DIFERENTES ENFOQUES TEÓRICOS DE INVESTIGAÇÃO SOBRE O ENSINO E APRENDIZAGEM DA DEMONSTRAÇÃO EM GEOMETRIA

Neto, T.

Universidade de Aveiro (Portugal)

Resumo

Neste texto, pretendo estabelecer ligações entre a perspectiva apresentada por Harel e Sowder (2007) e outras perspectivas teóricas de investigação, ligadas ao ensino e aprendizagem da demonstração em geometria. Especificamente, com a perpectiva apresentada no artigo "Proofs as bears of mathematical knowledge" (Hanna e Barbeau, 2008) e com a perspective ontosemiótica em educação matemática (Godino et al., 2007) na qual está focada a minha própria investigação. Harel e Sowder (2007) estabeleceram um grupo de questões relativas a vários factores: Factores de natureza histórica, epistemológica e matemática; factores de natureza cognitica e, factores de natureza educacional e sócio-culturais. Estabeleceram questões fundamentais, como por exemplo: O que é demonstrar?Porquê ensinar a demonstrar?(…)(p. 806). O significado destas questões será discutido segundo os enfoques teóricos acima referidos.

Abstract

In this paper I intent to establish connections between Harel and Sowder's work and other theoretical perspectives on teaching and learning proof in geometry. Specifically the work presented in paper" Proofs as bears of mathematical knowledge" (Hanna and Barbeau, 2008) and an onto-semiotic perspective in mathematics education (Godino et al., 2007), in which my own research is focused on. Harel and Sowder (2007) established a group of questions concerning several factors: Mathematical and historical-epistemological factors; cognitive factors; and instructional and socio-cultural factors. They established foundational questions, for instance: What is proof? Why teach proof?(…)(p. 806).The significance of these issues will be discussed according to the theoretical approaches mentioned above.

Palavras Chave: Geometria, Demonstração, Ensino e Aprendizagem, Ensino Básico e Secundário.

Key Words: Geometry, Proof, Learning and Teaching, Primary and Secondary School.

Neto, T. (2010). Diferentes enfoques teóricos de investigação sobre o ensino e aprendizagem da demonstração em geometria. En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, & T.A. Sierra, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 87-113). Lleida: SEIEM

Introdução

Este texto tem por objectivo explorar as relações entre a perspectiva teórica apresentada por Harel e Sowder (2007) "*Toward Comprehensive Perspectives on the Learning and Teaching of Proof*", a perpectiva ontosemiótica em educação matemática (Godino et al., 2007) e as ideias apresentadas no artigo "*Proofs as bearers of mathematical knowledge*" (Hanna e Barbeau, 2008). Acredito que existem fortes heurísticas teóricas a partir da visão conjunta destas perspectivas que ajudam a explicar questões fundamentais colocadas por Harel e Sowder, tais como: O que é demonstrar? Porquê ensinar a demonstrar? O exercício de resposta a estas questões, à luz das perspectivas mencionadas, poderá contribuir para um melhor entendimento sobre o papel da demonstração no ensino e aprendizagem da geometria.

O texto está dividido em três partes, a primeira parte apresenta argumentos em relação às questões acima colocadas, a segunda parte apresentada ferramentas teóricas complementares para a análise dos conhecimentos matemáticos postos em jogo na demonstração e, na terceira parte são apresentados estudos de caso, com o objectivo de ilustar como as abordagens de investigação apresentadas, na primeira parte, se podem complementar e contribuir para uma perspectiva abrangente da investigação sobre o ensino e aprendizagem da demonstração num contexto de geometria.

Questões fundamentais

O que é demonstrar?

O trabalho de Harel and Sowder *"Toward Comprehensive Perspectives on the Learning and Teaching of Proof*" constante na publicação, Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning (2007, pp. 805-842), tem interessantes implicações para a investigação no ensino e aprendizagem da demonstração. Estes investigadores referem que, para se dar resposta à questão" o que é demonstrar?" deve ter-se em conta: -O aluno como aprendente, ou seja, os aspectos cognitivos envolvidos no desenvolvimento do conceito de demonstração, porque a construção de novos conhecimentos é formada pelo conhecimento existente sobre este aspecto;

-A manutenção da integridade do conceito de demonstração como foi entendida e praticada ao longo da história da matemática;

-A natureza social do processo de demonstrar.

Eles apresentam uma perspectiva abrangente, incorporando factores relativos, à matemática, a aspectos histórico-epistemológicos, a aspectos cognitivos e a aspectos ligados ao ensino. O conceito de "esquema de demonstração" é apresentado como elemento unificador e organizador desta perspectiva.

O conceito de "esquema de demonstração"

A perspectiva apresentada, por estes investigadores, desenvolveu-se ao longo de uma década de investigações teóricas e empíricas sobre as concepções dos alunos sobre a demonstração matemática. O elemento essencial desta abordagem é o conceito de "esquema de demonstração".

A definição de "esquema de demonstração" apoia-se em três definições:

1. *Conjectura versus facto*. Uma afirmação pode ser concebida por um indivíduo, quer como uma conjectura quer como um facto: Um indivíduo estabelece uma conjectura quando faz uma afirmação cuja verdade é incerta; a afirmação deixa de ser uma conjectura e torna-se um facto quando, para esse indivíduo, se torna verdadeira.

2. *Demonstrar*. É o processo utilizado por um indivíduo (ou uma comunidade) para remover dúvidas sobre a verdade de uma afirmação.

Este processo engloba dois sub-processos – *verificar* e *convencer.*

3. *Verificar versus convencer*. Verificar é o processo que um indivíduo (ou uma comunidade) emprega para remover a sua (ou suas) próprias dúvidas sobre a verdade de uma afirmação. Convencer, persuadir, é o processo que um indivíduo (ou comunidade) emprega para remover as dúvidas dos outros sobre a verdade de uma afirmação.

Estes investigadores, afirmam que Matemática com "sentido", não significa apenas que um indívíduo verifica para si que o tópico/procedimento faz sentido, mas também deve ser capaz de convencer outros através da explicação e justificação da sua ou suas conclusões. Este aspecto de convencer os outros, persuadir, constitui a dimensão pública da demonstração e é uma prática social não só para matemáticos, mas também para quem estuda matemática. Assim, persuadir e convencer são processos subjectivos e demonstrar pode variar de indivíduo para indivíduo, de contexto para contexto, de civilização para civilização e, dentro da mesma civilização, de geração para geração.

4. *Esquema de demonstração*. O esquema de demonstração de uma pessoa (ou comunidade) consiste no que constitui verificar e persuadir para essa pessoa (ou comunidade) (pp.808-809).

Recio e Godino (2001) apresentaram um estudo, realizado com alunos no início de estudos na Universidade de Córdova (Espanha), sobre os esquemas de demonstração utilizados em diferentes contextos institucionais (vida real, ciências experimentais, área profissional de matemática, na lógica e fundamentos da matemática) estabelecendo uma relação entre os esquemas de demonstração apresentados e os significados institucionais, das instituições às quais os alunos pertenciam. Esta relação mostrou que: "i) os esquemas pessoais podem ser influenciados pelo significado da demonstração nas instituições às quais os alunos pertencem, e adicionalmente ii) os significados institucionais da demonstração matemática emergem dos esquemas pessoais que prevalecem nestas instituições" (p.96). O referido estudo, proporciona um suporte adicional ao ponto de vista apresentado por Harel and Sowder, nomeadamente no que se refere ao "esquema de demonstração", como podemos constactar na segunda parte.

Para Harel e Sowder a definição de esquema de demonstração está intencionalmente centrada no aluno e, de acordo com esta definição, apresentam a seguinte taxonomia de esquemas de demonstração, organizada em três classes: a classe de esquemas de demonstração de convicção externa, a classe de esquemas de demonstração empírica, e a classe de esquemas de demonstração dedutiva. Esta taxonomia estabelece relações com outras taxonomias.

