Visualización de la noción de límite empleando el Cabrí II

María del Carmen Bonilla Tumialán
Pontificia Universidad Católica del Perú

Jacqueline Huanqui Astocóndor
Pontificia Universidad Católica del Perú

Resumen

En la Maestría en la Enseñanza de la Matemática de la Pontificia Universidad Católica del Perú se desarrolla una investigación sobre la enseñanza de la noción de límite. Numerosas investigaciones constatan el fracaso de las aproximaciones teóricas y formales que se desarrollaron en el contexto de las matemáticas modernas, y de las estrategias de enseñanza usuales, que reducen el Análisis a un cálculo algebraico algoritmizado (Artigue, 1998). El problema de investigación que motiva el taller se presenta en función cómo diseñar archivos en Cabrí Géomètre que permitan la transposición didáctica de la noción de límite a contextos computacionales, transposición informática (Balacheff, 1994), y que promuevan una transformación a nivel epistemológico de la experiencia matemática del estudiante. Se elabora la propuesta enfocando diferentes sistemas de prácticas (Godino, 2006) de la noción de límite (límite de sucesiones y límite de funciones). En un primer momento, en base a la resolución de un grupo de problemas de carácter geométrico diseñados por Hitt y Páez (2003) procuramos un acercamiento intuitivo a la noción de límite de sucesiones. En una segunda parte del taller se trabaja en la construcción geométrica de la noción de límite de funciones. La visualización y manipulación del concepto permite la comprensión cabal de la definición formal, la validación de los enunciados matemáticos y la activación de un proceso cognitivo marcado por la relación dialéctica entre percepción

y conceptualización durante la interacción con la interfase del sistema (Moreno, 2002)

Palabras claves: noción de límite, geometría dinámica, Cabrí, visualización.

Audiencia: Profesores de los cursos de Cálculo a nivel universitario

Equipo necesario: Proyector Multimedia.

Software: Microsoft Office, Cabri Géomètre II Plus.

Ambiente: Laboratorio de Informática o de Computación

Marco Teórico

La dificultad de los alumnos para entrar al campo conceptual del cálculo ha generado numerosos trabajos que analizan las causas de este problemática (Artigue, 1995), como el no partir de problemas al introducir las nociones, el empleo temprano de un lenguaje formalizado y una enseñanza centrada en el discurso del profesor. Teniendo en cuenta estas críticas la concepción de la matemática cambia, se la considera como una actividad humana, histórica, que no se descubre sino se construye, que tiene como fin la resolución de problemas intra o extramatemáticos, y que debe equilibrar la exigencia del saber matemático con la exigencia del funcionamiento cognitivo del estudiante.

A pesar de los cambios en la enseñanza del cálculo, existen un conjunto de dificultades analizadas por diferentes investigadores. Señalaremos aquellas dificultades que se busca disminuyan con este taller al utilizar el Cabrí Géomètre II en la visualización y comprensión de la noción de límite.

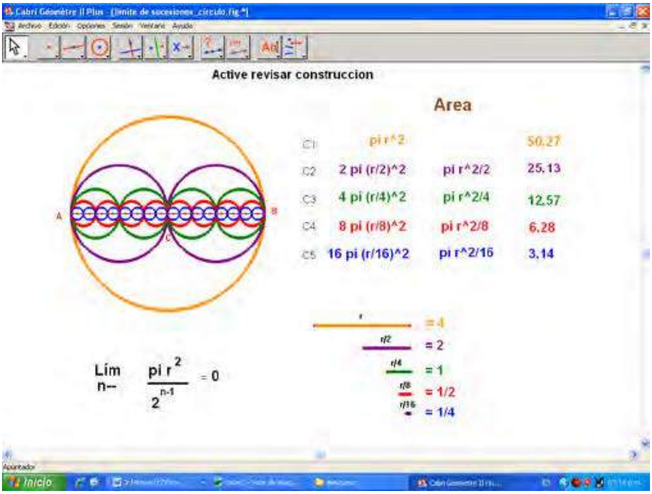
Una dificultad que se presenta en la comprensión de toda noción matemática es la de articular los diferentes registros semióticos (escrito, verbal, gráfico, gestual, material). Bosch (2000) nos señala la no diferenciación entre registros desde el punto de vista de su función en su trabajo matemático. Todos tienen el mismo valor. Es más, según Blázquez (2001), dominar un concepto consiste en conocer sus principales representaciones, sus significados, traducir unas en otras. En ese sentido las actividades propuestas en el Taller consiguen representar en forma simultánea representaciones algebraicas, gráficas y numéricas de la noción de límite. A través del movimiento podemos apreciar cómo se articulan las diferentes representaciones.

