Resolución de Problemas Geométricos

Giovanni Sanabria Brenes, ITCR
gsanabria@itcr.ac.cr

Resumen

El presente trabajo brinda una aplicación de la Teoría de Campos Conceptuales, de Gérard Vergnaud, a la resolución de problemas geométricos. La resolución de cierto tipo de problemas geométricos no puede ser algoritmizadas y requiere un proceso de reflexión y exploración que recurre a varios esquemas adquiridos. Se introduce el concepto de esquema principal que permite alimentar la intuición necesaria para la resolución de estos problemas.

Palabras claves: Geometría, Didáctica, Campos Conceptuales.

1 Introducción

Las habilidades que una persona requiera para resolver con éxito un problema matemático son variadas y dependen del tipo de problema a resolver, estás involucras procesos de reflexión, de ensayo y error, de conjetura, de búsqueda de patrones, de razonamiento inducción y deducción, entre otras.

Particularmente, estos procesos se evidencian en una gran variedad de problemas geométricos. Estos problemas son calificados usualmente como los más difíciles, quizás por que no hay un camino trazado para resolverlos. En su resolución se distinguen dos componentes principales: la escritura y los procesos a seguir para resolverlo. El primer componente se debe caracterizar por su rigurosidad y formalidad. El otro componente requiere educar la intuición y el ordenamiento de ideas, para deducir intuitivamente la manera de resolver el problema.

Al considerar las matemáticas como un lenguaje, los componentes anteriormente señalados son llamados: sintáctico y semántico. El componente sintáctico nos permite comunicarnos con los demás, se caracteriza por una serie de reglas que regulan la forma de conectar las "palabras", para formar "oraciones" que permitan expresarnos. La semántica, por un lado le da significado a las oraciones que recibimos, y por otro, nos permite comunicarnos con nosotros mismos y organizar, con la intuición, nuestras ideas para luego expresarlas por medio de "oraciones" a los demás.

¿Quién domina en matemática: la sintaxis o la semántica? Gödel responde a esta interrogante: la sintáctica y la semántica son equivalentes, es decir hay una relación bidirreccional entre ambos componentes. Así, se concluyen dos aspectos importantes:

1. La rigurosidad (sintaxis) regula y enrumba la intuición (semántica). No basta con tener la idea de como demostrar un teorema, la escritura nos permite ordenar las ideas y desechar aquellas que se alejan del razonamiento y de dudosa validez.

2. La intuición es el motor de la rigurosidad. No es suficiente con saberse de memoria los teoremas, las definiciones y manejar el uso de los símbolos, la intuición nos traza el camino poco a poco a la solución del problema.

¿Cómo educar la intuición en la resolución de problemas geométricos? El presente trabajo desarrollará algunas técnicas elementales que permiten alimentar la intuición para hacer frente a los problemas geométricos.

2 Los problemas Geométricos

Antes de enfocarse en los problemas Geométricos, se debe responder, al menos parcialmente, a la pregunta: ¿Cómo resolver problemas? Para responderla se toma como marco de referencia para la resolución de problemas la Teoría de Campos Conceptuales de Gérard Vergnaud, pues como señala Vergnaud su teoría cognitivista pretende proporcionar un marco coherente y algunos principios de base para el estudio del desarrollo y del aprendizaje de competencias complejas.

Un concepto importante en esta teoría es el concepto de esquema: organización invariante de la conducta para una clase de situaciones (problemas) dada. En un esquema hay cierta automatización sin impedir el control de la situación. Son como algoritmos pero tienen mucho implícito.

Ejemplo 1 *Un ejemplo de esquema es la Resolución de Ecuaciones* $ax+b=c$.

Desde este punto de vista, los problemas geométricos se pueden clasificar en dos tipos: los ejercicios (situaciones problema tipo1) y los verdaderos problemas (situaciones problema tipo2). Seguidamente se explican ambos tipos de situaciones.

2.1 Situaciones tipo 1

Clase de situaciones para las cuales el sujeto dispone, en su repertorio, de las competencias necesarias para su tratamiento. En este tipo de situaciones las conductas son muy automatizadas y organizadas por un esquema único. Estas situaciones más que problemas son ejercicios.

