p.141)

Tarefa5 (t5Q2): Definir e calcular a distância entre dois pontos.

Varella (2010) destaca quatro técnicas que permitem cumprir a referida tarefa: “Técnica1 (τô1t5Q2): demonstração da fórmula da distância entre dois pontos”, “Técnica2 (τô2t5Q2): apresentação da fórmula da distância entre dois pontos”, “Técnica3 (τô3t5Q2): utilização de exemplos para aplicação da fórmula”, e “Técnica4 (τô4t5Q2): representação geométrica para o cálculo da distância”.

No Quadro 6, apresentam-se informações sintéticas sobre a tarefa 5 e as técnicas relacionadas.

Varella (2010) assevera que nos materiais LD1 e LD7, as demonstrações apresentadas pelos autores, definem provas intelectuais com o objetivo de confirmar uma conjectura verificada numericamente.

O bloco tecnológico-teórico, que justifica as técnicas ora apresentadas, é formado pela noção de distância entre dois pontos, o Teorema de Pitágoras para compor a fórmula que calcula a distância entre dois pontos do plano, a localização de pontos e segmentos de reta no plano cartesiano.

As coleções LD1, LD6 e LD7 apresentam tarefas resolvidas utilizando o conceito de distância entre dois pontos. Pelas técnicas utilizadas pelos autores, observa-se que esses autores de livros didáticos privilegiaram resoluções algébricas por meio de provas ora pragmáticas ora conceituais e, com exceção do autor da coleção LD7, todas as tarefas executadas utilizaram a representação geométrica como auxiliar no processo de resolução.

Quadro 5: Tarefas do bloco BT1 – (t5Q2)

TAREFAS EXECUTADAS PELOS AUTORES – BT1					
	Material didático	Atividades	Técnicas	Registros de representação	Tipo de prova
Tarefa (t5Q2)	LD1	Um ponto P(a,2) é equidistante dos pontos A(3,1) e B(2,4). Calcular a abscissa do ponto P.	Demonstração por resolução algébrica com representação geométrica.	Figural; linguagem algébrica e numérica;	Produção de prova pragmática e intelectual;
		Demonstrar que o triângulo com vértices A(-2,4), B(-5,1) e C(-6,5) é isósceles.			
	LD6	Determine no eixo das abscissas, um ponto que dista 5 unidades de A(6,-3).		Figural; linguagem matemática simbólica (generalização)	
		Determine na bissetriz do 2º. E do 4º. Quadrante, o ponto equidistante de A(3,2) e de B(-4,-1).			
		A(3,1) e B(1,5) são vértices consecutivos de um quadrado ABCD.Determine os outros vértices.			
		Determine o centro da circunferência que passa pelo ponto A(1,2) e tangencia os eixos coordenados.			
	LD7	Calcular o perímetro do triângulo de vértices A(2,0), B(-2,-3) e C(-1,4).		Figural; linguagem algébrica e numérica;	
		Determinar o ponto da 2ª. bissetriz que é equidistante de A(1,2) e B(-4,-1).			

Fonte: Varella (2010, p.149)

Em relação aos critérios propostos por Chevallard (1999) para avaliar tipos de tarefas (T), técnicas (τ) e bloco tecnológico-teórico (θ/Θ), Varella afirma que:

> as tarefas propostas pelos autores são representativas das situações iniciais de estudo. Em relação às técnicas escolhidas foram efetivamente esboçadas e de fácil utilização desde que haja domínio dos conhecimentos prévios necessários para a realização de tais técnicas: localização de pontos no plano cartesiano, resolução de triângulos retângulos e aplicação do teorema de Pitágoras, dentre outros. O bloco tecnológico-teórico apresentou justificativas inseridas no campo da Álgebra e da Geometria, por vezes pela utilização da linguagem matemática simbólica, podendo suscitar novas técnicas para a resolução de novas tarefas. (Varella, 2010, p.149)