Otro aspecto que también corresponde al aprendizaje de toda noción matemática es la flexibilidad proceso-concepto (Artigue, 1995). Existen dificultades para desarrollar la flexibilidad entre las nociones vistas como proceso y las nociones vistas como objeto. Los objetos matemáticos presentan dos status: el operacional, dinámico y el estructural, estático. Es frecuente, por no decir siempre, que en la historia de los conceptos el primer status precede al segundo. Esa misma jerarquía se reflejaría en el aprendizaje individual. Existe dificultad de separar la visión de límite en términos de proceso, para separar el objeto límite del proceso que lo ha construido. En las actividades propuestas en el Taller, principalmente en las sucesiones de figuras geométricas del cuadrado y el círculo, podemos apreciar como se da el proceso de construcción de una aproximación intuitiva a la noción de límite de sucesiones, visualizando el cambio gracias al carácter dinámico del Cabrí, superando así las limitaciones de la representación geométrica tradicional.

Ejercicio Nº 1

Se construye un círculo con el segmento AB como diámetro. AB = 8. Luego se divide AB en dos partes iguales, AC y CB, y se construye dos círculos. Se continúa dividiendo y construyendo más círculos.

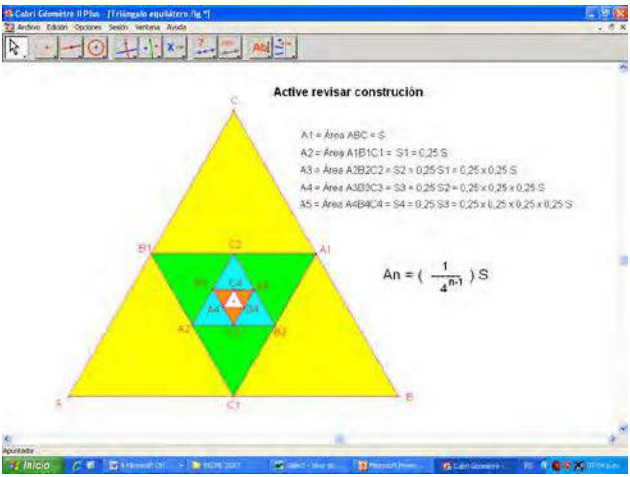
a) Si sumas las áreas determinadas por los círculos a medida que disminuye la longitud de cada sub-segmento, ¿Obtendrás un valor? ¿Cuál es el valor? Justifique su respuesta.



Ejercicio Nº 2

Se construye un cuadrado de lado 1. Uniendo los puntos medios de los lados se construye un cuadrado inscrito. Así sucesivamente se toman los puntos medios de los lados y se van construyendo cuadrados inscritos.

¿Cuál es el área de la figura final?