Ejemplo 2 *Algunas situaciones tipo 1 en geometría son:*

1. *Calcular un área*
2. *Deducir que dos triángulos son semejantes.*
3. *Aplicar la desigualdad triangular*

2.2 Situaciones tipo 2

Clase de situaciones para las cuales el sujeto no dispone de todas las competencias necesarias para su tratamiento. Esto obliga al sujeto a entrar en un proceso de reflexión, exploración, ensayo y error,...

En este tipo de situaciones las conductas no son automatizadas y se evocan varios esquemas adquiridos que pueden competir entre sí y que por lo tanto deben ser acomodados, separados y recombinados. Estas situaciones son los verdaderos problemas.

Es este tipo de situaciones entran los problemas olímpicos de geometría, algunos problemas de secundaria y los problemas de demostración. Para iniciar la resolución de uno de estos problemas hay dos caminos que no sin totalmente disjuntos:

1. **Exploración**. Realizar un dibujo, hacer deducciones (aplicación de esquemas adquiridos) a partir de las hipótesis con la esperanza de que sean útiles o que arroguen la luz necesaria para ver la solución. En este caso, el sujeto camina inicialmente sin rumbo obteniendo deducciones desconectadas, en busca del camino que lo lleve a la solución.

2. **Definición de un esquema principal.** Para los problemas de conclusión conocida, el sujeto puede recurrir a un esquema adquirido (un problema resuelto o un teorema) que brinde una conclusión similar a la buscada. Si bien, no es la simple aplicación del esquema, algunos elementos de este esquema principal (ruptura del esquema) combinado con elementos de otros esquemas (filiaciones) permitirán obtener la solución al problema. El esquema principal traza un camino que tiene una buena posibilidad de que lleve al sujeto a la solución. La conclusión conocida en un información que se le debe sacar provecho.

¿Cuál de los dos caminos es mejor? Ambos puede conducir al éxito o a errores: con la exploración puede que no se halle el camino a la solución (se obtuvieron deducciones aisladas) y esquema principal nos puede señalar un camino incorrecto. En realidad no hay un camino mejor que el otro, quizás lo optimo es combinar ambos.

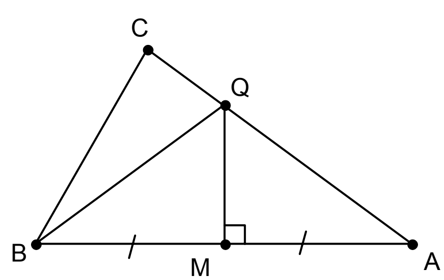
¿Cuál camino utilizan más los estudiantes a nivel nacional? En su mayoría utilizan la exploración, la utilización del esquema principal es poco desarrollada. Por esta razón centraremos la atención en el segundo camino. Así, seguidamente se presentan algunos ejemplos utilizando este enfoque.

2.2.1 Problemas de desigualdades

Ejemplo 3 *En el triángulo* ΔABC *sea* M *el punto medio de* $\overline{AB}$ *y sea* $\overleftrightarrow{MQ}$ *la mediatriz de* $\overline{AB}$ *con* $A-Q-C$. *Pruebe que* $AC > CB$.

Solución: *Dado que la conclusión es una desigualdad ¿Que resultados sobre desigualdades geométricas conoce? Posibles esquemas principales: Desigualdad triangular, En un triángulo, a ángulo mayor se opone lado mayor y viceversa. En este caso ambos sirve como esquema principal:*

1. *Utilizando la Desigualdad triangular. Se debe formar un triángulo de manera que al aplicarle la desigualdad triangular se obtenga que* $AC > CB$. *Por lo tanto, en el triángulo a formar la suma de la medida de dos de sus lados debe ser igual a* AC. *Tracemos* BQ



Por el criterio LAL se tiene que $\Delta BMQ \cong \Delta AMQ$ *por lo tanto*

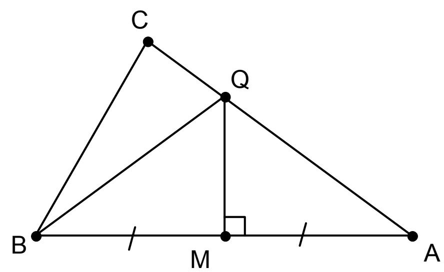
$$BQ = AQ \quad \Longrightarrow \quad AC = CQ + QA = CQ + QB \quad (1)$$