Com relação às tarefas: Tarefa 6 (t6Q2): Definir e calcular as coordenadas do ponto médio de um segmento de reta e Tarefa 7 (t7Q2): Definir e estudar o conceito de Baricentro de um triângulo**,** Varella definiu as técnicas que podem ser aplicadas para a resolução de ambas, tais como: Técnica1 (τô1Q2): demonstração da fórmula,Técnica2 (τô2Q2): apresentação da fórmula, Técnica3 (τô3Q2): utilização de exemplos para aplicação da fórmula eTécnica4 (τô4Q2): representação geométrica como registro figural do conceito estudado. No Quadro 6, apresentam-se exemplos de situações cuja resolução faz apelo a essas técnicas.

Na sua análise, Varella (2010) aponta que, nos materiais LD1, LD6 e LD7, as atividades relativas às tarefas (t6Q2) e (t7Q2) são executadas a partir da técnica (τô3Q2). Pela análise dessas atividades, ela observou que os autores privilegiaram as aplicações diretas das fórmulas ora demonstradas, caracterizando o que Balacheff (1987) denomina de raciocinar para a prática, inclusive em questões que exijam aprofundamentos, seja pela organização matemática ou pela interpretação do enunciado da questão.

Quadro 6: Apresentação sintética das atividades executadas pelos autores–BT1–tarefas (t6Q2/t7Q2).

TAREFAS EXECUTADAS PELOS AUTORES – BT1					
	Material didático	Atividades	Técnicas	Registros de represen-tação	Tipo de prova
Tarefa (t6Q2)	LD1	Determinar M, ponto médio do segmento AB, nos seguintes casos: a) A(3,-2) e B(-1,-6) b) A(1/2;1/3) e B(-1;2/3)	Resolução algébrica (aplicação de fórmula)	Figural; linguagem matemática simbólica.	Produção de prova pragmática e intelectual; Demonstração com função de comunicação.
		Calcular os comprimentos das medianas de um triângulo de vértices A(2,-6), B(-4,2) e C(0,4).	Resolução algébrica com representa-ção geométrica		
	LD6	Calcular as coordenadas do ponto médio do segmento AB cujas extremidades são A(-4.8) e B(7,-1).			
		Determinar o ponto de intersecção das diagonais e o 4º. vértice de um paralelogramo ABCD cujos outros vértices são A(3,-5), B(5,-3) e C(-1,3)			
	LD7	Achar o ponto médio do segmento de extremos A(5,-4) e B(-3,8).			
		Encontrar o ponto simétrico de P(1,-1) em relação ao ponto Q(-2,3).			
Tarefa (t7Q2)	LD6	Determinar os vértices A,B, C e o baricentro G do triângulo ABC, sabendo que M(2,-1), N(-1,4) e P(-2,2) são os pontos médios, respectivamente, dos lados AB, BC e AC.			
	LD7	Determinar o baricentro do triângulo de vértices A(6,-3), B(3,4) e C(-3,2).	Resolução algébrica (aplicação da fórmula)		

Fonte: Varella (2010, p.155)

O bloco tecnológico-teórico que fundamenta as técnicas adotadas para a realização das tarefas (t6Q2) e (t7Q2), comporta as noções de ponto médio de um segmento de reta e Baricentro de triângulos definidas nos campos da Álgebra e da Geometria. A noção de demonstração é apresentada tanto na introdução ao conceito quanto na execução das tarefas, pela formalização utilizada e adequação dos termos: *seja, então, logo*, que são característicos da linguagem formal e do método axiomático.

Em relação aos critérios estipulados por Chevallard (1999) para avaliar as tarefas, técnicas ou mesmo o bloco tecnológico teórico, adotados em BT1 para as tarefas (t6Q2) e (t7Q2), Varella considera que foram contemplados os critérios 1 e 2 nos três materiais didáticos que apresentaram tais tarefas. O critério 3 também foi contemplado, pois os tipos de tarefas considerados são representativos das situações envolvendo a Geometria Analítica geralmente trabalhadas no Ensino Médio e são pertinentes tendo em vista as necessidades matemáticas dos alunos.