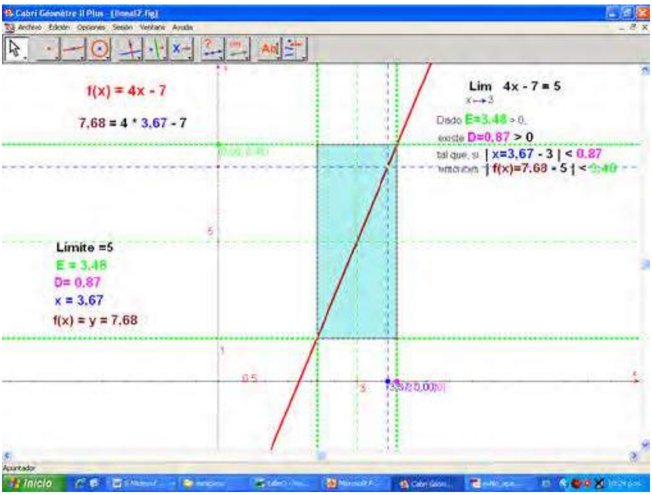


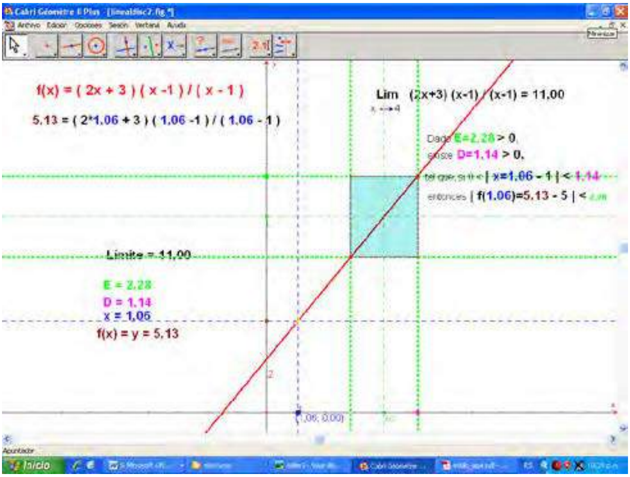
Según Alsina, Burgués y Fortuny (1997) la historia del desarrollo de las Matemáticas es la historia del desarrollo del conocimiento geométrico, dos modos de comprensión y expresión, 1) el que se realiza de forma directa, que corresponde a la *intuición geométrica*, de *naturaleza visual*, y, 2) el que se realiza de forma *reflexiva, lógica, de naturaleza verbal*. Ambos son complementarios. La visualización permite el desarrollo de la intuición geométrica, por ende, de la creatividad. Tiene un carácter subjetivo.

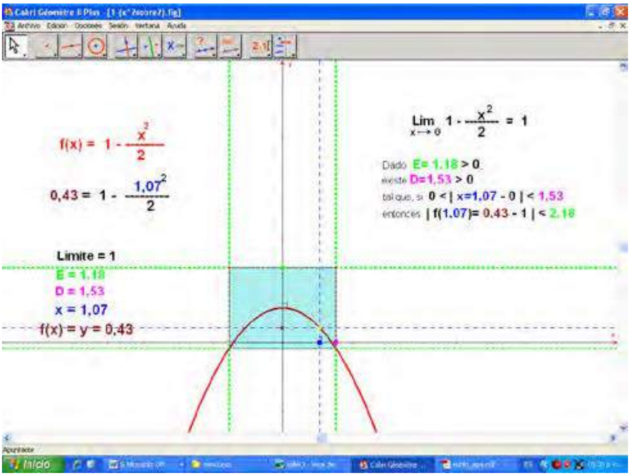
Para Miguel de Guzmán (1996) las corrientes formalistas han privilegiado la exposición formal de la matemática, considerando inútiles a los apoyos en la intuición visual de los conceptos y procesos del pensamiento matemático, sin tomar en cuenta que muchas veces las intuiciones visuales han dado origen a los conceptos y procesos matemáticos más básicos e importantes. La adquisición de ese sustrato visual e intuitivo puede ser muy provechosa para cualquier usuario de la matemática. Para los griegos la visualización era algo connatural a las matemáticas. La palabra $\tau\varepsilon o\rho\varepsilon\mu\alpha$ (zeorema) significa contemplar y no lo que se demuestra. Las Geometrías no euclídeas y otros hechos llevaron a crear una corriente hacia la formalización y una desconfianza hacia la visualización. La tendencia actual es a la renovación del papel de la visualización en el quehacer matemático. Lo visual se considera como un argumento heurístico y como una forma de validar propiedades; incluso algunos consideran que el rol de la noción tradicional de prueba en Educación ha cambiado, y nuevas formas y tipos de explicación y argumentación se han desarrollado, producto del uso de las computadoras. Como una consecuencia, en la filosofía y en la historia de la matemática el enfoque de cómo entender la matemática ha cambiado. (Hanna, Jahnke y Pulte, 2006).