Aplicando desigualdad triangular al ΔCQB *se obtiene que*

$$CQ + QB > CB \quad (2)$$

De (1) *y* (2) *se obtiene el resultado*

2. *Utilizando que en un triángulo, a ángulo mayor se opone lado mayor y viceversa. En este caso se debe probar que en el triángulo ABC el ángulo opuesto a AC es mayor que el ángulo opuesto a CB. Para ello, tracemos BQ :*



Por el criterio LAL se tiene que $\Delta BMQ \cong \Delta AMQ$ por lo tanto

$$m\measuredangle MAQ = m\measuredangle MBQ = m\measuredangle ABQ \quad (1)$$

Por hipótesis $A - Q - C$ entonces

$$m\measuredangle ABC > m\measuredangle ABQ \quad (2)$$

De (1) y (2) se obtiene que $m\measuredangle ABC > m\measuredangle MAQ = m\measuredangle BAC$, como a ángulo mayor se opone lado mayor entonces se concluye el resultado.

Otros problemas similares:

1. Pruebe que la mediana de un lado de un triángulo es menor que la semisuma de los otros dos lados.

2. Pruebe que la mediana de un lado de un triángulo es mayor que la diferencia entre la semisuma de los otros dos lados y la mitad del tercer lado.

2.2.2 Problemas de Igualdades

Ejemplo 4 ***(Olimpiada nacional 2007, final C)*** *Sean C y D puntos sobre un semicírculo con diámetro $\overline{AB}$ y centro S de manera que el punto C este sobre el arco AD y el $\measuredangle CSD$ sea recto. Considere los puntos E y F tales que E es la intersección entre las rectas $\overleftrightarrow{AC}$ y $\overleftrightarrow{BD}$, y F es la intersección entre las rectas $\overleftrightarrow{AD}$ y $\overleftrightarrow{BC}$. Pruebe que $EF = AB$.*

Solución: *Dado que la conclusión es una igualdad de dos medidas de segmentos, algunos posibles esquemas principales son:*

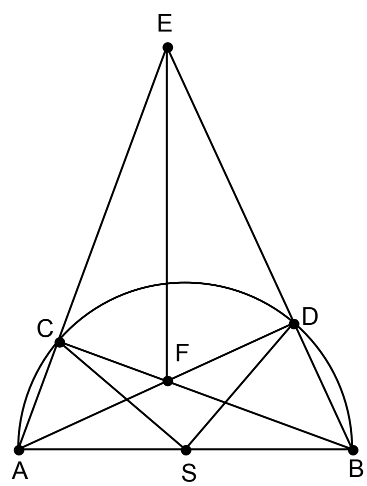
1) la congruencia de triángulos
2) medida de lados de triángulos isósceles

Realizando un dibujo se puede ver que la mejor opción es la #2 Así, como se quiere que $EF = AB$*, se deben buscar dos triángulos congruentes, uno con lado* EF *y otro lado* AB*. Recurriendo al dibujo como guía se puede suponer que los triángulos rectángulos* ΔFCE *y* ΔACB *son candidatos a ser congruentes.*

Para ello se debería cumplir que $AC = CF$*, cayendo en el mismo tipo de problema pero esta vez se elige la opción #2, así se debe probar que el* ΔACF *es rectángulo isósceles, lo cual se deduce de las hipótesis.*

Finalmente, para lograr la congruencia, se debe probar que $m\measuredangle EFC = m\measuredangle BAC$ *o que* $EC = BC$*. Eligiendo el primer camino, se extiende el segmento* EF *para obtener triángulos semejantes que permiten deducir la congruencia de ángulos.*

Veamos la demostración con detalle: Como C *y* D *están sobre el semicírculo entonces* $AD \perp BD$ *y* $BC \perp AC$



Note que F *es el ortocentro del* ΔABE*, entonces* $EF \perp AB$*. Como el ángulo central* $\measuredangle CSD$ *es recto entonces la medida del ángulo inscrito* $\measuredangle CAD$ *es* $45°$*, por lo tanto el* ΔACF *es rectángulo isósceles, así*

$$AC = CF \quad (1)$$

Por otro lado, sea C' *la intersección de las rectas* $\overleftrightarrow{EF}$ *y* $\overleftrightarrow{AB}$*, como*

$$m\measuredangle ECF = m\measuredangle BCA = 90° \quad (2)$$

note que $\Delta FCE \sim \Delta AC'E$ *por A.A. entonces*

$$m\measuredangle EFC = m\measuredangle BAC \qquad (3)$$

De $1, 2$ *y* 3*, por el criterio ALA se tiene que* $\Delta FCE \cong \Delta ACB$ *y por lo tanto*