Assim, as primeiras taxonomias foram elaboradas por Bell (1976). Este investigador classificou as justificações dos alunos consoante estes usavam exemplos, *justificações empíricas,* ou raciocínios dedutivos para demonstrar o que pretendiam, *justificações dedutivas.* Dividiu, ainda, as justificações empíricas e dedutivas em várias categorias consoante estas estivessem mais ou menos completas.

Balacheff (1987), deu também muita importância ao facto dos alunos recorrerem ou não a exemplos nas suas justificações. As justificações que envolviam o uso de exemplos também eram classificadas consoante os critérios usados na selecção desses mesmos exemplos. Apresentou a seguinte categorização para a classificação de uma justificação:

- *Pragmática*: Baseada em exemplos, ou em acções ou em ilustrações. Esta categoria inclui três tipos de argumentação; *Empírica naíve* – a afirmação a ser demonstraçãoda é testada nalguns exemplos; Experiência *crucial* - a afirmação é testada com exemplos cuidadosamente seleccionados; *Exemplo genérico* – em que a justificação é baseada em operações ou transformações num exemplo seleccionado como sendo o representante de uma classe.

- *Conceptual*: Baseada na formulação de propriedades e de relações entre elas. Esta categoria inclui *experiência pensada*, em que as acções são interiorizadas e dissociadas dos exemplos específicos considerados e *cálculo simbólico*, em que não existe experimentação e a justificação é baseada na utilização de expressões simbólicas formalizadas.

Harel e Sowder (1998) não atribuíram tanta importância ao uso e à escolha dos exemplos mas sim à forma como os alunos elaboravam a sua justificação e aos raciocínios que utilizavam.

Marrades e Gutiérrez (2000) basearam-se nestes estudos e em Balacheff (1987) e apresentaram uma estrutura analítica das justificações dos alunos, que contempla o tipo de justificações produzidas pelos alunos e a passagem entre métodos de dedução empírica e dedutiva.

Estes investigadores diferenciam duas categorias principais de justificações: as *justificações empíricas* e as *justificações dedutivas.*

As *justificações empíricas* são caracterizadas pelo uso de exemplos como principal (e talvez único) elemento de convicção. Os alunos elaboram conjecturas depois de terem observado regularidades num ou em mais exemplos; usam os exemplos ou as relações observadas entre eles para justificar a verdade da sua conjectura. Dentro das *justificações empíricas* distinguem-se três classes dependendo do modo como os exemplos são seleccionados.

a) **Empirísmo simples**, quando a conjectura é justificada mostrando que é verdadeira num ou em vários exemplos, normalmente seleccionados sem um critério específico. A verificação pode envolver:- Somente percepção visual ou táctil – *tipo perceptual*; - O uso de exemplos matemáticos ou as relações encontradas nos exemplos – *tipo indutivo.*

b) **Experimentação crucial**, quando a conjectura é justificada mostrando que é verdade num exemplo específico, cuidadosamente seleccionado. Os alunos estão conscientes da necessidade de generalização, por isso, escolhem o exemplo não particular mas possível. Eles partem do princípio que a conjectura é sempre verdadeira se for verdadeira no exemplo. Distinguem-se vários tipos de justificações por experimentação crucial, dependendo do modo como o exemplo crucial é usado; *Baseada em exemplos*, quando a justificação só mostra a existência de um exemplo ou a falta de contra - exemplos; *Construtiva*, quando as justificações se focam na maneira de obter o exemplo; *Analítica*, quando a justificação é baseada em propriedades observadas empiricamente no exemplo ou em elementos auxiliares; *Intelectual*, quando a justificação é baseada na observação empírica do exemplo, mas usa principalmente propriedades aceites ou relações entre elementos do exemplo.

c) **Exemplo genérico**, quando a justificação é baseada num exemplo específico, representativo da sua classe. Esta refere-se a propriedades abstractas e aos elementos de uma família, mas é claramente baseada no exemplo. Nas descrições de como o exemplo genérico é usado na justificação estão também presentes os quatro tipos de justificações definidas para a experimentação crucial: *Baseada em exemplos; Construtiva*; *Analítica*; *Intelectual*.

As *justificações dedutivas* são caracterizadas pela não contextualização dos argumentos usados, baseadas em aspectos genéricos do problema, operações mentais e deduções lógicas. Os exemplos, quando usados, são uma ajuda para organizar argumentos, mas as características particulares de um exemplo não são consideradas na justificação. Dentro das *justificações dedutivas* distinguem-se duas classes, principais.

a) **Experimentação pensada**, quando um exemplo específico é usado para ajudar a organizar as justificações. Podemos encontrar dois tipos de experimentações pensadas, dependendo do estilo da justificação: As *justificações transformativas*, baseiam-se em operações mentais que produzem uma transformação do problema inicial noutro equivalente. O papel dos exemplos é ajudar a prever que transformações são convenientes. As transformações podem ser baseadas em imagens mentais espaciais, manipulações simbólicas ou construção de objectos; As *justificações estruturais* são sequências de deduções lógicas que derivam do conjunto de dados do problema, de axiomas, de definições ou de teoremas aceites. O papel dos exemplos é ajudar a organizar os passos de dedução.

b) **Dedução formal**, quando a justificação é baseada em operações mentais, sem a ajuda de exemplos específicos. Numa dedução formal só os aspectos genéricos do problema são mencionados. É, por isso, o tipo de demonstração matemática formal, que se encontra no mundo dos investigadores matemáticos. Na dedução formal também podemos encontrar os dois tipos de justificações, já definidas para a experimentação pensada: *justificações transformativas*; *justificações estruturais.*

Para além de classificar as respostas dos alunos, esta estrutura é igualmente útil para avaliar a mudança de capacidades dos alunos para produzir justificações, num determinado período de aprendizagem.

Os mesmos investigadores referem que, durante a resolução de um problema, muitos alunos começam por usar uma verificação empírica e quando percebem o problema e a maneira de justificar a hipótese passam para uma justificação dedutiva. É também usual fazerem vários "saltos" entre métodos dedutivos e empíricos durante a resolução de um problema.

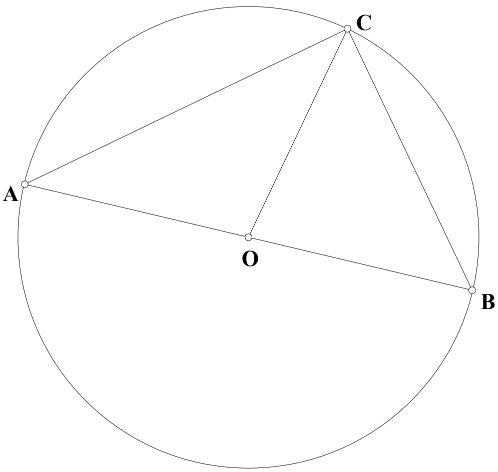
Porquê ensinar a demonstrar?

Hanna e Bardieu (2008) no artigo sob o título "*Proofs as bears of mathematical education*" abordam a questão "*Porque é que demonstramos teoremas*?" e a resposta apresentada é a de Rav "*A essência da matemática reside na invenção de métodos, heurísticas, estratégias e conceitos para resolver problemas"* (p.345).

Estes investigadores, no referido artigo, argumentam o significado da tese de Rav para a educação matemática através da apresentação de estudos de caso. Os estudos apresentados fundamentam a importância da demonstração para além do estabelecimento da verdade matemática. Ou seja, a demonstração de um teorema envolve estratégias, métodos, heurísticas e conceitos que se podem transpor para outras situações.

Analisemos, por exemplo, o estudo de caso relativo ao enunciado, "Um ângulo inscrito num semicircunferência é um ângulo recto". A demonstração deste enunciado envolve diferentes propriedades, consoante a natureza de abordagem adoptada.