Tarefa8 (t8Q2): Definir a condição de alinhamento de três pontos.

Varella identificou cinco técnicas que podem ser empregadas para a resolução da tarefa t8Q2: Técnica1 (τô1t8Q2): relação de pertinência de um ponto a uma reta, Técnica2 (τô2t8Q2): relação de semelhança entre triângulos retângulos, Técnica3 (τô3t8Q2): demonstração da colinearidade por determinante nulo, Técnica4 (τô4t8Q2): apresentação da colinearidade por determinante nulo eTécnica5 (τô5t8Q2): utilização da representação geométrica para definição do alinhamento de três pontos.

O Quadro 7 sintetiza exemplos de situações propostas pelos autores.

Quadro 7: Síntese das tarefas executadas pelos autores BT1-tarefa (t8Q2)

TAREFAS EXECUTADAS PELOS AUTORES – BT1					
	Material didático	Atividades	Técnicas	Registros de representação	Tipo de prova
Tarefa (t8Q2)	LD6	Verificar se são colineares os pontos: a) A(-3,-5), B(1,3) e C(-1,-1) b) A((-1,4), B(5,-2) e C(2,3)	Resolução algébrica, pelo cálculo de determinante.	Figural; linguagem matemática simbólica;	Produção de prova intelectual e pragmática; Demonstração com função de comunicação e explicação;
	LD1	Verificar se os pontos A(-3,5), B(1,1) e C(3,-1) estão alinhados.			

Fonte: Varella (2010, p.157)

O bloco tecnológico-teórico que justifica as técnicas utilizadas apoia-se nos campos da Álgebra e da Geometria por abranger propriedades relativas à resolução de igualdade de sentenças algébricas, da semelhança de triângulos, das operações no conjunto dos números reais e o sistema de coordenadas cartesianas que permitiu a representação geométrica e a visualização do alinhamento de três pontos.

É interessante observar que, após a formalização das demonstrações em LD1 e LD6, as atividades propostas privilegiaram a técnica do determinante caracterizando-se, segundo Balacheff (1987), como esferas de prática. Esse autor define esferas de prática como aquelas situações nas quais não há a necessidade de validação das ações, uma vez que elas podem ser asseguradas por aplicação de um algoritmo, ou mesmo, pela aplicação de estratégias padronizadas.

As atividades executadas pelos autores para institucionalização do conceito estudado constituem provas pragmáticas, caracterizadas pela função de verificação da veracidade de uma propriedade.

Com relação à "**Tarefa 9 (t9Q2): Determinar o coeficiente angular de uma reta**", Varella identificou três técnicas para cumpri-la, são elas**:** Técnica1 (τô1t9Q2): dedução da fórmula do coeficiente angular, Técnica2 (τô2t9Q2): apresentação da fórmula do coeficiente angular, Técnica3 (τô3t9Q2): utilização da representação geométrica.

O Quadro 8 apresenta exemplos de situações propostas pelos autores dos materiais didáticos e as técnicas relacionadas.

Ressaltamos que nos materiais didáticos LD6 e LD7, os temas Coeficiente angular e inclinação de uma reta são tratados antes do estudo da Equação da Reta, portanto não analisaremos essa tarefa nesse momento.