$$EF = AB$$

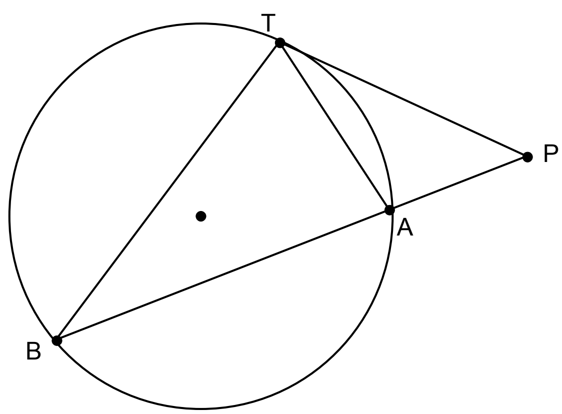
Otros problemas similares:

1. En el ΔABC sea M el punto medio de $\overline{BC}$ tal que $m\angle AMB = m\angle AMC$. Pruebe que $AB = BC$.

2. Considere el triángulo isósceles ΔABC $(AB = BC)$, sean D y E dos puntos tales que $A - D - B, B - E - C$ y $\overline{DE} \| \overline{AC}$. Pruebe que $DA = EC$.

2.2.3 Problemas de proporciones

Ejemplo 5 *En la figura, P es un punto exterior al círculo, con $\overleftrightarrow{PT}$ tangente al círculo en T. Muestre que $\dfrac{PA}{PT} = \dfrac{PT}{PB}$ (Sug. Trace las cuerdas $\overline{AT}$ y $\overline{BT}$).*



Solución: *Dado que la conclusión es una proporción de segmentos ¿Qué resultados sobre proporción de segmentos conoce? algunos posibles esquemas principales son:*

1) Semejanza de triángulos
2) áreas. Por ejemplo, recuerde que la razón del áreas de dos triángulos con igual altura es igual a la razón de sus bases

La opción 1 es la que mejor se adapta al problema. Dado que se quiere demostrar que $\dfrac{PA}{PT} = \dfrac{PT}{PB}$*, entonces se deben buscar o formar dos triángulos semejantes, el primero con dos lados de medida PA y PT; y el segundo con lados de medida PT y PB. Recurriendo al* *dibujo se intuye que estos triángulos son: ΔPTA y ΔPTB. Observe la demostración: Note que por idempotencia*

$$\measuredangle P = \measuredangle P \quad (1)$$

Dado que el $\measuredangle B$ es inscrito, el $\measuredangle PTA$ es semi-inscrito y estos ángulos subtienden el mismo arco, entonces

$$m\measuredangle B = \frac{m\overset{\frown}{TA}}{2} = m\measuredangle PTA \quad (2)$$

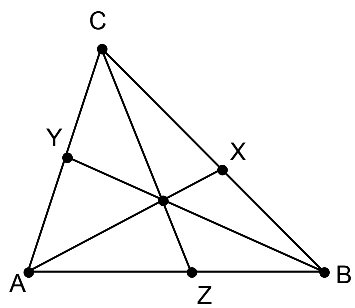
De 1 y 2, por el criterio AA se tiene que $\Delta PTA \sim \Delta PBT$ y por lo tanto

$$\frac{PA}{PT} = \frac{PT}{PB}$$

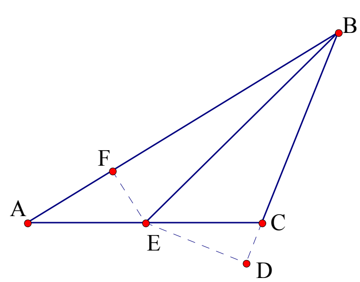
Otros problemas similares:

1. (Teorema de Ceva) Dado un ΔABC. Sean X, Y, Z puntos de los lados $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ y $\overline{AB}$ respectivamente. Si los tres segmentos $\overline{AX}$, $\overline{BY}$ y $\overline{CZ}$ son concurrentes, entonces

$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = 1$$



2. En la figura adjunta, E es el punto medio de $\overline{AC}$, $\overline{EF} \perp \overline{AB}$, $\overline{ED} \perp \overline{BD}$ y $B - C - D$.