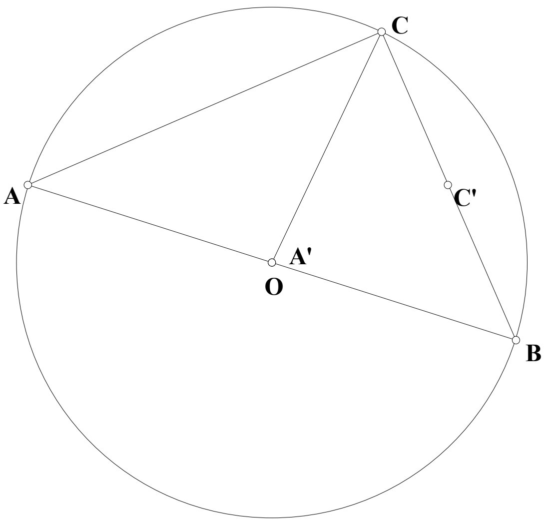
O primeiro argumento apresentado, segundo uma abordagem sintética (ver Fig. 1), envolve os seguintes resultados: o centro de um círculo bissecta o diâmetro; teorema relativo a triângulo isósceles; a soma dos ângulos internos de um triângulo é um ângulo raso.



Sendo O o centro do cìrculo, AO, OB e OC são geometricamente iguais e temos ângulos iguais em triângulos isósceles (os ângulos CAO e ACO são iguais, assim como os ângulos OCB e CBO), podemos concluir que o ângulo ACB é a soma dos ângulos CAO e CBO, e igual a 90^0.

FIG.1 - ÂNGULO INSCRITO NUM SEMI-CÍRCULO

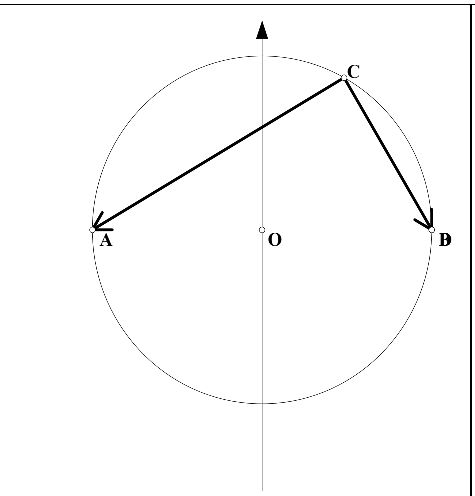
Um outro argumento apresentado (ver Fig 2), envolve uma transformação geométrica (dilatação de centro em B e razão 1/2). Esta abordagem, recorre a conhecimento matemático que vai além do raciocínio dedutivo.



A dilatação de centro em B e razão ½ transforma C em C´(ponto médio da corda CB) e A em A´.Sendo C´o ponto médio da corda CB significa que a recta OC´ é a mediatriz da corda CB (visto que COB é um triângulo isósceles). Donde OC' é perpendicular a CB. Revertendo a dilatação realizada e sabendo que a amplitude dos ângulos é preservada, AC é perpendicular a CB e demonstraçãomos o resultado enunciado.

FIG.2 - DILATAÇÃO DE CENTRO EM B E RAZÃO ½

De seguida apresentamos mais uma das várias abordagens apresentadas pelos referidos investigadores: abordagem analítica (ver Fig. 3). No plano cartesiano, a circunferência pode ser definida por uma equação e a condição de perpendicularidade de duas rectas envolve o produto escalar dos seus vectores directores.



Sendo A(-1,0), B(1,0) e C(x, y) e $x^2+y^2=1$ a equação que define a circunferência de centro (0,0) e raio 1. Sejam os vectores,

(A-C)=(-1-x,-y)

(B-C)=(1-x,-y)

O produto escalar

$(A-C).(B-C)=-1+x^2+y^2=0$

Podemos concluir que as rectas AC e BC são perpendiculares.

FIG.3 ARGUMENTAÇÃO VECTORIAL

O estudo de caso apresentado, permitiu a constatação de experiências diversificadas em termos de, métodos, estratégias, heurísticas e conceitos. Este tipo de experiências pode promover nos alunos um entendimento muito mais rico da matemática.

Hanna e Bardieu, no mesmo artigo, e sintetizando uma diversidade de casos, referem que, a adopção deste tipo de abordagens não muda de forma alguma a definição de demonstração “Euclidiana”, mas mostra que o ensino e a aprendizagem da demonstração tem, também, o potencial de mostrar aos alunos elementos importantes do conhecimento matemático e dar-lhes uma visão mais abrangente da natureza da matemática.

Mariotti (2006) parece reiterar as ideias apresentadas ao afirmar que "a demonstração tem claramente como finalidade confirmar a verdade de uma afirmação, verificando a correcção lógica dos argumentos matemáticos. No entanto, ao mesmo tempo a demonstração contribui, de forma mais ampla, para a construção de conhecimento" (p.195). Além deste aspecto, esta investigadora, refere que a demonstração tem um papel relevante no desenvolvimento de normas socio-matemáticas na sala de aula, referindo-se à "negociação" de argumentos matemáticos. Citando Yackel, escreve: "[…] the understanding that students are expected to explain their solutions is a social norm, whereas the understanding of what counts as an acceptable mathematical explanation is a socio-mathematical norm" (p.189).

Sobre o contexto em que as demonstraçãos são realizadas, a demonstração em ambientes de geometria dinâmica (Dynamic Geometry Environments -DGEs) tem tido um enfoque relevante na última década, ao nível da investigação. Um número considerável de investigadores tem-se centrado na natureza da argumentação e no tipo de demonstração (e.g. Harel e Sowder, 2007; Marrades e Gutiérrez 2000).

Gutiérrez (2005) apresenta uma análise sobre o papel dos ambientes de geometria dinâmica no ensino e aprendizagem da demonstração. Esta análise ilustra que existem importantes razões para adoptar esta abordagem, como por exemplo, "sobre os cenários produzidos em ambiente de geometria dinâmica,, os argumentos são elaborados para explicar o que é observado e para o estabelecimento de novas propriedades" (p.43).

Ferramentas teóricas complementares para a análise dos conhecimentos matemáticos postos em jogo na demonstração

Uma perspectiva Ontosemiótica da educação matemática é um referencial teórico que adopta pressupostos de natureza semiótica e antropológica, ao nível da matemática, e de natureza interaccionista e socio-construtivista, ao nível do estudo dos processos de ensino e de aprendizagem (Godino, Batanero, e Font, 2009). Assim, revela-se uma ferramenta teórica para descrever e compreender práticas de demonstração, em sala de aula, na sua dupla versão, pessoal e institucional.

Neste momento, o conjunto de noções teóricas que compõem esta abordagem é constituído por cinco grupos – *Adequação Didáctica, Dimensão Normativa, Trajectória Didáctica, Configurações de Objectos e Processos, e Sistema de Práticas* - cada um deles relativo a determinado nível específico de análise para os processos de ensino e aprendizagem de temas matemáticos.

Relativamente ao grupo, *Configurações de Objectos e Processos,* Godino e colaboradores referem que para uma análise mais fina da actividade matemática é necessário ter em consideração seis tipos de entidades primárias: *Situação-problema*; *Linguagem* (e.g., termos, expressões, notações, gráficos) nos seus diversos registos (e.g., escrito, oral, gestual); *Conceitos* (abordados através de definições ou descrições); *Proposições* (enunciados sobre conceitos); *Procedimentos* (e.g., algoritmos, operações, técnicas de cálculo); *Argumentos* (enunciados utilizados para validar ou explicar as proposições e procedimentos, de natureza dedutiva ou de outro tipo). Estes seis objectos relacionam-se formando configurações epistémicas (redes de objectos institucionais) e cognitivas (redes de objectos pessoais). A consideração de uma entidade como primária não é uma questão absoluta mas sim relativa, visto que se tratam de entidades funcionais em contextos de uso. Os sistemas de práticas e as configurações são propostas pelos mesmos investigadores, como ferramentas teóricas para descrever os conhecimentos na sua dupla versão: pessoal e institucional.