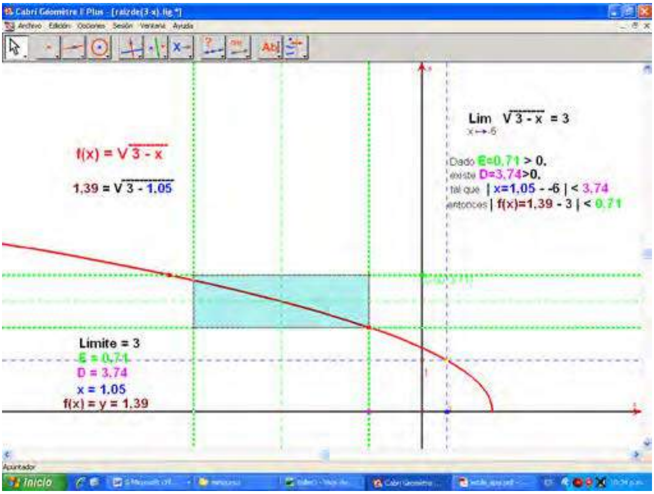
En el enfoque tradicional la formalización estándar de la noción de límite expresa una dificultad asociada a su carácter poco natural, al construirse una vecindad alrededor del límite. Se hace necesaria la utilización de cuantificadores, de ε, que hacen más compleja la definición. Desde una perspectiva histórica existe un salto cualitativo entre el manejo intuitivo de la noción de límite y la noción formalizada estándar. Esta última rompe con las concepciones previas de la noción. Al momento de efectuar la transposición didáctica del concepto de límite no se pone en evidencia su dimensión epistemológica. Se enfatiza en su papel de concepto unificador del campo del análisis y se deja de lado su papel productivo para resolver problemas. Utilizando las actividades en Cabrí relacionadas al límite de funciones procuramos establecer una articulación entre sus representaciones geométrica, algebraica, y aritmética, que permita una mejor comprensión del enunciado formal de la noción de límite.

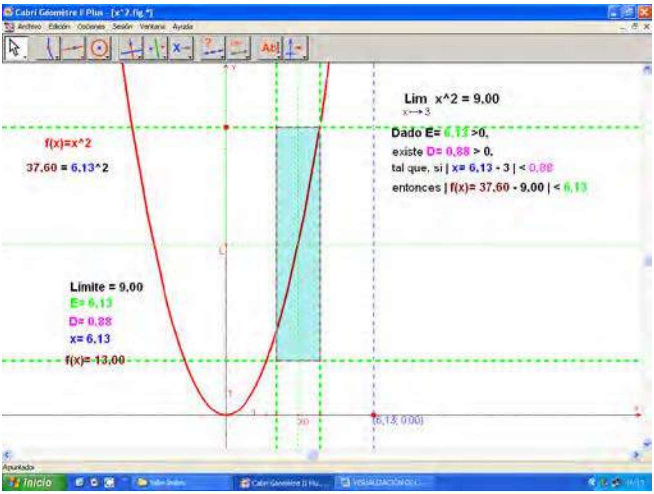
A continuación se trabaja la construcción de límites de funciones lineales, cuadráticas, exponenciales cuando tienden a un punto, así como límite de funciones cuando tienden al infinito.

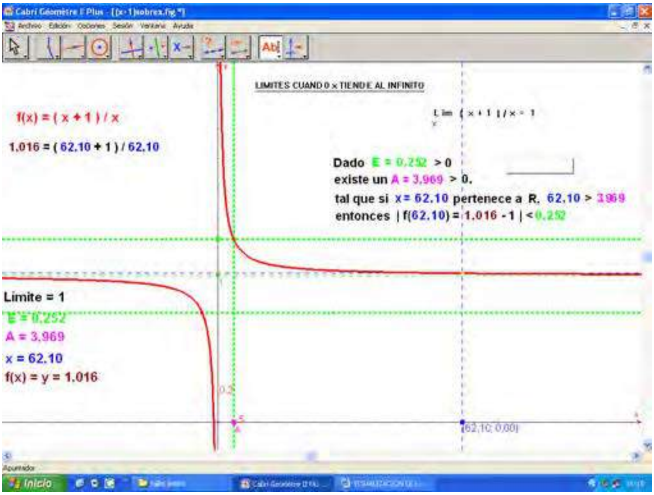



f(x) = (2x + 3) (x -1) / (x - 1)
5,13 = (2*1,06 + 3) (1,06 -1) / (1,06 - 1)
Lim (2x+3) (x-1) / (x-1) = 11,00
Limite = 11,00
E = 2,28
D = 1,14
x = 1,06
f(x) = y = 5,13


f(x) = 1 - x²/2
0,43 = 1 - 1,07²/2
Lim 1 - x²/2 = 1
Dado E= 1,18 > 0
existe D=1,53 > 0
tal que, si 0 < | x=1,07 - 0 | < 1,53
entonces | f(1,07)= 0,43 - 1 | < 2,18
Limite = 1
E = 1,18
D = 1,53
x = 1,07
f(x) = y = 0,43


Cabri Géomètre II Plus - [raizde(3-x).fig *]
Lim $\sqrt{3-x}$ = 3
x→-6
f(x) = $\sqrt{3-x}$
1,39 = $\sqrt{3 - 1,05}$
Dado E=0,71 > 0,
existe D=3,74>0,
tal que | x=1,05 - -6 | < 3,74
entonces | f(x)=1,39 - 3 | < 0,71
Limite = 3
E = 0,71
D = 3,74
x = 1,05
f(x) = y = 1,39