Em LD1, esse assunto é estudado antes do tópico Equação da Reta. A abordagem utilizada pelo autor faz referência à inclinação (α) de uma reta *r* em relação ao eixo x, sem mencionar a equação geral ou reduzida da reta, visto que esses assuntos ainda não foram estudados. Inicialmente, o autor apresenta a fórmula do coeficiente angular contemplando a técnica (τô2t9Q2), escolhendo explicitá-la posteriormente. O autor observa quatro casos para estudar a declividade da reta, considerando $0° \leq \alpha < 180°$: $\alpha = 0°$; $0° < \alpha < 90°$; $90° < \alpha < 180°$ e $\alpha = 90°$. A dedução da fórmula (τô1t9Q2) se dá, aliada à técnica (τô3t9Q2), a partir da elaboração de provas intelectuais abrangendo duas maneiras para obtenção do coeficiente angular: conhecendo a inclinação (α) da reta e conhecendo dois pontos quaisquer da reta $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$. Na elaboração dessas provas, o autor utiliza-se do cálculo da tangente de um ângulo por meio da diferença entre abscissas (Δx) e ordenadas (Δy) de dois pontos, para definir o coeficiente angular (m) de uma reta.

Quadro 8: Síntese das tarefas executadas (t9Q2) em LD1

TAREFAS EXECUTADAS PELOS AUTORES – BT1					
	Material didático	Atividade	Técnicas	Registros de representação	Tipo de prova
Tarefa (t9Q2)	LD1	Calcular o coeficiente angular da reta que passa pelos pontos A(2,3) e B(4,7). Sugestão: O ângulo α é agudo $(0° < \alpha < 90°)$, pois m>0. Confirme construindo a figura com A e B.	Aplicação da fórmula do coeficiente angular pela tangente trigonométrica; resolução algébrica.	Figural; linguagem matemática simbólica;	Produção de prova intelectual e pragmática.

Fonte: Varella (2010, p.159)

Na tarefa apresentada pelo autor como exemplo do conteúdo estudado, observa-se a elaboração de uma prova pragmática pertencente ao bloco (BT1), a partir da aplicação da fórmula para cálculo do coeficiente angular. O autor sugere que se faça a verificação ou validação do resultado por meio da comparação usando a seguinte tecnologia: se m>0, então a reta apresenta sentido crescente em relação ao eixo x, como também a sugestão da construção geométrica. Na proposta desse autor de livro didático, deu-se ênfase à articulação entre Álgebra e Geometria na demonstração elaborada para a apropriação de Coeficiente angular de uma reta.

A partir das observações tecidas acima, Varella (2010) afirma que essa tarefa seria um momento oportuno para se explorar o uso da linguagem simbólica na produção de uma prova. Ela ainda afirma que

> A técnica escolhida pelo autor pode criar condições para o aluno interpretar o significado de coeficiente angular de uma reta como um procedimento puramente mecânico, singular, no sentido de não entender a necessidade de uma análise e validação do resultado encontrado. (Varella, 2010, p.159)

O bloco tecnológico-teórico que justifica as técnicas escolhidas pelo autor é composto pela álgebra, geometria e trigonometria, ao representar geometricamente, no plano cartesiano, dois pontos pertencentes a uma reta e utilizar o conceito de tangente (trigonometria) para determinação do coeficiente angular (cf. figura 2).

Figura 2: Prova intelectual tarefa (t9Q2). (LD1, p.401)

Seja **r** a reta determinada por **A**(x_1, y_1) e **B**(x_2, y_2) e seja **C**(x_2, y_1).

No triângulo retângulo ABC ($\hat{C}$ é reto), temos:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{d(C, B)}{d(A, C)} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Então:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Fonte: Varella (2010, p.160)

A ideia de demonstração pode ser verificada no emprego da técnica (τô1t9Q2) e pela utilização dos termos *seja*, *temos* e *então*... pertencentes à linguagem simbólica da demonstração

14. Considerações a respeito dessa análise

O propósito da elaboração dessa questão foi o de analisar quais conteúdos matemáticos os O propósito da elaboração dessa questão foi o de analisar quais conteúdos matemáticos e materiais didáticos propunham como precedentes ao estudo da equação da reta, as organizações didáticas (OD) e matemáticas (OM) desses conteúdos a partir das abordagens escolhidas e a existência de provas segundo a tipologia proposta por Balacheff (198, 1988). A análise permitiu levantar os conteúdos matemáticos que esses autores consideraram necessários à compreensão da representação de uma reta por meio de sua equação.