Os atributos contextuais apontados por estes investigadores são: *Pessoal/institucional* – A *cognição pessoal* é o resultado do pensamento e da acção do sujeito individual confrontado com uma classe de problemas, enquanto que a *cognição institucional* é o resultado do diálogo, do entendimento e da regulação no seio de um grupo de indivíduos que formam uma comunidade de práticas; *Ostensivo/não ostensivo* - O atributo ostensivo refere-se à representação de um objecto não ostensivo, isto é de um objecto que não se pode mostrar a outro. A classificação entre ostensivo e não-ostensivo depende dos contextos de uso. Diagrama, gráficos, símbolos são exemplos de objectos com atributos ostensivos, cubos perfurados e secções planas de poliedros são exemplos de objectos com atributos não-ostensivos; *Expressão/ conteúdo* (antecedente e consequente de qualquer função semiótica) – A relação estabelece-se por meio de funções semióticas, entendidas como uma relação entre um antecedente (*expressão*, designação ou nome) e um consequente (*conteúdo*, designado ou ente matemático) estabelecida por um sujeito (pessoa ou instituição) de acordo com determinado critério ou código de correspondência; *Extensivo/intensivo* (particular/geral) - Esta dualidade utiliza-se para explicar uma das características básicas da actividade matemática, ou seja, a generalização. Esta dualidade permite centrar a atenção na dialéctica entre o particular e o geral, que sem dúvida é uma questão chave na construção e aplicação do conhecimento matemático; *Unitário /sistémico* - Em certas circunstâncias os objectos matemáticos participam como entidades unitárias noutras estes devem ser tomados como decomposição de outros para que se possa proceder ao seu estudo.

Estas facetas são apresentadas agrupadas em duplas que se complementam de maneira dialéctica. São consideradas como atributos aplicáveis aos distintos objectos primários e secundários, dando lugar a distintas "versões" dos referidos objectos através dos seguintes *processos cognitivos/ epistémicos:*

- Institucionalização – personalização.
- Generalização – particularização.
- Análise/decomposição - síntese/reedificação.
- Materialização/concretização - idealização/abstracção.

- Expressão/representação - significação.

Os contextos onde as práticas de demonstração têm lugar devem merecer uma atenção especial ao nível da investigação em educação matemática. Tall e Ramos (2009) afirmaram que: "[…] A demonstração como prática de seres humanos, mesmo de matemáticos, é uma construção humana com ideias fortes e fraquezas na sua construção. Na prática, não se trata de ser "tudo ou nada", mas tem por base, de forma explícita ou implícita, o "fundamento da verdade" que carrega uma medida de incerteza que varia entre indivíduos e entre as maneiras como as demonstrações são contextualizadas".

Estudos de caso

Os estudos de caso, a seguir apresentados fazem parte da investigação, realizada no âmbito do meu trabalho de doutoramento sob o título"O Desenvolvimento do Raciocínio Dedutivo ao Nível do Ensino Secundário: Recurso a Geometrias Planas".

O objectivo deste trabalho era promover o desenvolvimento do raciocínio dedutivo e uma visão mais alargada do conhecimento matemático, com base em sistemas axiomáticos distintos do sistema de Euclides.

A investigação realizada consistiu na implementação, em sala de aula, de uma pasta de tarefas de geometria plana com o objectivo de gerar algum entendimento sobre a seguinte questão: De que forma é que o recurso a outros modelos de geometria Plana, distintos da geometria Euclidiana, pode ajudar alunos do ensino secundário a desenvolver o raciocínio dedutivo?

Dois níveis de realização foram configurados para este trabalho. O primeiro decorreu num ambiente de sala de aula com uma turma de 20 alunos (15-16 anos de idade) do10º ano de escolaridade (1º ano do ensino secundário) da área de Económico-Social e no ano lectivo de 2004/2005. Nesta fase do estudo, principalmente no 1º período lectivo, foram desenvolvidas com a turma, situações problema, envolvendo o recurso a ambientes de geometria dinâmica e a modelos diversificados de geometria plana. A abordagem de modelos de geometria, distintos do modelo Euclidiano, foi feita através do recurso a artefactos (instrumento de percussão, esfera de acrílico, balões de borracha,…) e scripts do GSP. Assim, foi proposta à turma o manuseamento de objectos físicos cuja superfície envolvente apresentava diferentes curvaturas e a visualização de linhas nessas superfícies. A exploração no GSP do semi-plano de Poincaré, recorrendo ao script hy_line.gss permitiu a representação de várias linhas hiperbólicas. De seguida, explorou-se o axioma das paralelas, recorrendo ao GSP e ao programa Cinderella. Foi feita referência histórica ao trabalho de Lobachevsky e ao trabalho de Riemann, com ilustrações constantes quer em manuais escolares do 10 º ano de escolaridade quer em cenários de computador.

O segundo nível foi desenvolvido extra-sala de aula em sessões de pequenos grupos de trabalho ao mesmo tempo que decorria a aula de matemática na turma. Nesta fase procedeu-se ao estudo das trajectórias cognitivas individuais de duas alunas (16 anos de idade) da turma mencionada, durante o seu 11º ano (2º ano do ensino secundário) no ano lectivo 2005/2006. O enfoque era a natureza das justificações destas alunas, quando confrontadas com problemas em vários modelos de geometria plana.

A análise da forma como estas alunas elaboraram as justificações é feita segundo a estrutura analítica descrita por Marrades e Gutiérrez (2000) e baseada num enfoque ontosemiótico da educação matemática desenvolvido por Godino et al. (2006).

O contexto oferecido por outros modelos da geometria plana, diferente do modelo de Euclides, no significado de conceitos (e.g., conceito de paralelismo) e os métodos utilizados na elaboração de justificações, revelaram-se importantes para aspectos cognitivos da demonstração.

Caso I

Este caso apresenta a configuração e trajectória cognitiva das duas alunas em relação ao seguinte problema:

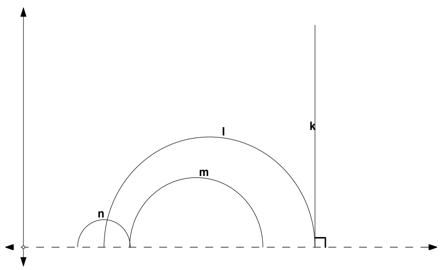
Problema. *Na figura seguinte estão representadas várias linhas hiperbólicas (l,m,n, e k) no Semi-Plano de Poincaré, definidas, respectivamente, pelas condições:*

$l: (x - 7)^2 + y^2 = 16 \wedge y > 0$

$m: (x - 6,5)^2 + y^2 = 6,25 \wedge y > 0$

$n: (x - 3)^2 + y^2 = 1 \wedge y > 0$

$k: x = 11 \wedge y > 0$



Indica, caso existam, duas linhas paralelas e duas não paralelas. Justifica.

Após a leitura e análise da figura dada no enunciado ocorreu o seguinte diálogo:

X. Professora a definição de paralelas é a mesma?

Professora: Sim a definição é a mesma.

X. Então, duas linhas por mais que se prolonguem nunca se intersectam.

Y. Estas não são paralelas (referindo-se a l e a n).

X. Mas estas duas são (referindo-se a l e a m).

Y. Mas não são paralelas…

X. Como é que tu sabes?

Y. Oh dá para ver…a distância daqui aqui e daqui aqui…(referindo-se à distância Euclidiana entre as duas semi-circunferências, representativas das linhas hiperbólicas em causa).

X. Mas a distância não tem que ser a mesma.

Y. Tem, quando são paralelas esta distância daqui aqui é sempre igual à daqui aqui e daqui aqui… (apontando as linhas l e m). Não é?

Alunas em silêncio a observarem a figura. A aluna Y identificou o valor do raio nas linhas hiperbólicas l, m e n e efectuou o seu registo ao lado da figura.