Cabri Géomètre II Plus - [x^2.fig *]
Lim x^2 = 9,00
x→3
f(x)=x^2
37,60 = 6,13^2
Dado E= 6,13 >0,
existe D= 0,88 > 0,
tal que, si | x= 6,13 - 3 | < 0,88
entonces | f(x)= 37,60 - 9,00 | < 6,13
Limite = 9,00
E= 6,13
D= 0,88
x= 6,13
f(x)= 13,00



Podemos apreciar que la geometría dinámica del Cabrí vence a la fuerza de una geometría estática que no permite ver los objetos involucrados en la noción de límite y su topología subyacente.

El conocimiento matemático no es el resultado de un proceso continuo, ni lineal. Es un proceso dialéctico que se da en espiral. El desarrollo del conocimiento matemático ha necesitado de momentos de ruptura con las formas de pensamiento anteriores. Históricamente hemos adquirido primero el pensamiento numérico. El Álgebra, ciencia de la cantidad finita que tiene por objetivo extraer las raíces de las expresiones, significó liberarse de la concepción "estática" de la matemática griega para ver la variación. Como producto del desarrollo de la matemática surge el Análisis, la ciencia del infinito. En el pensamiento analítico la visión de la noción de igualdad debe ser enriquecida, reconstruida, así como se hizo en la transición del pensamiento numérico al pensamiento algebraico. Para Leibniz la variable es una secuencia de valores infinitamente próximos. El crecimiento y movimiento se expresa como creciendo por mínimos, o términos continuamente crecientes, elemento por elemento.

Es nuestro interés que a través de las actividades propuestas se logre sentar las bases para el desarrollo de una aproximación intuitiva del pensamiento analítico, pues con el Cabrí podemos visualizar el cambio en valores infinitamente próximos.

Referencias

Alsina, C., Burgués, C. y Fortuny, J. (1997). *Invitación a la Didáctica de la Geometría.* (4ª ed.). Madrid, España: Síntesis.

Artigue, M. (1995). *La Enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos*. En: Ingeniería Didáctica en Educación Matemática. México D.F: Grupo Editorial Iberoamérica.

Artigue, M. (1998). Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 1(1), 41 – 56.

Bainville, E. (2002). Cabri Geometry II Plus. User Manual. Cabrilog. (S. Hoath, trad.) [Manual de cómputo]. Recuperado de http://www.cabri.com

Balacheff, N. (1994). Didactique et Intelligence Artificielle. *Recherches en Didactique des Mathematiques, 14(1-2),9-42.*

Blázquez, S. y Ortega, T. (2001). Los sistemas de representación en la enseñanza de límite. *Revista Latinoamericana de Investigación en Educación Matemática, 4 (*3), 219 – 236.

Bosch, M. (2000). *Un punto de vista antropológico: la evolución de los "instrumentos de representación" en la actividad matemática.* Recuperado el 20 de agosto del 2006, del sitio web de la Universidad de Granada: http://www.ugr.es/local/seiem/IV_Simposio.htm

De Guzmán, M. (1996). *El rincón de la pizarra. Ensayos de visualización en análisis matemático.* Madrid, España: Pirámide.

Godino, J. (2006) *Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática.* Recuperado el 10 de mayo del 2006 del sitio web de la Universidad de Granada: http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/sintesis_eos_1mayo06.pdf.

Hanna, G., Jahnke, H. y Pulte, H. (2006). *Conference Program (preliminary) of The International Conference Explanation and Proof in Mathematics: Philosophical and Educational Perspectives*. Recuperado el 20 de agosto del 2007 del sitio web de la Universidad Duisburg Essen: http://www.bew.de/bew/bew_essen/

Hitt, F. y Páez, R. (2003). Dificultades de aprendizaje del concepto de límite de una función en un punto. *Revista Uno, (32), 97- 108.*

Leithold, L. (1992). *El Cálculo con Geometría Analítica.* (6ª ed.). (A. Eroles, trad.). México, D.F.: Harla

Moreno, L. (2002). Cognición y computación: el caso de la geometría y la visualización. *Memorias del Seminario Nacional de Formación de Docentes: Uso de las Nuevas Tecnologías en el Aula de Matemáticas. Bogota: Ministerio de Educación Naconal de Colombia.*