A partir do levantamento realizado nos materiais didáticos, Varella identificou os conteúdos que são comuns a todos esses materiais, tais como: Sistema Cartesiano Ortogonal, distância entre dois pontos e ponto médio de um segmento de reta.

A propriedade “Condição de alinhamento de três pontos” e “o coeficiente angular de uma reta” foram trabalhados pela maioria dos autores dos materiais antes do estudo da equação da reta.

Os estudos com Baricentro e área de triângulos foram contemplados somente por dois materiais didáticos (LD6, LD7). A importância do estudo desses dois temas reside no fato de possibilitar relacionar a medida de área de triângulo ao teorema que estabelece a condição de alinhamento de três pontos, uma vez que três pontos não colineares definem um triângulo e colineares definem uma reta. Essa interação poderia ser proposta nos demais materiais didáticos.

Apesar de existirem conteúdos de Geometria Analítica não contemplados em alguns desses materiais, todos atendem às recomendações dos documentos oficiais que estabelecem tais conteúdos.

O estudo de Varella (2010) permite ter

> um panorama geral da OM referente ao conteúdo Geometria Analítica proposto por cada um dos materiais didáticos até o estudo da equação da reta, bem como, as escolhas dos autores, por meio da OD proposta. Chevallard (1999) considera de fundamental importância a elaboração de uma OD, visto que tem por objetivo o ensino e a aprendizagem de uma OM, ou seja, "fazer existir uma relação pessoal com a organização matemática ou modificar a relação já existente com essa organização". Entende-se por modificação a mobilização de novas técnicas para uma tarefa já existente, ou mesmo, a ampliação do bloco tecnológico-teórico. (Varella, 2010, p.161)

Além disso, Varella (2010) observou que os autores elaboram provas que vão de pragmáticas às intelectuais em algumas tarefas propostas. Ela afirma que

> [..]. Há a preocupação em relacionar a linguagem algébrica e geométrica que representam os objetos matemáticos estudados. As técnicas mobilizadas utilizam-se dos conhecimentos específicos do capítulo como também retomam conhecimentos anteriormente adquiridos. (Varella, 2010, p.161)

Pela análise realizada, tudo indica que os materiais didáticos analisados apresentam subsídios suficientes para que o aluno possa compreender a representação de uma reta no plano, algebricamente e geometricamente. No entanto, Varella (2010) considera que, o tipo de organização didática, proposta para o ensino e a aprendizagem de alguns conteúdos, pode causar a memorização de fórmulas prontas e desvinculadas de teoremas e propriedades que sustentam sua validação matemática.

Do ponto de vista da análise ecológica, apesar de ter apresentado resultados parciais da pesquisa de Varella, observamos os tipos de tarefas escolares em que se utilizam as técnicas e os discursos tecnológico-teóricos da Geometria Analítica, em especial, a Equação da Reta no Plano. A "razão de ser" da Geometria Analítica, mais especificamente do estudo da Equação da Reta, isto é, as questões problemáticas que dão sentido ao estudo da Equação da Reta no Plano, parecer ser relacionada à "condição de alinhamento de três pontos do plano", a construção de uma equação que representa essa condição e tarefas cujo cumprimento exige a mobilização de técnicas e tecnologias diretamente ensinadas e/ou oriundas de organizações matemáticas (Teorema de Pitágoras, medidas de área de figuras planas etc.) anteriormente estudadas no âmbito da Geometria Analítica, Geometria Plana e/ou álgebra.

Referências

Balacheff, N.(1987). *Processus de Preuve et Situations de Validation.* In: Educational Studies in Mathematics, n.18. pp. 147-176.