Y. Oh Professora eu tenho uma dúvida. É duas linhas ou duas rectas?

Professora: Duas linhas. Já tínhamos visto que na geometria hiperbólica falamos em linhas.

Y. Só que estas não se intersectam mas também não são paralelas… (referindo-se a l e a m) a distância que vai daqui aqui não é a mesma daqui aqui.

Professora: Porque é que dizes que não são paralelas?

Y. Porque a distância que vai daqui aqui não é a mesma que daqui aqui.

Professora: Estás a pensar na geometria Euclidiana?

Y. Ah! Então podem ser paralelas…

X. Duas paralelas são o l e o m (…) e duas que não são paralelas são, pode ser o l e o k (…) o k também pode ser paralela a m e paralela a n, nesta geometria.

Y. Aqui pede duas.

Após a fase de análise da situação-problema o grupo centrou-se na elaboração de uma justificação escrita e registou-se o seguinte diálogo:

X. Só vais dar um exemplo…

Y. Sim…

X. Eu acho que primeiro temos que dar as mais óbvias e depois vamos tentar ter outras interpretações…(As coordenadas dos centros) Os centros são sete, zero e seis e meio, zero…e se tu vires está certo.

Nesta altura, a professora pediu às alunas para explicarem o raciocínio e pediu a leitura das respectivas soluções.

X. Na geometria de Poincaré sendo a definição de paralelismo a mesma da geometria Euclidiana, podemos verificar que m e l são paralelas, pois estas linhas nunca se intersectam e l e n são não paralelas pois intersectam-se num ponto.

Y. Duas linhas dizem-se paralelas em qualquer geometria quando a sua intersecção é o conjunto vazio. Então m é paralela a l e l não é paralela a n.

Professora: Parece que consideram que m e l são paralelas e que m, n e l, k e l, n não são paralelas. Porquê?

X. Por a imagem…

Professora: E não se pode apresentar um argumento mais convincente?

X. Podemos…falta-nos é saber como (riu-se);

Professora: Na geometria analítica quando querias determinar a intersecção, de por exemplo, as rectas de equação y igual a dois x mais quatro e y igual a menos x mais dois, como é que fazias?

X. Fazíamos o sistema e tínhamos o ponto…

De seguida, as alunas passaram a adoptar uma abordagem analítica para justificarem a resposta apresentada. Quando a aluna X determinou o ponto de intersecção das linhas l e k gerou-se o seguinte diálogo.

X. Professora isto dá um ponto muito esquisito…eu devo ter isto mal!

Professora: E porque é que é esquisito?

X. Então porque dá onze, zero …

Professora: E porque é que é esquisito?

X. Porque os onze devia ser lá mais para cima (aluna riu-se).

Y. Não, onze são o x.

X. Ai pois é! Ok estava a ver isto ao contrário.

Professora: Então já é aceitável?

Y. É ...

X. Não.

Y. É ...onze é.

X. Está bem…mas o y tem que ser maior do que zero não pode ser zero.

Y. Mas Intersectam-se num ponto…

X. Tá bem…mas não é válido porque o y tem que ser maior do que zero.

Professora: Então o que concluem?

X e Y Então as únicas aqui que são paralelas é a l com a m.

Y. (As linhas) m e n também são não paralelas porque se intersectam no ponto dois, zero.

Após a resolução de dois sistemas de duas equações a duas incógnitas registou-se o seguinte diálogo:

Y. Essa definição de paralelismo, quando a gente diz por mais que se prolonguem está errada para as circunferências, porque olha estas;

X. Eu estou a perceber o que estás a dizer…;

Y. Não temos que dizer por mais que se prolonguem. […]

X. (As linhas) l e n são as únicas que não se intersectam.

Observe-se que, na conclusão, a aluna X utiliza a designação de rectas e não de linhas, segue a definição de paralelismo associada a existência de intersecção e já não associa o paralelismo à expressão inicial "[...] por mais que se prologuem, nunca se encontram […]".

Quanto aos procedimentos adoptados, a opção da aluna X pela via algébrica é notória. Apesar desta aluna visualizar o ponto B, de intersecção das linhas m e n, resolve um sistema e indica as coordenadas, com valores aproximados às centésimas, desse ponto. A algebrização do problema *ajudou* a clarificar eventuais dúvidas sobre o paralelismo de algumas linhas. Parece-nos que a visualização da figura não induziu raciocínios erróneos.

A justificação apresentada *fundamenta-se* nos procedimentos anteriores e foi de natureza dedutiva, onde os exemplos específicos foram utilizados para apoiar a organização das justificações – *experimentação pensada.*

A **aluna Y** utilizou as linguagens - gráfica e algébrica - como **ajuda** para identificar linhas paralelas e não paralelas. A figura dada no enunciado constitui uma **ajuda** para se identificar linhas paralelas e não paralelas.

A situação colocada tinha como objectivo potenciar a visualização e valorizar o papel da definição de semi-plano de Poincaré na justificação da indicação de linhas paralelas e de linhas não paralelas.

A linguagem algébrica **ajuda** a clarificar eventuais dúvidas sobre o paralelismo de algumas linhas. Por exemplo das linhas l e k.

O problema *motivou*, ainda, a abordagem de, conceitos/definições, propriedades/proposições (e.g., definição de linhas paralelas numa geometria abstracta, …). A justificação foi do tipo conceptual, **fundamentada** nas definições de, Semi-Plano de Poincaré e de linhas paralelas.

A visualização, na *fase* ascendente da resolução do problema, proporcionou a intuição de algumas linhas paralelas (e.g., n e m) que na realidade não o eram. De facto, através da visualização, as relações de paralelismo entre as linhas dadas no enunciado do problema não foi intuitiva, não foi evidente e foram aceites com base na realização de uma verificação mais formal (recurso a resolução de sistemas, recurso à definição de Semi-Plano de Poincaré, …). De seguida, ir-se-á continuar a análise da solução do problema centrando-nos nos argumentos e aplicando os atributos contextuais à sua análise.

Ostensivo – não-ostensivo: Na solução apresentada pela aluna X, observa-se que utilizou os pontos A e B para assinalar, respectivamente, a intersecção das linhas l, n e m, n. No entanto, parece-nos que a aluna sentiu necessidade de determinar as coordenadas dos pontos, mesmo do ponto B, para reconhecer o não-ostensivo (linhas não paralelas e linhas paralelas) representado na situação.

Assim, os objectos ostensivos mobilizados na apresentação da solução do problema foram a representação dos pontos A e B na figura dada no enunciado e os sistemas das respectivas condições que definem as linhas hiperbólicas em causa.

A aluna Y, na argumentação apresentada, utilizou: a notação "//" (ostensivo) para se referir à relação de paralelismo (não-ostensivo) entre linhas; a linguagem algébrica, na resolução de sistemas de duas equações a duas incógnitas e utiliza o símbolo $\Rightarrow$ (*se…então…)* a ligar frases, como por exemplo, "*l não é paralela a n* $\Rightarrow$ *Intersectam-se no ponto", "l é paralela a m* $\Rightarrow$ *não se intersectam"*.

Extensivo – intensivo: A aluna X utilizou a condição que define uma circunferência de centro dado, o ponto C de coordenadas (a,b), e raio r para suporte à identificação dos centros das semi-circunferências, ou seja, das linhas hiperbólicas representadas nas figuras. A definição dada no início "*Paralelismo – quando duas linhas, por mais que se prolonguem, nunca se intersectam."* é adoptada pela aluna para a geometria hiperbólica, que ela designa de *geometria de Poincaré.* No entanto, na solução do problema, apenas se reporta à existência ou não de intersecção.

Na argumentação apresentada, a aluna Y começou por escrever: *Duas linhas dizem-se paralelas (em qualquer geometria) quando a sua intersecção é o conjunto vazio*. Ou seja, pensou na definição de linhas paralelas e de seguida é que se focou nos objectos extensivos representados no enunciado do problema.