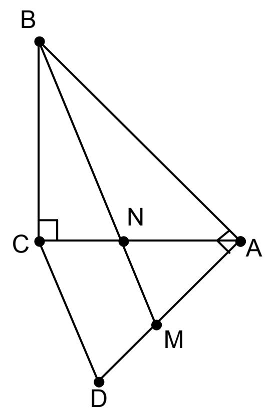


Pruebe $AB \cdot FE = ED \cdot BC$.

2.2.4 Problemas de rectas paralelas o perpendiculares

Ejemplo 6 *Sea* $.\overline{AD}\perp\overline{AB}$, *con* $\overline{AB}$ *la hipotenusa del* ΔABC *y* $AD = AC$. *Sea* BM *la bisectriz del* $\angle ABC$, *con* $A - M - D$, $A - N - C$ *y* $B - N - M$. *Pruebe que* $\overline{CD}$ *es paralelo a* $\overleftrightarrow{BM}$

Solución: *Dado que la conclusión es que dos rectas son paralelas, un posible esquema principal: congruencia de ángulos, esto incluye congruencias de triángulos, semejanza de triángulos, triángulos isósceles.*



Así, se debe probar que $\measuredangle CDA \cong \measuredangle NMA$. *Dado que el triángulo* CAD *es isósceles basta demostrar que el triángulo* MAN *es isósceles, es decir se debe probar que* $\measuredangle AMN \cong \measuredangle ANM$, *lo cual se deduce de la semejanza entre* ΔCBN *y* ΔABM.

Veamos la prueba: Note que B *es la bisectriz del* $\measuredangle CBA$ *entonces*

$$\measuredangle CBN \cong \measuredangle ABM.$$

Por el criterio A.A. se obtiene que los triángulos rectángulos CBN *y* ABM *son semejantes por lo tanto*

$$\measuredangle CNB \cong \measuredangle AMN,$$

como $\measuredangle CNB \cong \measuredangle MNA$, *por ser opuestos por el vértice, entonces*

$$\measuredangle MNA \cong \measuredangle AMN.$$

Por lo tanto, ΔMNA *es isósceles al igual que el* ΔABC, *y como comparten el ángulo desigual* $(\measuredangle A)$, *entonces*

$$\measuredangle CDA \cong \measuredangle NMA$$

De lo anterior, se concluye que $\overline{CD}$ *es paralelo a* $\overleftrightarrow{BM}$.

Otros problemas similares:

1. Sea .$\overline{AD} \perp \overline{AB}$, con $\overline{AB}$ la hipotenusa del ΔABC y $AD = AC$. Sea BM la bisectriz del $\angle ABC$, $B-N-A, \quad A-M-C \quad y \quad D-N-C$). Pruebe que $\overline{CD}$ es perpendicular a $\overleftrightarrow{BM}$.

2. En el ΔABC, la bisectriz del $\angle A$ interseca a $\overline{BC}$ en D, la mediatriz de $\overline{AD}$ interseca a $\overline{AC}$ en G. Demuestre que $\overline{GD} \| \overline{AB}$.

3 Consideraciones finales

Algunas observaciones que debe tener en cuenta el lector sobre el trabajo presentado son:

1. Lo expuesto no establece una manera de resolver problemas geométricos sino tomar en cuenta la conclusión para inicial la resolución del problema.

2. No siempre es posible hallar un esquema principal para resolver el problema, sobre todo en problemas "muy nuevos", donde es necesario la exploración.

3. En cada resolución de un problema hay un proceso de asimilación y acomodación de esquemas y se mejora o incrementa el repertorio de competencias del sujeto.

4 Bibiografía

1. Antibí, A. *Didáctica de las Matemáticas: Métodos de Resolución de problemas.* Serie Cabecar, Costa Rica (2000).

2. Brousseau, Guy .*Fundamentos y Métodos de la Didáctica de las Matemáticas, traducción de "Fondements et méthodes de la didactiques des mathématiques".* Revista Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol 7, n 2, pp.33-111 (1986).

3. Chevallard, Yves . *La Transposición Didáctica. Del saber sabio al saber enseñado.* Aique grupo Editor S.A., Argentina (1991).

4. Moise, Edwin. *Elementos de Geometría Superior.* Compañia Editorial Continental, S. A. México, (1968).

5. Verguard G. : La Théore des Champs Conceptuels. Revista Recherches en Didactique des Mathemátiques, vol 10, N^o 23, pp 133- 170 (1991)