Balacheff, N. (1988). *Une étude des processus de preuve em mathématique chez des eleves de Collège.* 1988, 619 f. Vol.1 e 2. These (Docteur ès- Sciences Didactique des Mathématiques). Université Joseph Fourier – Grenoble 1. Institut National Polytechnique de Grenoble.

Balacheff, N. (1987). *Processus de Preuve et Situations de Validation.* In: Educational Studies in Mathematics. no.18. pp.147-176.

Bosch, M., Chevallard, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 19/1, 77-124.

Brasil (2015). PNLD 2016, Ensino Fundamental – Anos iniciais. disponível no http://www.fnde.gov.br/programas/livro-didatico/livro-didatico-editais/item/4889-edital-pnld-2016 , acesso, 02/11/2015.

Chaachoua, H., Comiti C. (2010) *L'analyse du rôle des manuels dans l'approche anthropologique*, ACTESCITAD2, 2010, p. 771-789

(in http://www4.ujaen.es/~aestepa/TAD_II/Comunicaciones_TAD_II/9%20-%20Chaachoua-Comiti-congres_TAD_2.pdf, acesso, 02/11/2015)

Chevallard, Y. (1992). *Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique.* Recherches em Didactique dês Mathématiques. Grenoble : La Pensée Sauvage, v.12.1, p.73-112.

Chevallard, Y. (1998). Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques : L'approche anthropologique. *Actes de l'U.E. de la Rochelle*.

Chevallard, Y. (1999). Analyse des pratiques enseignantes et didactique des *mathematiques: l'approche anthropologique*. Recherches em Didactique dês Mathématiques. Vol.19, no.2, pp.221-26.

Chevallard, Y. (2002). *Organiser l'etude.1. Structures & fonctions*. Actes de la 11 École d' Été de Didactique dês Mathématiques. France: La Penseé Sauvage. 2002. versão eletrônica, disponível em: <www.yves.chevallard.free.fr>. Acesso em: 15 Jul. 2015.

Dias, E. (2010). Livro didático: do surgimento às mudanças atuais**,** Anais do II Seminário de Pesquisa do NUPEPE Uberlândia/MG, p. 132-143 21 e 22 de maio 2010, versão eletrônica disponível em http://www.eseba.ufu.br/arquivos/anais/trabalhos_Completos/Eixo_1/Eliana_Dias_-_Livro_didatico_do_surgimento_as_mudancas_atuais.pdf , acesso em 01/11/2015

Varella, M. (2010). *Prova e demonstração na Geometria Analítica: Uma análise das organizações didática e matemática em materiais didáticos.* Dissertação de Mestrado em Educação Matemática – PUC/SP – acessado em 01/11/2015 no http://www.sapientia.pucsp.br/tde_busca/arquivo.php?codArquivo=12213

Saddo Ag Almouloud concluiu o doutorado em Mathematiques et Applications – na Université de Rennes I - França em 1992. É professor e está como coordenador do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Consultor ad hoc da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo, da CAPES e bolsista pesquisador do CNPQ. Publicou mais de 30 artigos em periódicos especializados e mais de 83 trabalhos em anais de eventos. Possui 5 capítulos de livros e 12 livros publicados. Possui 1 software e mais de 80 itens de produção técnica. Participou de 10 eventos no exterior e mais de 112 no Brasil. Orientou mais de 50 dissertações de mestrado e teses de doutorado na área de Educação Matemática. Participou de pelo menos 80 bancas de defesa de dissertações e doutorados. Atualmente coordena dois projetos de pesquisa aprovados pelo CNPq e FAPESP. Em suas atividades profissionais interagiu com pelo menos 50 colaboradores em coautorias de trabalhos científicos. Os termos, mais frequentes na contextualização de sua produção cientifica são: ensino-aprendizagem, geometria, educação matemática, matemática, demonstração, ensino básico, formação de professores, geometria dinâmica. saddoag@pucsp.br e saddoag@gmail.com