Unitário – sistémico: Durante o processo de resolução do problema, as alunas seguem uma trajectória que vai desde a análise da situação colocada até a uma síntese da actividade desenvolvida. A análise elaborada pelas duas alunas apresenta aspectos diferentes. A aluna X sente necessidade de *decompor* o enunciado, registando as coordenadas dos centros das semi-circunferências (linhas hiperbólicas) e os pontos de intersecção das linhas l, n e m, n. A aluna Y, ao *decompor* o enunciado, regista o valor dos raios das referidas semi-circunferências e foca-se na distância entre elas.

Quanto à síntese apresentada pelas duas alunas, esta é apresentada na conclusão da solução elaborada. No caso da aluna X, ela refere as únicas "rectas" que não são paralelas e de seguida faz a afirmação "*Todas as outras são// entre si pois nunca se intersectam uma vez que y=0 não pertence ao semiplano".* No caso da aluna Y, a conclusão inclui a referência à relação de paralelismo entre as linhas duas a duas.

Expressão - conteúdo: A situação-problema serve de motivação (induz), ao nível do conteúdo, a definição de linhas paralelas num contexto de geometria hiperbólica. As alunas revelaram domínio de cálculo algébrico, nomeadamente na resolução de sistemas de duas equações com duas incógnitas. Ao nível do domínio da linguagem, a aluna X referiu a designação "rectas" quando não se tratava de rectas. Parece que ao nível da linguagem, esta aluna ainda não domina algumas questões de linguagem da geometria hiperbólica.

Adoptando a categorização de Balacheff mencionada por Gutiérrez e Marrades (2000), a justificação que elas apresentam é de natureza *Conceptual (deductiva)*– baseada na definição de linhas paralelas na geometria abstracta (exemplo de uma geometria abstracta), formulação de propriedades (propriedades da relação de paralelismo) e no cálculo algébrico (cálculo *simbólico*). No *cálculo simbólico*, não existe experimentação e a justificação é baseada na resolução de sistemas de duas equações a duas incógnitas, na utilização de expressões simbólicas formalizadas.

Caso II

O problema apresentado no caso II, recorre à definição de distância entre dois pontos no modelo da geometria do Motorista de Táxi e envolve a representação pictórica da circunferência neste modelo de geometria plana (novidade para as alunas). De seguida, apresentam-se as soluções de duas alunas e a análise dos objectos matemáticos envolvidos.

Problem: *Considera uma Geometria, no plano, em que os pontos e as linhas têm as mesmas propriedades da Geometria Euclidiana Plana, mas a definição de distância entre dois pontos P ($x_{1,}$ y_1) e Q (x_2, y_2) é dada por*

$$d_t = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|.$$

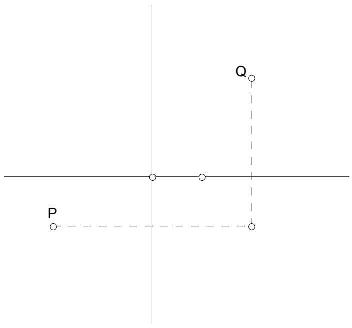


Figura - A distância que o Motorista de Táxi percorre de P para Q

Recorda que a circunferência é o conjunto de pontos, do plano, cuja distância a um ponto fixo é constante.

Investiga a forma da circunferência nesta nova Geometria. A razão entre o perímetro da circunferência e o seu diâmetro é constante? Faz sentido falar em π ?

De seguida apresentam-se as soluções, ao problema, das alunas X e Y.

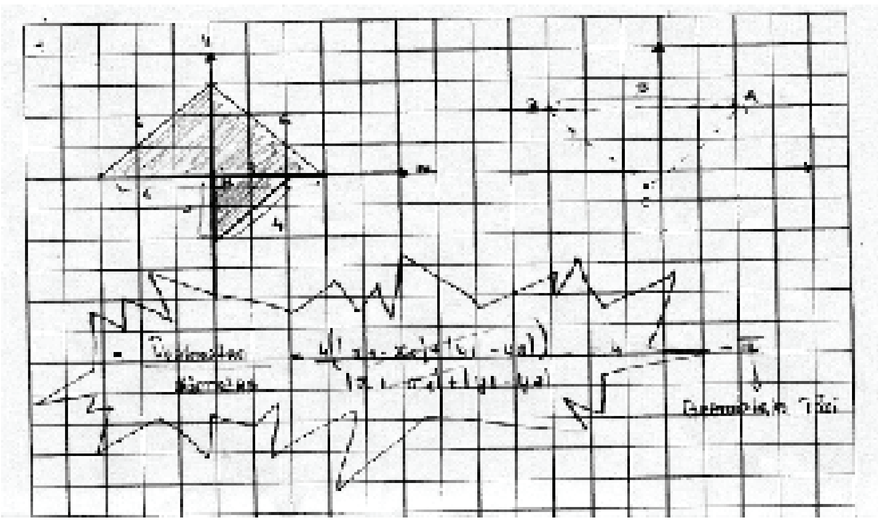


FIG. 4 – SOLUÇÃO DA ALUNA X AO PROBLEMA

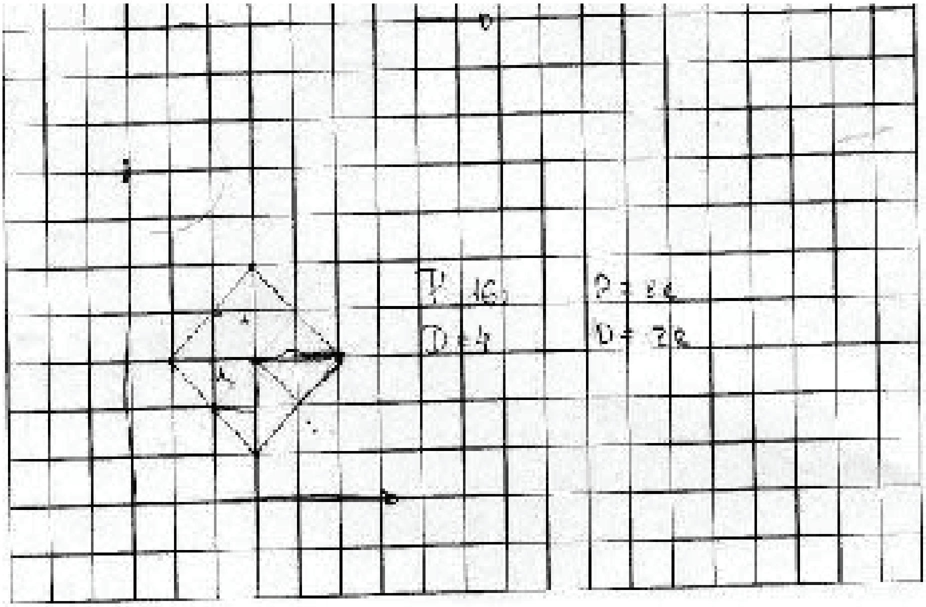


Fig. 5a – Solução da aluna Y ao problema

Após o registo anterior a aluna apresentou (na folha do enunciado do problema) a seguinte resposta:

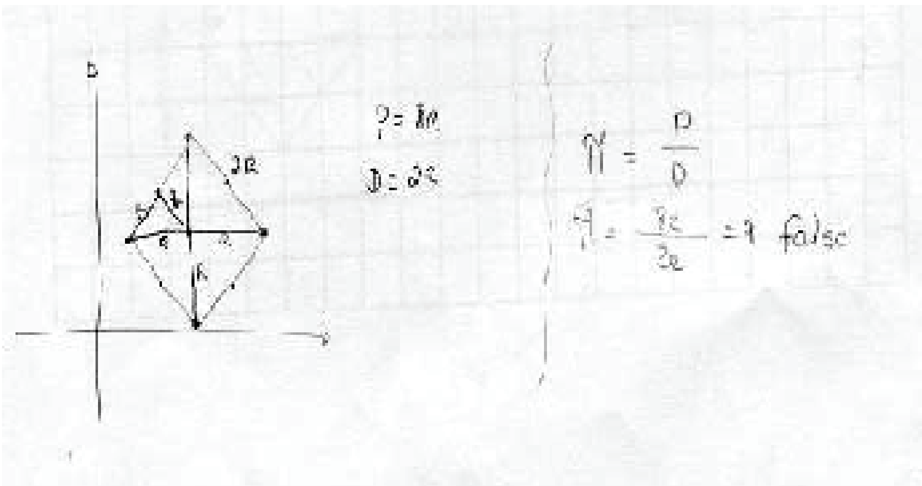


Fig. 5b- Solução da aluna Y ao problema

Analisemos os objectos matemáticos e suas relações primárias que intervêm na solução da situação-problema.

A **aluna X**, na solução apresentada, utilizou a terminologia de distância entre dois pontos, coordenadas de um ponto, losango, triângulo equilátero, perímetro e diâmetro.

O diagrama apresentado no enunciado constituiu uma ajuda para a compreensão e utilização da definição de distância entre dois pontos nesta geometria.

Em relação às definições envolvidas, a aluna dominava as definições de; distância entre dois pontos e perímetro de uma figura. No entanto, considerando a questão colocada durante o episódio 2, Oh Stora eu no perímetro, não sei se posso dizer isto, mas faço a soma de todos os lados?, parece indicar que a definição de perímetro suscitou conflitos cognitivos no contexto da geometria do Motorista de Táxi.

A forma da circunferência, neste modelo de geometria, foi induzida a partir de exemplos. Ou seja, as justificações foram de natureza empírica (a justificação envolveu o uso de relações encontradas nos exemplos – tipo indutivo). E na segunda parte da situação foi utilizado um exemplo genérico como ajuda para organizar a justificação segundo uma abordagem analítica, baseada em manipulações algébricas (justificação de natureza dedutiva, experimentação pensada do tipo transformativa).

A **aluna Y** utilizou a terminologia já mencionada no caso da **aluna X**. No entanto, revelou mais dificuldades na interpretação da definição de distância na geometria do Motorista de Táxi.

Analisemos os objectos matemáticos e suas relações secundárias que intervêm nas soluções apresentadas pelas **alunas X e Y**.

Ostensivo – não-ostensivo: A aluna X associou ao objecto não-ostensivo, circunferência, um ostensivo (que classificou de losango da geometria Euclidiana) na sequência da adopção da definição de distância na geometria do Motorista de Táxi. Note-se que a aluna ainda explorou o ostensivo de triângulo equilátero e que serviu de contexto para abordar a ausência da propriedade – desigualdade triangular (não-ostensivo). Na justificação à segunda parte do problema - A razão entre o perímetro da circunferência e o seu diâmetro é constante? Faz sentido falar em π? O exemplo genérico foi utilizado como ostensivo de que a razão entre o perímetro e o diâmetro é constante e essa constante tem como ostensivo o símbolo π que a aluna considerou igual a 4.

A aluna Y sentiu necessidade, na interpretação do enunciado do problema, em considerar o ostensivo da circunferência na geometria Euclidiana. De seguida, apenas se baseou num exemplo para justificar a forma da circunferência nesta nova geometria. Na justificação à segunda parte do problema, um exemplo genérico foi utilizado como base do ostensivo de que a razão entre o perímetro e o diâmetro é constante e essa constante é 4 que não foi identificada com sendoπ.

Extensivo - Intensivo: A representação pictórica da circunferência na geometria do Motorista de Táxi não é a familiar da geometria Euclidiana. Tal facto é justificado, pela aluna X, mostrando a sua veracidade nalguns exemplos específicos. A aluna Y passa de apenas um exemplo concreto para o caso genérico. Ou seja, utiliza um objecto extensivo, um caso particular (exemplo específico de "circunferência" na geometria do Motorista de Táxi), de um caso mais geral (isto é, da expressão geral de uma "circunferência") que é um objecto intensivo. Quanto ao cálculo da razão entre o perímetro e o diâmetro, a aluna X adoptou uma abordagem analítica enquanto a aluna Y uma abordagem sintética.

Pessoal–institucional: A situação-problema motivou argumentos regulados pela definição de métrica na geometria Euclidiana e na geometria do Motorista de Táxi (cognição institucional). Do ponto de vista da cognição pessoal, a actividade desenvolvida promoveu o questionamento por parte destas alunas da definição de perímetro neste caso específico, promovendo o entendimento do papel chave das definições na elaboração de argumentos. Quanto à questão – A razão entre o perímetro da circunferência e o seu diâmetro é constante? Faz sentido falar em π ? - A aluna X não entendeu o π como um número irracional mas sim como uma letra que designa a razão entre um perímetro e um diâmetro, ou seja, entendida como tendo uma natureza funcional. Quanto à aluna Y, esta entendeu o π como número irracional e portanto considerou falsa a afirmação, de que a razão entre o perímetro da circunferência e o seu diâmetro é π.

Unitário – sistémico: Durante o processo de resolução da situação-problema, as alunas seguem um percurso que vai desde a análise da situação até a uma síntese da actividade desenvolvida. O objecto matemático - distância na geometria do Motorista de Táxi - é entendido como um objecto complexo no início da actividade mas essa complexidade vai-se esbatendo ao longo da resolução do problema. No entanto, é notória nas soluções apresentadas o entendimento da situação em causa de forma sistémica.

Expressão - conteúdo: A situação – problema apesar de ser formulada num contexto de geometria do Motorista de Táxi há indicadores claros de que as alunas estabeleceram ligações com a geometria Euclidiana. O problema induziu a abordagem da igualdade $d(A,B) + d(B,C) = d(A,C)$, na geometria do Motorista de Táxi, com os pontos A, B e C não colineares.

Em síntese, a figura a seguir representa os atributos contextuais que tomaram parte nas soluções de problemas. O recurso a modelos de geometria plana promoveu interpretações intuitivas que geraram conflitos cognitivos e, a partir destes surgiu a importância da argumentação formal.

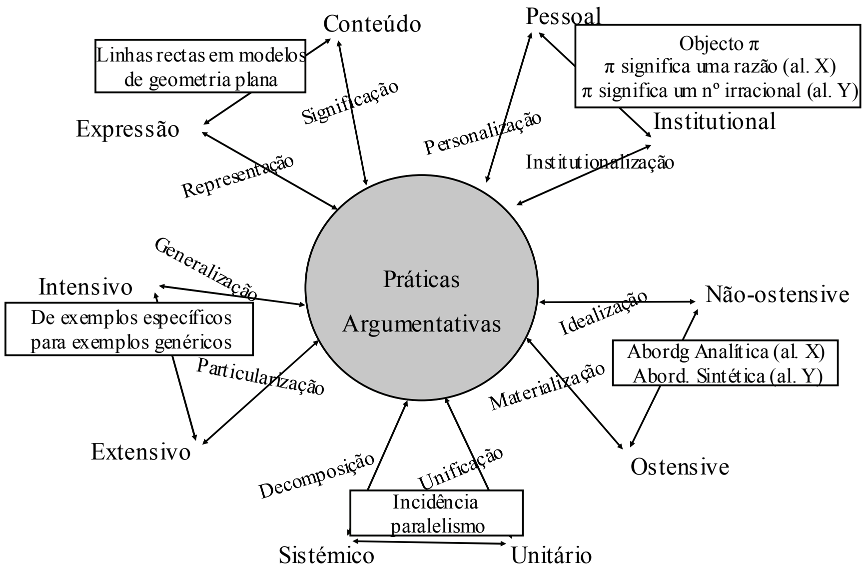


FIG. 6 – ATRIBUTOS CONTEXTUAIS (ALUNA X, ALUNAY)

Em síntese, uma abordagem geométrica diversificada, através de várias geometrias planas, promoveu nestas alunas, através da sequência de práticas argumentativas já descritas, um entendimento diferente das seguintes relações:

-Ostensivo – não ostensivo, através de um processo de materialização (domínio gráfico, algébrico) e idealização (domínio teórico);

-Extensivo – intensivo, através de um processo de particularização e de generalização, do exemplo específico para o exemplo genérico;

-Pessoal – institucional, através de um processo de personalização de objectos matemáticos institucionalizados segundo contextos de uso (por exemplo, o valor atribuído pela aluna X a π);

-Unitário – sistémico, através de um processo de decomposição e unificação (por exemplo, as várias geometrias abordadas são exemplos de uma geometria incidente);

-Expressão – conteúdo, através de um processo de representação e significação, novos significados são atribuídos a entes da geometria Euclidiana, (por exemplo a noção de linha, a linha nas várias geometrias planas tem diferentes representações mas com um significado).

Podemos afirmar que estas alunas revelaram indícios claros de evolução de justificações de natureza empírica (raciocínio mais espontâneo) para justificações de natureza dedutiva (raciocínio mais estruturado). Há indicadores claros de que foram percebendo as diferenças das definições (e.g., a definição de distância na geometria Euclidiana e a definição de distância na geometria do Motorista de Táxi), assim como o papel das definições na estrutura de uma justificação segundo um esquema dedutivo.

Conclusão

A abordagem das questões - O que é demonstrar? Porquê ensinar a demonstrar? - tal como foram apresentadas e discutidas na primeira parte deste texto, promove uma visão integrada e ligada entre várias perspectivas teóricas, no âmbito da investigação em educação matemática. Pode estabelecer-se ligação entre o conceito de “esquema de demonstração” apresentado por Harel e Sowder (2007) e o "sentido da demonstração matemática" apresentado por Recio e Godino (2001). A noção de "esquema de demonstração" envolve fatores de natureza matemática, de natureza histórico-epistemológica, de natureza cognitiva, de natureza sociológica e de natureza pedagógica, e também o "sentido da demonstração matemática" lida com factores epistemológicos e sócio-culturais. Ambas estas perspectivas considam que os conhecimentos matemáticos são desenvolvidos no seio das instituições e é por essa razão que deve ser entendidoo como um produto sócio-cultural, em que os domínios individual e social do conhecimento matemático estão inter-relacionados. A interação social constitui um factor básico que afecta e motiva a argumentação matemática. A este propósito, e no âmbito da investigação da demonstração na educação matemática, Mariotti (2006) afirma que o trabalho colaborativo, entre pares ou em pequenos grupos, constitui-se como contexto social favorável no qual surgem conflitos cognitivos que conduzem de forma natural a uma tomada de consciência, por parte dos alunos, na importãncia do confronto de respostas e argumentos, no sentido de resolver esses conflitos.

É importante chamar a atenção de que para além das normas sociais que controlam a actividade dos alunos, em sala de aula, torna-se crucial o estabelecimento de normas sócio-matemáticas, não só na prática de apoiar um conjunto de afirmações, bem como na razão porque se aceita determinados argumentos matemáticos. Esta pedagogia do porquê promove a demonstração matemática, envolvendo métodos, heurísticas, estratégias e conceitos que o aluno pode transpor para outros contextos. Além da prática de demonstrar potenciar a ampliação do conhecimento matemático, é igualmente importante ao nível da formação das concepções dos alunos sobre a natureza do conhecimento matemático e sua importância na sociedade actual. Segundo Hanna e Bardeau (2008) “The teaching of proof also has de potential to convey to students other important pieces of mathematical knowledge and to give them a broader picture of nature of mathematics” (p.352).

Os estudos de caso apresentados constituem parte da investigação que desenvolvi, no âmbito do meu trabalho de doutoramento. Este estudo poderá ter contribuído para tornar proeminente a importância da abordagem de outros modelos de geometria plana, distintos da Euclidiana, no desenvolvimento do raciocínio dedutivo. Uma das implicações desse resultado é o facto das situações didácticas a propor no estudo da geometria, ao nível do Ensino Secundário, dever contemplar problemas de prova em vários modelos de Geometria Plana. Os resultados do estudo ilustram a complexidade da análise e avaliação da argumentação matemática. A argumentação matemática poderá ser melhor compreendida e avaliada se tivermos a consciência de que os argumentos estão interligados com os objectos primários e secundários definidos no Enfoque Ontosemiótico (EOS). É a identificação das ligações entre esses vários objectos que caracterizam os processos de argumentação.

O conceito de linhas paralelas, apesar de não ser em si uma novidade, constitui-se uma novidade na sua abordagem num contexto de modelos de geometria plana, diferente da geometria Euclidiana. No sentido de Hanna e Bardieu (2008) este tipo de situações poderá potenciar outras componentes importantes de conhecimento matemático e contribuir para a formação, nestes alunos, de uma imagem mais ampla da natureza da matemática.

O trabalho de Hanna e Bardieu enfatiza a ligação entre a demonstração e os conteúdos matemáticos. Esta ligação constitui uma justificação para o recurso a uma perspectiva Ontosemiótica, considerando que este referencial teórico contribui para se conceber uma categorização dos tipos de objectos que intervêm na actividade matemática de demonstração.

O EOS complementa análises sobre a demonstração, já que propõe passar-se a considerar a demonstração (argumentos) como formando parte de uma Configuração de outros objectos e processos. Segunda esta perspectiva, o ensino e aprendizagem da demonstração deve ter em conta as relações dos argumentos com as situações-problema, os recursos linguísticos, as definições e os enunciados. Em síntese, os estudos de caso apresentados servem para ilustrar a potencialidade das noções teóricas do EOS para a investigação sobre o ensino e aprendizagem da demonstração.

Referências

Balacheff, N. (1987), Processus de preuve et situations de validation, *Educational Studies in Mathematics* 18, 147-176.

Godino, J. D., Batanero, C. Y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education,* 39 (1-2):127-135.

Godino, J. D. Batanero, C. e Font, V. (2009). An Integrative theoretical framework for mathematics education: The Onto-Semiotic Approach to mathematical knownoledge and instruction. Poster presentation. PME 33, Thessaloniki, July 2009.

Gutierrez, A. (2005). Aspectos metodológicos de la investigación sobre aprendizaje de la demostrción mediante exploraciones com software de Geometria dinámica, en Maz, A.; Gómez, B.; Torralbo, M. (eds.) (2005): *Actas del 9º Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM),* pp. 27-44.

Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: An overview. *Educational Studies in Mathematics,* Special issue on “Proof in Dynamic Geometry Environments”, *44*(1-2), 5-23.

Hanna, G. e Barbeau, E. (2008). Proofs as bears of mathematics knowledge. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education,* 40, 345-353.

Harel, G. e Sowder, L. (1998). Students´Proof Schemes, en E.Dubinsky, A. Schoenfeld and J. Kaput (eds), *Research on Collegiate Mathematics Education,* American Mathematical Association, Vol. III, 234 – 283.

Harel, G. e Sowder, L. (2007). Towards comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof, en F.K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 805-842). Charlotte, NC: NCTM and IAP.

Mariotti, M.A. (2006). Proof and proving in mathematics education, en A. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education. Past, present and future* (pp. 173-204). Rotterdam, Holanda: Sense Publishers.

Marrades, R. e Gutierrez, A. (2000). Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment. *Educational Studies in Mathematics, 44*, 87-125.

Recio, A. M. e Godino, J. D. (2001). Institutional and personal meanings of mathematics proof. *Educational Studies in Mathematics,* 48, 83 – 99.

Tall, D. e Ramos, J. P. (2009). The Long-Term Cognitive Development of Different Types of Reasoning and Proof. En G. Hanna, H. N. Jahnke and H. Pulte (Eds.), *Explanation and proof in mathematics: Philosophical and educational perspectives* (pp. 137-150). New York: Springer.